

Камчатский государственный технический университет

А.Я. Исаков, В.В. Исакова

Колебательные и волновые процессы

Руководство по самостоятельной работе

Петропавловск-Камчатский
2008

УДК 50(075.8)
ББК 20я73
И85

Рецензенты:
В.И. Короченцев,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой гидроакустики
Дальневосточного государственного технического университета
им. В.В. Куйбышева

Исаков А.Я., Исакова В.В.

И85 **Колебательные и волновые процессы.** Руководство по самостоятельной работе:
– Петропавловск-Камчатский: КамчатГТУ, 2008. – 328 с.

Физика в современном мире обоснованно рассматривается как одна из основных фундаментальных наук, определяющих кругозор и мировоззрение современного специалиста. Знание физических законов и умение их использовать учёными и инженерами в своей профессиональной деятельности определяет научно-технический потенциал цивилизации. Всего что успела достичь земная цивилизация в большей или меньшей степени связано с успехами физики и её многочисленных дочерних дисциплин. Это очевидно и не требует дополнительного обсуждения.

Изучение физики не может протекать успешно без активного сотрудничества в образовательном процессе главных его участников – преподавателя и студента. Знание только теоретических основ физических законов не позволяет созидательно их использовать при освоении общепрофессиональных и специальных дисциплин. Законы мироздания приобретают силу и смысл только при умении их использовать для решения конкретных задач. Наряду с несомненной теоретической значимостью физика сильна своими приложениями. Научить студента применять физические законы можно только в том случае, если он станет активно пытаться при посредничестве преподавателя самостоятельно решать задачи физического содержания.

Эта книга о самом распространённом в природе и технике движении – колебаниях и волнах, которые можно обнаружить в широком спектре физических, химических, астрономических, биологических и даже социальных явлений. Материал пособия построен таким образом, что теоретические положения колебательных и волновых движений в большинстве своём сопровождаются многочисленными задачами с подробными решениями, разбирая которые, можно самостоятельно научиться применять теоретические знания. Пособие предназначено, прежде всего, студентам заочной формы образования, которые вынуждены многое в физике постигать самостоятельно. Вместе с тем книга может быть полезна и студентам очной формы образования при выполнении индивидуальных заданий, подготовке к тестированию при проверке остаточных знаний.

УДК 50(075.8)
ББК 20я73

ISBN 978–5–328–00133–5
© Исаков А.Я., 2007

© КамчатГТУ, 2007

Оглавление

Введение в теорию колебаний и волн.....	5
1. Собственные колебания без потерь	
1.1. Горизонтальные колебания массы, соединённой с пружиной.....	17
1.2. Уравнение свободных колебаний в обобщённых координатах.....	20
1.3. Крутильные колебания.....	25
1.4. Математический маятник.....	26
1.5. Физический маятник.....	27
1.6. Собственные колебания массы с двумя пружинами.....	28
1.7. Вертикальные колебания массы с двумя пружинами.....	29
1.8. Вертикальные колебания массы на пружине.....	30
1.9. Колебания жидкости в U-образной трубке.....	31
1.10. Электрический колебательный контур.....	31
1.11. Колебания систем с непрерывно распределёнными накопителями энергии.....	33
1.12. Нелинейная зависимость восстанавливающей силы.....	34
1.13. Примеры вычисления параметров собственных колебаний без потерь.....	37
2. Собственные колебания с затуханием	
2.1. Рациональный выбор приближённой схемы реальных систем.....	67
2.2. Системы с сопротивлением, пропорциональным скорости.....	68
2.3. Системы с постоянной силой сопротивления	73
2.4. Примеры колебаний с затуханием.....	75
3. Вынужденные колебания	
3.1. Действие внешней гармонической силы.....	82
3.2. Уравнение вынужденных колебаний в обобщённых координатах.....	85
3.3. Кинематическое возбуждение колебаний.....	87
3.4. Примеры вынужденных колебаний.....	75
4. Автоколебания	
4.1. Вводные замечания.....	102
4.2. Баланс энергии и фазовый портрет автоколебаний.....	106
4.3. Колебания пластинки в воздушном потоке.....	107
4.4. Часы.....	110
4.5. Автоколебания в гидравлических системах.....	112
4.6. Автоколебания в трубах.....	112
4.7. Автоколебания, связанные с образованием вихрей.....	115
4.8. Флаттер.....	116
4.9. Срывной флаттер.....	121
5. Параметрические колебания	
5.1. Введение.....	123
5.2. Колебания вблизи равновесного положения.....	125
5.3. Колебания в окрестностях стационарного режима.....	126
5.4. Примеры анализа устойчивости колебательных систем.....	129
5.5. Случайные колебания.....	132
6. Суммирование колебаний	
6.1. Вводные замечания.....	133
6.2. Два однонаправленных колебания одинаковой частоты.....	133
6.3. Произвольное число слагаемых колебаний.....	135
6.4. Колебания с разными частотами.....	136
6.5. Суммирование взаимно перпендикулярных колебаний.....	141
7. Упругие волны	
7.1. Предварительные замечания.....	143
7.2. Образование и распространение волн в упругой среде.....	144
7.3. Уравнение плоской бегущей волны.....	146
7.4. Волновое уравнение.....	148

7.5. Волна, распространяющаяся в произвольном направлении	149
7.6. Скорость упругих волн	150
7.7. Энергия волнового движения	157
8. Несинусоидальные волны	
8.1. Спектры и анализ несинусоидальных волн	160
8.2. Дисперсионное уравнение. Групповая скорость	165
9. Явление интерференции волн	
9.1. Принцип Гюйгенса	170
9.2. Интерференция волн	171
9.3. Стоячие волны	174
9.4. Особенности движения струны	175
9.5. Волновое сопротивление и проводимость	181
10. Упругие волны акустического диапазона	
10.1. Основные положения и определения	183
10.2. Энергия и мощность звуковых волн	188
10.3. Поглощение акустической энергии в средах	193
10.4. Отражение от границ раздела сред	195
10.5. Акустическое поле	197
11. Элементы физиологической акустики	
11.1. Ухо как приёмник акустической информации	199
11.2. Интенсивность источников. Порог слышимости	203
12. Шумы	
12.1. Шумы транспортных средств	205
13. Волны на поверхности жидкости	
13.1. Гравитационно-капиллярные волны	214
13.2. Ветровые волны	217
13.3. Корабельные волны	219
13.4. Элементы теории приливных волн	221
13.5. Некоторые особенности волн цунами	223
14. Волновые явления и эффекты	
14.1. Явление дифракции	227
14.2. Эффект Доплера	230
14.3. Звуковой удар	232
15. Эхолокация	
15.1. Вводные замечания	281
15.2. Воздушная эхолокация	236
15.3. Эхолокация в воде	239
16. Примеры расчёта акустических полей	
16.1. Волны в упругой среде	246
16.2. Скорость акустических волн	252
16.3. Суперпозиция упругих волн	260
16.4. Эффект Доплера	265
16.5. Акустика	269
17. Электромагнитные колебания	
17.1. Вводные замечания	281
17.2. Вынужденные электрические колебания	285
17.3. Цепи переменного тока	288
18. Электромагнитные волны	
18.1. Электродинамика Максвелла – Герца – Хевисайда	289
18.2. Волновое уравнение электромагнитных волн	299
18.3. Энергия электромагнитных волн	303
18.4. Излучение электромагнитных волн	306
18.5. Примеры расчёта электромагнитных колебаний	311
Литература	327

Введение в теорию колебаний

Макс Планк утверждал [1], что правильная классификация – это уже высокий уровень познания. В теории колебаний проводить классификацию достаточно сложно ввиду многообразия колебательных движений в живой и не живой природе на мега, макро и микро уровнях. Академик Мандельштам на одной из своих лекций заметил: «Резко разграничить, что такое колебания, а что не колебания, так же трудно, как определить, что такое лысый человек или, что такое куча...» [1]. В качестве подтверждения мысли классика на рис.1 приведены примеры колебательных систем, которые встречаются в природе и технике.

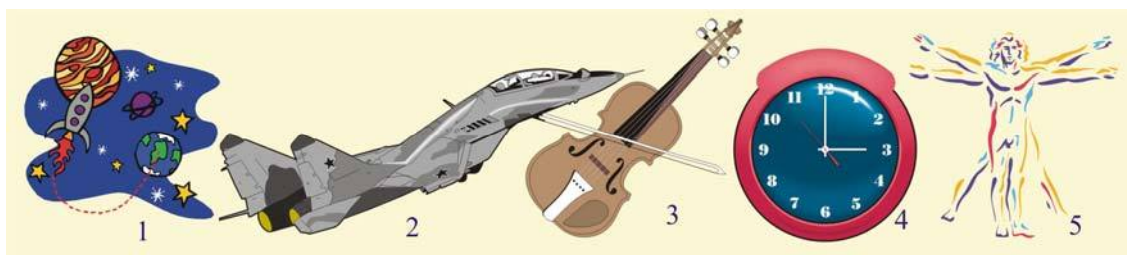


Рис.1. Примеры колебательных систем

Наш мир устроен так, что в нём на всех уровнях, от элементарных частиц и до Галактик, всё находится в непрерывном движении, причём большинство движений можно классифицировать как колебательные. Например, планеты Солнечной системы (1), движутся таким образом, что можно установить очевидную повторяемость их кинематических и динамических характеристик, движение по круговым и эллиптическим орбитам изначально представляются периодическими.

День на нашей планете систематически, с предсказуемой последовательностью сменяется ночью, а лето, осенью и, к сожалению, длинной зимой. Даже существование всего живого на Земле обязано тем, что от Солнца приходит энергия в виде электромагнитных волн.

Творения рук человеческих от летательных аппаратов (2), музыкальных инструментов (3) и различных отметчиков времени (4) – всё во многом имеет колебательную основу.

Совсем недавно отечественными учёными Б. Белоусовым и А. Жаботинским обнаружены периодические химические реакции. Подобные реакции, происходящие в живых организмах, определяют их биологические ритмы. Да и наша жизнь длится до тех пор, пока работает неутомимый, постоянно колеблющийся, насос – наше сердце (5), который классифицируется как автоколебательная система. Окружающий нас Мир мы воспринимаем благодаря наличию двух «колебательно-волновых» каналов информации, настроенных на разные диапазоны частот. Акустический канал информации человека теоретически может воспринимать упругие колебания воздуха в диапазоне частот 20 Гц – 20 кГц и выше, однако на практике столь широким акустическим диапазоном обладают немногие люди, как правило, реальные возможности скромнее. Человеческим ухом воспринимаются низкие частоты порядка 35 – 45 Гц, а высокие частоты ограничиваются 12 – 15 кГц. С возрастом диапазон воспринимаемых частот ещё сужается.

Оптическое восприятие окружающего мира человек осуществляет в диапазоне частот электромагнитного излучения $4 \cdot 10^{14}$ – $8 \cdot 10^{14}$ Гц. Этого оказывается вполне достаточным, чтобы различать цвета от красного до фиолетового цвета. Длинноволновое электромагнитное инфракрасное излучение человеческий организм распознаёт в виде повышения температуры участков кожи, коротковолновое ультрафиолетовое излучение человек обнаруживает по его вторичным проявлениям, например по загару кожного покрова. К сожалению, мы не можем обнаруживать в реальном масштабе времени действия электромагнитных волн рентгеновского и гамма излучения, только последствия, причём, как правило, негативные.

Практически все живые организмы ориентируются в пространстве и времени, находят друг друга и добычу посредством излучения и приёма различного диапазона упругих волн, причём граничные частоты, воспринимаемые животными не всегда совпадают с человеческими. Так, например, собаки, как и многие другие животные, воспринимают частоты ультразвукового диапазона до 40 кГц, а китообразные, о которых впереди особый разговор, воспринимают без вреда для себя колебания инфразвукового диапазона примерно от 6 – 7 Гц. Человек тоже неосознанно реагирует на инфразвуковые колебания, правда ничего хорошего от этого с ним не происходит, только неприятные болевые ощущения. Пресмыкающиеся, в частности, змеи, в оптическом диапазоне практически не видят, различают только движение, причём на инфракрасных частотах. В табл. 1 приведены параметры некоторых колебательных процессов встречающихся в природе.

Таблица 1

Наименование процессов	Частота, Гц	Период, с
Вековые возмущения планет	10^{-10}	10^{10}
Обращения планет	10^{-8}	10^8
Приливы и отливы	10^{-5}	10^5
Колебания в машинах	$1 - 10^3$	$1 - 10^{-3}$
Секундный маятник	10^0	1
Инфразвуковые колебания	$1 - 10$	$1 - 10^{-1}$
Звуковой диапазон	20 Гц – 20 кГц	$0,05 - 5 \cdot 10^{-5}$
Ультразвуковые колебания	$2 \cdot 10^4 - 2 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^{-5} - 5 \cdot 10^{-7}$
Гиперзвуковой диапазон	$10^6 - 10^8$	$10^{-6} - 10^{-8}$
Переменный ток	50,0	0,02
Радиотелеграфия	$10^5 - 10^8$	$10^{-6} - 10^{-9}$
Инфракрасное излучение	10^{12}	10^{-12}
Видимый свет	$4 \cdot 10^{14} - 8 \cdot 10^{14}$	$2,5 \cdot 10^{-15} - 1,25 \cdot 10^{-15}$
Ультрафиолетовое излучение	$8 \cdot 10^{14} - 10^{17}$	$1,25 \cdot 10^{-15} - 10^{-17}$
Рентгеновское излучение	$3 \cdot 10^{16} - 3 \cdot 10^{20}$	$3 \cdot 10^{-17} - 3 \cdot 10^{-21}$
Гамма – излучение	10^{20}	10^{-20}

При рассмотрении механического движения, как правило, ставились задачи определения кинематических и динамических параметров в конкретно заданный момент времени. В теоретической механике наработан обширный арсенал методов и средств решения задач динамики посредством составления и последующего интегрирования уравнений второго закона Ньютона или путём использования общих теорем динамики и законов сохранения. В принципе теория колебаний решает те же задачи, но несколько меняется постановка задач. Теория колебаний кинематические и динамические параметры движения в данный момент времени рассматривает не как конечный результат, а частность. Конечным результатом исследования колебательного движения является выяснение его целостных характеристик

Колебательным явлением, колебательным движением или просто колебаниями принято считать такие процессы, при которых какие-либо характеризующие их физические параметры повторяются через определённые промежутки времени [2].

При решении многих задач теории колебаний и волн можно существенно упростить математическую часть процесса, если ввести в рассмотрение **обобщённые координаты** и соответствующие им **обобщённые силы**. Напомним некоторые сведения из механики, необходимые при составлении уравнений движения в обобщённых координатах и силах [3].

Рассмотрим некую механическую систему, состоящую из n материальных точек и находящуюся в инерциальной системе отсчёта $\{Oxyz\}$. Положение произвольной точки M_k в этой системе, как известно, определяется тремя декартовыми координатами $\{x_k, y_k, z_k\}$. Для определения положения всей системы необходимо задать $3n$ координат, мир-то, в классическом представлении трёхмерен. Предположим, что на рассматриваемую систему наложены голономные связи, т.е. связи, уравнения которых не содержат производных от координат по

времени или дифференциалов координат. Пусть движение системы ограничено h голономными идеальными связями (идеальными называются связи, если сумма работ всех реакций связи на любом виртуальном перемещении системы равна нулю)

$$f_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, h). \quad (1)$$

Так как не всякое движение для рассматриваемой системы возможно, то число независимых её координат будет связано с количеством наложенных связей

$$s = 3n - h. \quad (2)$$

В качестве независимых s координат могут быть выбраны декартовы координаты, однако это не упрощает процесс составления уравнений. Более рационально выбрать s независимых параметров $\{q_1, q_2, \dots, q_s\}$, которые называются обобщёнными координатами, однозначно определяющими положение рассматриваемой системы.

Рассмотрим преимущества обобщённых координат на примере описания движения математического маятника (рис. 2). Маятник представляет собой небольшую по размерам массу m , подвешенную на относительно длинном невесомом стержне l . Стержень шарнирно вращается вокруг точки O .

Если массу рассматривать как материальную точку, то можно считать, что на неё наложена связь, в виде стержня, который ограничивает все виды движений кроме вращательного вокруг os , проходящей перпендикулярно плоскости чертежа через точку O .

Положение массы в любой момент времени в плоскости движения можно охарактеризовать двумя декартовыми координатами, например в положении II $\{x_{II}, y_{II}\}$, т.е. для описания движение рассматриваемой системы достаточно двух уравнений

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t). \quad (3)$$

У рассматриваемого движения есть одна особенность, которая позволяет количество независимых координат сократить. Дело в том, что движение в данном случае представляет собой вращение, которое происходит по части окружности радиуса l , что позволяет однозначно характеризовать положение массы m на круговой траектории угловой координатой φ

$$\varphi = f(t), \quad (4)$$

которую уместно принять в качестве обобщённой координаты

$$\varphi \equiv q. \quad (5)$$

Обобщённая координата в данном случае измеряется не в метрах, а в радианах, что повлечёт за собой изменение размерностей скоростей и ускорений

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \left[\frac{\text{рад}}{c} \right]; \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon; \left[\frac{\text{рад}}{c^2} \right]. \quad (6)$$

В данном случае ω и ε можно называть обобщенной скоростью и обобщённым ускорением. Однако, при описании колебательного и вращательного движения их называют угловой скоростью (циклической частотой) ω и угловым ускорением ε .

Напомним далее понятие обобщённых сил. Вычислим работу δA всех активных сил на виртуальном перемещении (виртуальным называется мысленное перемещение системы, допускаемое наложенными на систему связями)

$$\delta A = \sum_{k=1}^{k=n} \vec{F}_k \delta \vec{r}_k, \quad (7)$$

где $\delta \vec{r}_k$ – вариация радиус-вектора $\vec{r}_k$, которым соответствуют вариации обобщённых координат $\{\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s\}$

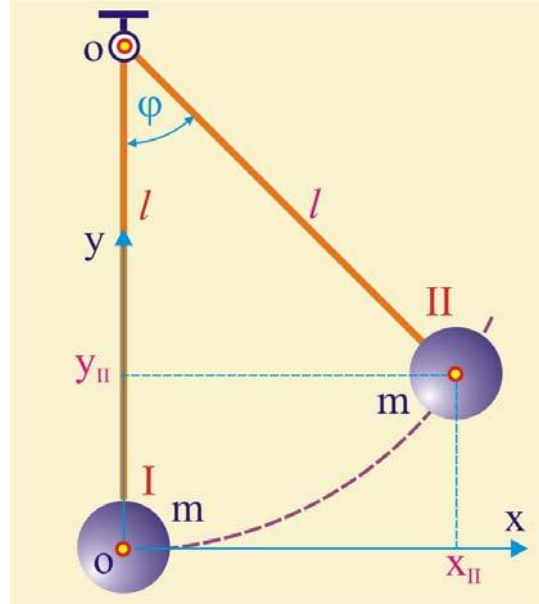


Рис. 2. Выбор обобщённой координаты

$$\delta \vec{r}_k = \sum_{j=1}^{j=s} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j, \quad (k=1,2,\dots,n). \quad (8)$$

Подставим значение $\delta \vec{r}_k$ из уравнения (8) в уравнение (7)

$$\delta A = \sum_{k=1}^{k=n} \vec{F}_k \cdot \sum_{j=1}^{j=s} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j, \quad (9)$$

и поменяем порядок суммирования

$$\delta A = \sum_{j=1}^{j=s} \left(\sum_{k=1}^{k=n} \vec{F}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) \delta q_j. \quad (10)$$

Введём обозначения

$$Q_j = \sum_{k=1}^{k=n} \vec{F}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}, \quad (j=1,2,\dots,s). \quad (11)$$

Виртуальную работу, таким образом, можно представить следующим образом

$$\delta A = \sum_{j=1}^{j=s} Q_j \delta q_j = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_s \delta q_s. \quad (12)$$

Величина Q_j называется обобщённой силой, которая в общем случае по размерности не совпадает с обычными силами, её размерность зависит от соответствующей обобщённой координаты. Если обобщённая координата измеряется в линейных единицах (в метрах), то размерность обобщённой силы совпадает с размерностью традиционной силы, если, как в случае математического маятника, обобщённая координата измеряется в угловых единицах, то обобщённая сила будет иметь размерность момента, т.е. Н·м.

Обобщённые силы можно вычислить тремя способами. Во-первых, можно непосредственно воспользоваться уравнением (12), представив его в скалярной форме

$$Q_j = \sum_{k=1}^{k=n} \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right), \quad (13)$$

где $\{F_{kx}, F_{ky}, F_{kz}\}$ – проекции силы $\vec{F}_k$ на оси декартовой системы координат. Во-вторых, обобщённые силы могут быть вычислены последовательно. При вычислении Q_1 анализируется такое виртуальное перемещение, при котором вариации обобщённых координат кроме δq_1 равны нулю

$$\delta q_1 \neq 0, \delta q_2 = \delta q_3 = \dots = \delta q_s = 0. \quad (14)$$

Третий способ применим только для консервативных (потенциальных) сил, к каковым относятся силы тяжести. В этом случае проекции сил могут быть выражены через потенциальную энергию Π

$$F_{kx} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_k}, \quad F_{ky} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_k}, \quad F_{kz} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_k}. \quad (15)$$

Подставим значения проекций сил из уравнения (15) в уравнение (13)

$$Q_j = -\sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_k} \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right), \quad (16)$$

откуда следует, что

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad (j=1,2,\dots,s). \quad (17)$$

Обобщённая сила консервативной системы равна частной производной потенциальной энергии по соответствующей обобщённой координате, взятой с обратным знаком.

Условия равновесия консервативной системы через обобщённые координаты представляются следующим образом

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2}, \dots, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_s}. \quad (18)$$

При анализе колебательных систем часто используется общее уравнение динамики. Рассмотрим некую систему n материальных точек, движение которой ограничено h удерживающими и голономными связями. Используя принцип освобождения, связи можно заменить их реакциями, т.е. все действующие активные силы и реакции связи, приложенные к некоторой точке M_k , принадлежащей системе, свести путём суммирования к двум векторам $\{\vec{F}_k, \vec{R}_k\}$. Второй закон Ньютона для данной точки примет традиционный вид

$$m_k \vec{a}_k = \vec{F}_k + \vec{R}_k, \quad (19)$$

где $\vec{a}_k$ – вектор ускорения точки M_k . Преобразуем последнее уравнение к виду

$$\vec{F}_k - m_k \vec{a}_k + \vec{R}_k = 0, \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (20)$$

Мысленно зафиксируем момент времени t и дадим системе виртуальное перемещение $\delta \vec{r}_k$. Умножим уравнения (20) скалярно на $\delta \vec{r}_k$ и сложим их почленно

$$\sum_{k=1}^{k=n} (\vec{F}_k - m_k \vec{a}_k) \cdot \delta \vec{r}_k + \sum_{k=1}^{k=n} \vec{R}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0. \quad (21)$$

По определению идеальных связей суммарная работа реакций связи равна нулю, поэтому

$$\sum_{k=1}^{k=n} (\vec{F}_k - m_k \vec{a}_k) \cdot \delta \vec{r}_k = 0. \quad (22)$$

Это уравнение называется **общим уравнением динамики**: при движении материальной системы с идеальными и удерживающими связями работа всех активных сил $\vec{F}_k$ и сил инерции $(-m_k \vec{a}_k)$ на любом виртуальном перемещении равна нулю. Общее уравнение динамики позволяет получить дифференциальные уравнения движения, не содержащие реакции связи. Это уравнение оправдывает своё использование для сравнительно простых систем. Для сложных систем применяется **уравнение Лагранжа второго рода**, являющиеся следствием общего уравнения динамики.

Подставим в уравнение (22) значение $\delta \vec{r}_k$ из уравнения (8)

$$\sum_{k=1}^{k=n} \left(\vec{F}_k - m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} \right) \cdot \sum_{j=1}^{j=s} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j = 0. \quad (23)$$

Умножим последнее уравнение на -1 , изменим порядок суммирования и разделим сумму на три части

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=n} \left(m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} - \vec{F}_k \right) \cdot \sum_{j=1}^{j=s} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j &= \sum_{j=1}^{j=s} \sum_{k=1}^{k=n} \left(m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} - \vec{F}_k \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j = \\ &= \sum_{j=1}^{j=s} \left(\sum_{k=1}^{k=n} m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^{k=n} \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) \cdot \delta q_j = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Используя далее уравнение обобщённых сил (11), получим

$$\sum_{j=1}^{j=s} \left(\sum_{k=1}^{k=n} m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} - Q_j \right) \cdot \delta q_j = 0. \quad (25)$$

Преобразуем выражение, стоящее под знаком суммы к следующему виду

$$m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(m_k \vec{v}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) = -m_k \vec{v}_k \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}. \quad (26)$$

Выразим вектор скорости, как производную по времени радиус-вектора

$$\vec{v}_k = \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_j + \dots + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}, \quad (27)$$

где $\dot{q} = dq/dt$ – обобщённая скорость. Подставляя величину скорости из уравнения (27) в уравнение (23) и проводя преобразования, получим

$$\sum_{j=1}^{j=s} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_k v_k^2}{2} - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_k v_k^2}{2} - Q_j \right) = 0. \quad (28)$$

С учётом того, что величина

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_k v_k^2}{2} = K, \quad (29)$$

представляет собой кинетическую энергию системы, общее уравнение динамики можно переписать следующим образом

$$\sum_{j=1}^{j=s} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} - Q_j \right) \cdot \delta q_j = 0. \quad (30)$$

Ввиду независимости обобщённых координат друг от друга и произвольности их вариаций, последнее уравнение примет окончательный вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}. \quad (31)$$

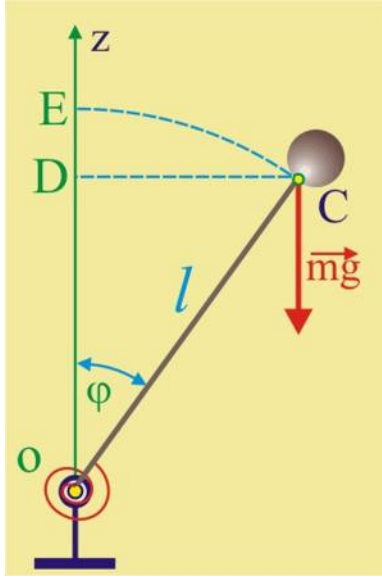


Рис. 3. Маятник с пружиной

Покажем методику применения уравнения Лагранжа второго рода на примере анализа колебательной системы маятника со спиральной пружиной (рис. 3). Рассматриваемая колебательная система имеет одну степень свободы, в качестве обобщённой координаты уместно использовать угол отклонения стержня φ . У рассматриваемой системы два положения статического равновесия. В верхнем вертикальном положении стержня пружина не деформирована.

Потенциальная энергия системы складывается из энергии деформированной пружины Π_2 и энергии силы тяжести Π_1 . Примем за нулевое значение потенциальной энергии в вертикальном положении маятника, тогда при переходе маятника в промежуточное положение энергия силы тяжести запишется как

$$\Pi_1 = A_1 = -mgDE = -mg\ell(1 - \cos \varphi). \quad (32)$$

Потенциальная энергия пружины в общем случае определяется коэффициентом её жёсткости k и углом закручивания φ

$$\Pi_2 = -k \int_{\varphi}^0 \varphi d\varphi = \frac{k\varphi^2}{2}. \quad (33)$$

Суммарная потенциальная энергия определится как

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = mg \cos \varphi + \frac{k\varphi^2}{2} - mg\ell. \quad (34)$$

Условие равновесия системы запишется следующим образом

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0, \Rightarrow -mg\ell \sin \varphi + k\varphi = 0. \quad (35)$$

Полученные соотношения дают возможность определить параметры системы, при которых будет иметь место состояние равновесия. Предположим, что требуется обеспечить равновесие маятника при φ_0

$$k\varphi_0 - mg\ell \sin \varphi_0 = 0, \quad (36)$$

откуда

$$\frac{mg\ell}{k} = \frac{\varphi_0}{\sin \varphi_0}. \quad (37)$$

Если требуется, чтобы пружина удерживала маятник, когда угол с вертикалью составляет $\pi/2$, то

$$\frac{mg\ell}{k} = \frac{\pi}{2}. \quad (38)$$

Естественно, что рассмотренный выше пример относится к частному случаю положения колебательной системы. В общем случае теория колебаний исследует изменение во времени

обобщённых координат, в качестве которых используют углы, давления, температуру, электрическое напряжение, скорость и т.д., в зависимости от особенностей колебательной системы. Особое внимание уделяется тем из параметров, которые демонстрируют периодические свойства [4]

$$q(t) = q(t + T), \quad (39)$$

где T – постоянная для данного процесса величина, показывающая время через которое повторяется значение обобщённой координаты и называется **периодом колебаний**. Величина обратная периоду называется **частотой колебаний**

$$f = \frac{1}{T}, \quad (40)$$

которая измеряется в герцах. Так, например, частота $f = 10$ Гц показывает, что происходит 10 полных колебаний за 1 с. Наряду с частотой, частотой f используется, так называемая **круговая или циклическая частота**

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}. \quad (41)$$

Максимальное значение обобщённой координаты, периодически изменяющейся во времени называется амплитудой колебательного процесса, т.е. амплитуда представляет половину полного изменения обобщённой координаты за один период колебаний. При минимальном значении координаты $q_{\min}$ и максимальном $q_{\max}$, в течение периода, амплитуда определяется как

$$A = \frac{q_{\max} - q_{\min}}{2}. \quad (42)$$

Среднее значение за период обобщённой координаты определяется соотношением

$$q_0 = \frac{q_{\max} + q_{\min}}{2}. \quad (43)$$

В случае симметричных колебаний значение q_0 соответствует положению равновесия или состоянию покоя. Если функция $q(t)$ удовлетворяет условию периодичности не в полной мере, то говорят о квазипериодических (почти периодических) процессах, при этом

$$|q(t) - q(t + T)| < \varepsilon, \quad (44)$$

где ε заданная условием конкретной задачи малая величина. Геометрически колебания изображаются в виде зависимости $q(t)$, подобные зависимости широко используются во всякого рода регистрирующей аппаратуре механического и электронного принципа действия (рис. 4).

Колебания принято классифицировать по форме зависимости обобщённой координаты от времени. На рис.5 показаны наиболее часто встречающиеся на практике: 1 – треугольные симметричные; 2 – пилообразные (треугольные колебания несимметричной формы); 3 – прямоугольные импульсные колебания; 4 – косинусоидальные (синусоидальные колебания); 5 – косинусоидальные затухающие колебания. Следует отметить, что функции синуса и косинуса удобно применять для приближённого описания колебательных процессов в случаях, когда форма колебаний носит не совсем синусоидальный характер. В случае, когда обобщённая координата при колебательном процессе изменяется по закону синуса её принято описывать уравнением

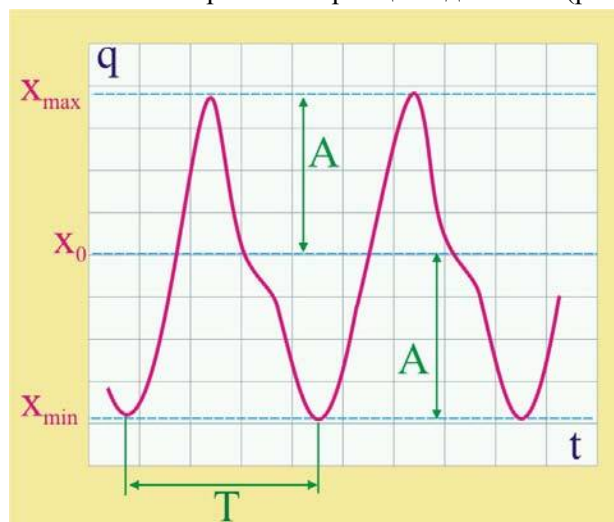


Рис. 4. Зависимость координаты от времени

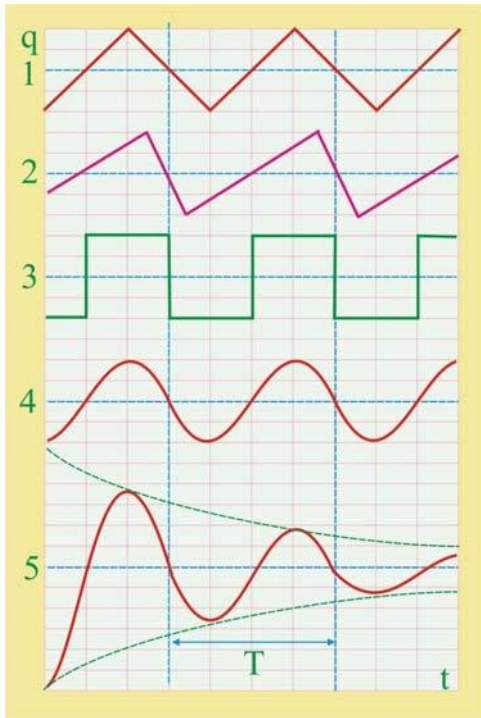


Рис. 5. Простые формы колебаний

$$\begin{aligned} q(t) &= q_0 + A \sin \omega t; \\ q(t) &= q_0 + A \sin 2\pi ft; \\ q(t) &= q_0 + A \sin \frac{2\pi t}{T}. \end{aligned} \quad (45)$$

Для графического изображения синусоидальных колебаний используется аналогия между колебательным процессом и равномерным вращением по круговой траектории. Если диск радиуса A с постоянной угловой скоростью ω вращается вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости чертежа. Если на ободе диска выделить некоторую произвольную точку и снабдить её радиус-вектором, то временная зависимость координаты y от времени представится уравнением

$$y = A \sin \omega t. \quad (46)$$

В данном случае ω будет одновременно являться угловой скоростью вращения и циклической частотой изменения радиус-вектора рассматриваемой точки. Если последовательное положение этой точки на ободе перенести на плоскость с координатами y и t , но по оси ординат откладывать угол α , соответствующий каждому моменту времени, то выстроится синусоида (рис. 6).

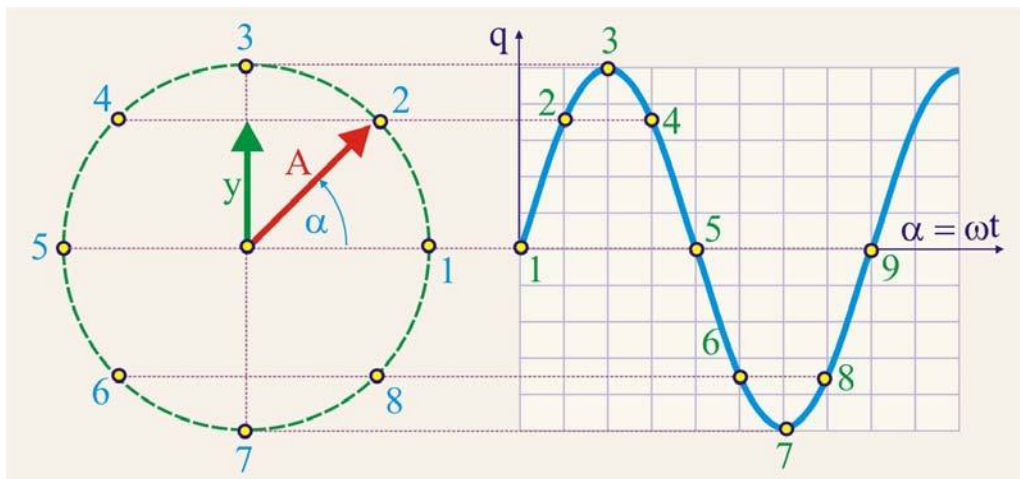


Рис. 6. Аналогия колебаний и равномерного вращения

При выполнении анализа гармонических колебаний целесообразно рассматривать их в виде переменных во времени векторов на комплексную плоскость

$$z = y + ix.$$

Вращающийся вектор $\vec{A}$ в этом случае можно представить следующим уравнением

$$z = A e^{i\omega t} = A(\cos \omega t + i \sin \omega t). \quad (47)$$

Если по условию задачи задано начальное положение колеблющейся точки, т.е. начальное угловое положение, то уравнение колебаний запишется так

$$y = A \cos(\omega t - \varphi_0). \quad (48)$$

Величина $(\omega t - \varphi_0)$ называется фазой колебаний, а φ_0 – начальной фазой колебаний.

Гармоническое колебание произвольной формы с произвольным фазовым углом представляют обычно в виде набора синусоидальных и косинусоидальных составляющих

$$y = A \cos \varphi_0 \cos \omega t + A \sin \varphi_0 \sin \omega t,$$

(49)

или

$$y = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t. \quad (50)$$

Из уравнения (48) следует, что

$$A_1 = A \cos \varphi_0; \quad A_2 = A \sin \varphi_0, \quad (51)$$

поэтому

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_2}{A_1}. \quad (52)$$

Если векторы $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ имеют произвольные значения начальных фаз, то уравнения (52) приобретают вид суммирования двух векторов по правилу параллелограмма или векторного многоугольника (рис. 7). Модуль и направление результирующего вектора будут определяться известными из тригонометрии уравнениями

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{2(0)} - \varphi_{1(0)})}, \quad (53)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_{1(0)} + A_2 \sin \varphi_{2(0)}}{A_1 \cos \varphi_{1(0)} + A_2 \cos \varphi_{2(0)}}. \quad (53)$$

Из уравнений (53) и (54) очевидно, что результирующее колебание происходит с той же частотой, но с изменёнными амплитудой и фазой. В случае сложения колебаний неодинаковых частот с нулевой начальной фазой, они представляются в виде

$$y = y_1 + y_2 = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t,$$

$$y = \frac{A_1 + A_2}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) + \frac{A_1 - A_2}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t). \quad (54)$$

Последнее уравнение подлежит тригонометрическому преобразованию

$$y = \left[(A_1 + A_2) \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right] \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \left[(A_1 - A_2) \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right] \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t. \quad (55)$$

Уравнение (55) можно записать в более компактном виде

$$y = A^* \cos(\omega_m t + \varphi^*),$$

(56)

если принять обозначения

$$A^* = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \omega_d t}, \quad (57)$$

$$\omega_m = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}; \quad \omega_d = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}, \quad (58)$$

$$\operatorname{tg} \varphi^* = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \operatorname{tg} \omega_d t. \quad (59)$$

На рис. 8 приведен результат сложения двух гармонических колебаний близких частот, т.е. **биений**. Частота ω_m представлена пунктирной огибающей, которая является так же периодической функцией, амплитуда которой меняется в пределах

$$|A_1 - A_2| \leq A^* \leq A_1 + A_2. \quad (60)$$

Величина амплитуды основного колебания происходит с частотой $2\omega_d$ и является амплитудно-модулированным коле-

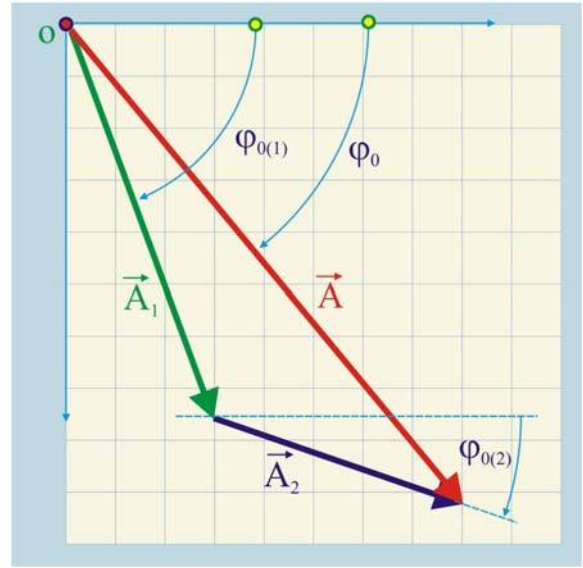


Рис. 7. Сложение векторов двух колебаний одинаковой частоты

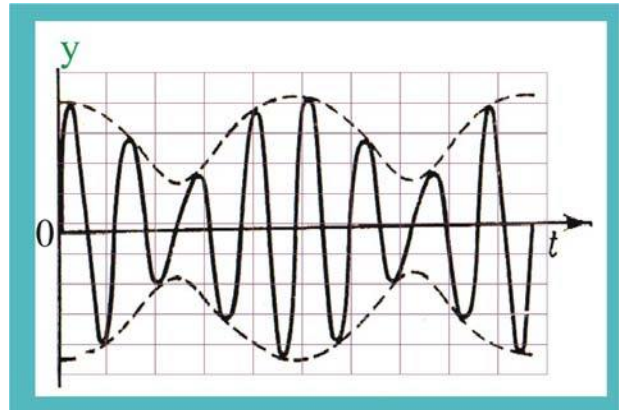


Рис. 8. Форма колебаний при близких частотах и амплитудах [4]

вание с несущей частотой ω_m и частотой модуляции $2\omega_d$.

Для наглядного представления негармонических колебаний применяется способ их представления в фазовой плоскости, которая, по сути, представляет собой зависимость скорости от одноимённой координаты

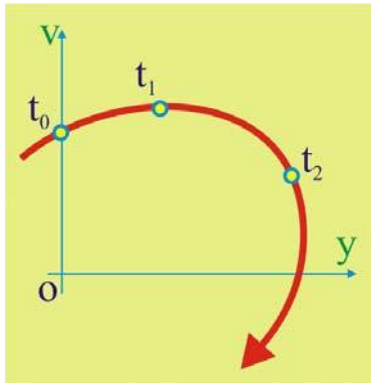


Рис. 9. Фазовая траектория

$$v_y = f(y) = \frac{dy}{dt} = \dot{y}. \quad (61)$$

Изображающая точка с течением времени перемещается по кривой, которая называется фазовой траекторией, время в данной ситуации выступает в качестве параметра (рис. 9). Несмотря на то, что фазовое представление колебаний уступает в наглядности зависимости координат от времени, фазовый портрет представляет некоторые важные возможности, которые не могут быть реализованы при традиционном способе представления процессов.

Рассмотрим эти возможности на примере гармонических колебаний

$$y = A \cos(\omega t - \varphi_0); \quad v_y \equiv \dot{y} = -A\omega \sin(\omega t - \varphi_0). \quad (62)$$

С целью исключения из уравнений (62) времени, возведём их в квадрат и почленно сложим

$$\frac{y^2}{A^2} + \frac{v_y^2}{A^2\omega^2} = 1. \quad (63)$$

Фазовым портретом такого колебания будет являться эллипс с полуосями A и $A\omega$.

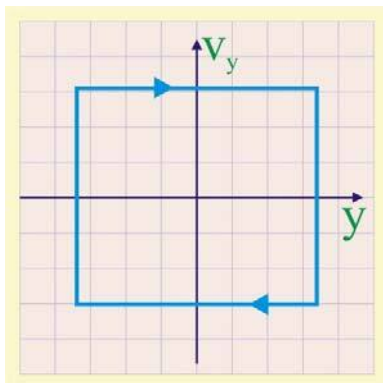


Рис. 10. Фазовая траектория треугольных колебаний

Для треугольных колебаний (рис. 5,1) фазовая траектория будет иметь форму прямоугольника (рис. 10). Видно, что при треугольной форме колебаний скорость процесса имеет четыре участка, на которых модуль остаётся постоянным. Если уравнение фазовой траектории сложно получить из уравнений движения, то прибегают к интегрированию. Предположим, что уравнение скорости колебательно-го процесса задано в общем виде

$$v_y = \frac{dy}{dt}.$$

Разделим переменные в этом дифференциальном уравнении

$$dt = \frac{dy}{v_y}; \quad \Rightarrow \quad t = \tau + \int_0^y \frac{dy}{v_y}.$$

(64)

Выразим далее из уравнения (63) скорость

$$v_y = \omega \sqrt{A^2 - y^2},$$

подставим это значение в уравнение (64)

$$T = 2 \int_{-A}^A \frac{dy}{\omega \sqrt{A^2 - y^2}} = \frac{2}{\omega} \arcsin \frac{y}{A} \Big|_{-A}^A = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (65)$$

Фазовые траектории для всех типов колебаний в верхней полуплоскости может проходить, только слева направо, в нижней полуплоскости наоборот – справа налево, т.е. в верхней полуплоскости $v > 0$, т.е. функция $y = f(t)$ – возрастающая, а в нижней плоскости – наоборот: $v < 0$, а $y = f(t)$ является убывающей функцией. Кроме того, все фазовые траектории в точках пересечения с осью абсцисс имеют вертикальные касательные, т.е. в этих точках $v = 0$ а смещение y приобретает стационарное амплитудное значение.

Как видно из приведенных данных частот колебаний (табл.1), обнаруженные к настоящему времени процессы, отличаются по продолжительности одного периода на три-

дцать порядков. Несмотря на столь широкие диапазоны частот, и периодов колебаний, можно сформулировать некоторые отличительные особенности этого типа движения.

1. Как было отмечено ранее, для теории колебаний не типичен вопрос о том, что в данный момент времени и в данной точке происходит. Теория колебаний главным образом устанавливает общий характер процесса.

2. **Появление колебаний связано с тем, какой тип равновесия из возможных имеет рассматриваемая материальная система, устойчивое или не устойчивое или безразличное.** На рис. 11 приведена схема возможных условий равновесия: в положениях 1 и 3 небольшое сферическое тело находится в состоянии безразличного равновесия, любое из возможных перемещений не приведёт к изменению его механического состояния, центр масс этого тела всегда будет находиться на фиксированном расстоянии от опорной плоскости. Положение тела 2 характеризуется как неустойчивое. При возможном перемещении из положения 2, тело станет двигаться в состояние минимизации потенциальной энергии, пока не достигнет горизонтальной прямой, т.е. пока тело не займёт положение 1 или 3. Система сил, соответствующая рассматриваемой ситуации показана на рис.12.1, возникающая результирующая сила $\vec{F}_1$, будет стремиться сместить тело из положения равновесия.

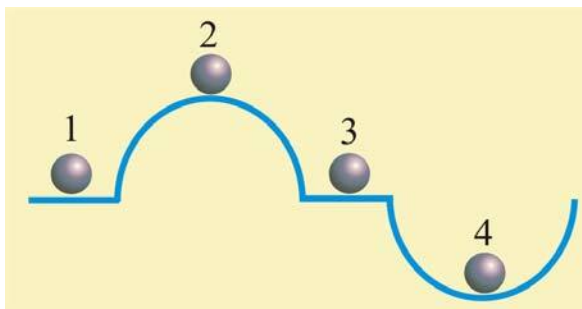


Рис. 11. Типы равновесия

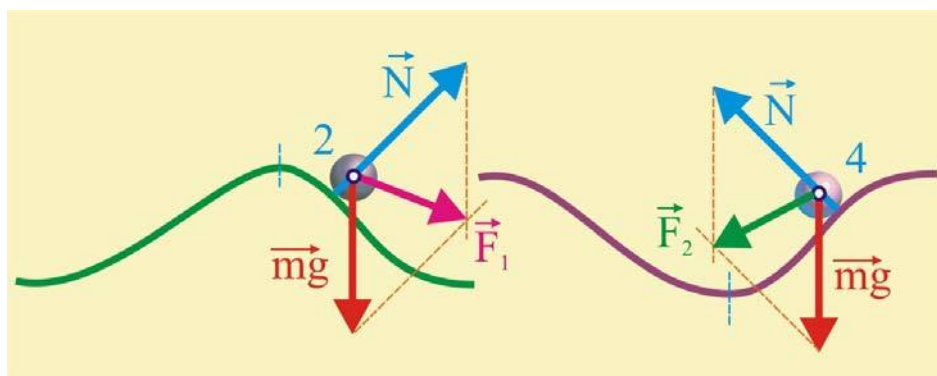


Рис. 12. Условия возникновения колебаний

В положении 4 ситуация меняется, при смещении тела из положения равновесия возникает сила $\vec{F}_2$, которая стремится вернуть тело в первоначальное равновесное состояние. Сила $\vec{F}_2$ называется возвращающей силой. **Возникновение возвращающей силы является обязательным условием возникновения колебательного процесса.**

3. Любой тип колебательного движения происходит с ускорением, так как сопровождается изменениями направлений. Наличие же ускорения, в полном соответствии со вторым законом Ньютона свидетельствует о наличии некой силы.

4. Динамические и кинематические параметры колебательных движений повторяют свои значения через определённые промежутки времени, равные периоду колебаний.

Из школьного курса физики известны две самые простые колебательные системы, математический маятник и пружинный маятник (рис. 13), которые совершают **свободные собственные не зату-**

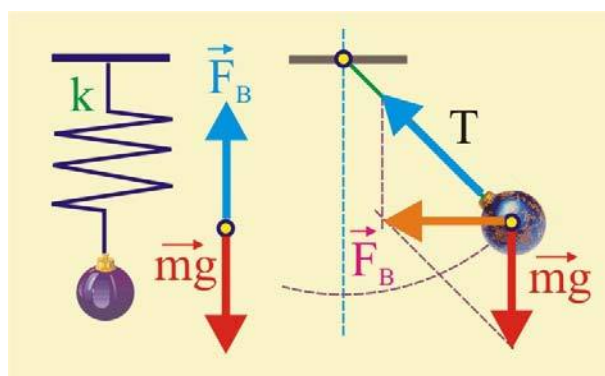


Рис. 13. Возвращающие силы

хающие колебания. Эти колебания происходят по гармоническому закону, т.е. их кинематические и динамические характеристики описываются периодическими функциями синуса или косинуса. Возникновение колебаний становится возможным, потому что при отклонении массы из положения равновесия возникает возвращающая сила $\vec{F}_B$. В случае пружинного маятника она обусловлена упругостью пружины $F_B = |k \cdot \Delta y|$, а в случае математического маятника возвращающая сила является результатом геометрической суммы силы тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения нити $\vec{T}$.

Как выяснится далее эти две системы, как в прочем и многие другие, подобные им, описываются одинаковыми дифференциальными уравнениями, независимо от сути происходящих процессов, будь то колебания маятника или биологические процессы внутри живой клетки. Это обстоятельство позволяет записать для них типичные **уравнения движения** (уравнения смещения массы)

$$\begin{aligned} y &= y_0 \sin(\omega t + \varphi_0), & y &= y_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \\ y &= A \sin(\omega t + \varphi_0), & y &= A \cos(\omega t + \varphi_0), \end{aligned} \quad (66)$$

где y – смещение [м], $y_0 \equiv A$ – амплитуда колебаний [м], ω – циклическая частота [рад/с], φ_0 – начальная фаза колебаний [рад], $(\omega t + \varphi_0)$ – фаза колебаний [рад].

Скорость и ускорение колебательного процесса определяются, так же как и для любого другого движения, т.е. в виде соответствующих производных по времени уравнения движения (66).

Период изменения этих величин будет совпадать с периодом изменения смещения

$$v \equiv \dot{y} \equiv \frac{dy}{dt} = \frac{d[A \sin(\omega t + \varphi_0)]}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0); \quad (67)$$

$$v_{\max} = \dot{y}_{\max} = A\omega.$$

$$a \equiv \ddot{y} \equiv \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 y(t);$$

$$a_{\max} \equiv \ddot{y}_{\max} = -\omega^2 A. \quad (68)$$

Полученные уравнение показывают, что скорость и ускорение так же, как и смещение, описываются гармоническими законами, причём скорость сдвинута относительно смещения по фазе на $\pi/2$, а ускорение имеет противоположный смещению знак.

Вернёмся к уравнениям колебательного движения. Для пружинного маятника возвращающую силу можно записать так

$$F = ma = -m\omega^2 x = -kx, \quad (69)$$

где $k = \omega^2 m$ – коэффициент, определяемый параметрами колебательной системы. Направление силы совпадает с направлением ускорения и противоположно смещению, т.е. сила во все времена движения направлена к положению равновесия.

На основании (69) возможно определить циклическую частоту и период колебаний для пружинного маятника

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (70)$$

Для математического маятника аналогичные уравнения имеют вид

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}, \quad (71)$$

где ℓ – длина нити подвеса груза маятника, g – ускорение свободного падения.

1. Собственные колебания без потерь

1.1. Горизонтальные колебания массы, соединённой с пружиной

Записанные выше уравнения движения для простейших колебательных систем можно получить двумя способами. Путём анализа действующих на массу сил, или, развивая энергетический анализ процесса.

Получим в начале уравнение движения массы, скреплённой с горизонтальной пружиной на основе анализа действующей системы сил (рис. 1.1). Горизонтальная пружина удобна тем, что позволяет не учитывать действие силы тяжести. Будучи смещённой из положения статического равновесия O в положение B , масса оказывается под действием системы сил

$$\{m\vec{g}; \vec{N}; \vec{F}_{\text{возвр}} \equiv \vec{F}_{\text{упр}} = -kx\},$$

причём сила тяжести и нормальная реакция связи, могут не учитываться при дальнейшем рассмотрении, их работа на перемещении вдоль оси ox равна нулю, т.к. обе эти силы перпендикулярны направлению перемещения,

$$\delta A = m\vec{g} \cdot d\vec{x} \cdot \cos(\vec{i}; m\vec{g}) = 0.$$

На направление движения будет иметь проекцию отличную, от нуля, только возвращающая сила, обусловленная, в данном случае, упругостью пружины. Уравнение второго закона Ньютона в проекции на горизонтальную ось, таким образом, запишется так

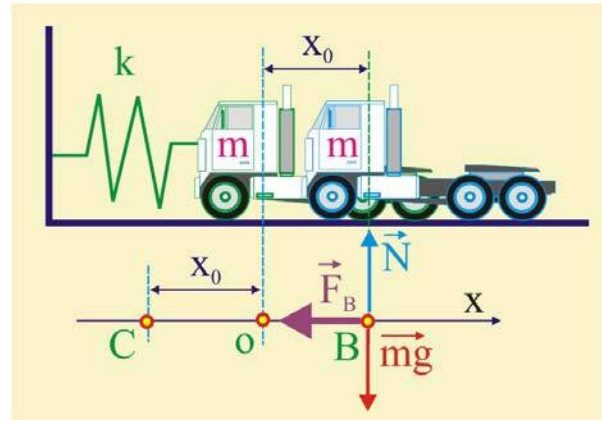


Рис. 1.1. Горизонтальные колебания

$$\sum_{i=1}^{i=n} F_{kx} = m\ddot{x}; \quad -F_B = m\ddot{x}; \quad -kx = m\ddot{x},$$

где k – коэффициент жёсткости пружины. Преобразуем последнее уравнение к виду

$$m\ddot{x} + kx = 0; \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

(1.1)

Для придания уравнению (1.1) вида одного из известных типов дифференциальных уравнений, введём обозначение

$$\frac{k}{m} = \omega^2; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (1.2)$$

и перепишем (1.1) в виде

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

(1.3)

Полученное линейное дифференциальное уравнение второго порядка без свободного члена имеет известное из высшей математики общее решение

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \quad (1.4)$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий. Предположим, что в начальный момент времени при $t = 0$ задано начальное положение массы $x = x(0)$ и начальная скорость $\dot{x}(0)$. Определим проекцию скорости на направление движения

$$v_x \equiv \dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t. \quad (1.5)$$

Образует из уравнений (1.4) и (1.5) систему

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t; \\ \dot{x} &= -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Подставим с уравнения системы (1.6) начальные условия

$$\begin{aligned} x(0) &= C_1 \cos \omega \cdot 0 + C_2 \sin \omega \cdot 0, \Rightarrow C_1 = x(0); \\ \dot{x}(0) &= C_1 \omega \sin \omega \cdot 0 + C_2 \omega \cos \omega \cdot 0, \Rightarrow C_2 = \frac{\dot{x}(0)}{\omega}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

С учётом значений постоянных интегрирования решение (1.4) перепишется следующим образом

$$x = x(0) \cos \omega t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \sin \omega t. \quad (1.8)$$

Уравнение (1.8) представляет собой закон движения массы, соединённой с горизонтальной пружиной без учёта сопротивления среды и силы трения. Если движение будет начинаться без начальной скорости, т.е. $\dot{x}(0) = 0$, то закон движения примет вид

$$x = x_0 \cos \omega t. \quad (1.9)$$

При наличии начальной фазы колебаний уравнение (1.9) можно переписать следующим образом

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (1.10)$$

Уравнение (1.10) справедливо для всех систем, совершающих свободные собственные не затухающие колебания. Различные системы будут иметь разные выражения для ω^2 . Квадрат циклической частоты в рассматриваемых случаях является возвращающей силой, приходящейся на единицу массы и единицу смещения.

Существует несколько равноправных форм записи уравнений, с использованием разных обозначений кинематических параметров

$$\begin{aligned} x &= A \sin(\omega t + \varphi_0) \equiv x_0 \sin(\omega t + \varphi_0); \\ x &= x_{\max} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0\right); \quad x = A \sin(2\pi \nu t + \varphi_0) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Так, например, уравнение движения массы, совершающей колебания на вертикальной пружине не отличаются от (1.11), необходимо только учесть статическое удлинение пружины под действием силы тяжести

$$k \cdot \Delta x_{\text{ст}} = mg \Rightarrow \Delta x_{\text{ст}} = \frac{k}{mg}; \quad (1.12)$$

При вертикальных колебаниях сместится только центр колебаний.

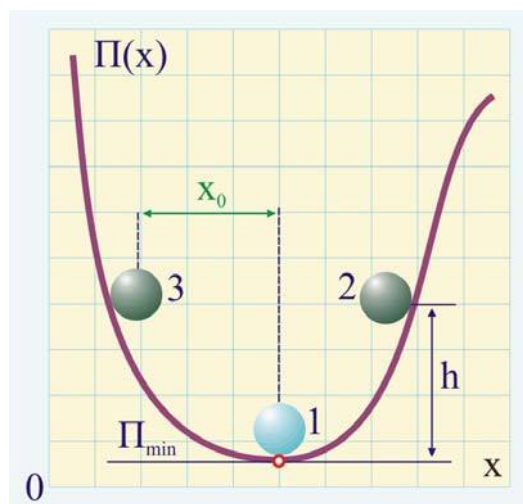


Рис. 1.2. Потенциальная энергия

А теперь получим дифференциальное уравнение колебаний маятника на основе анализа движения с энергетических позиций. Это удобно сделать на примере частицы известной массы, находящейся в потенциальной яме. Прекрасной моделью такой системы может служить металлический шарик внутри криволинейной поверхности (рис.1.2). При смещении массы из состояния равновесия из положения 1 в положение 2 система приобретает запас потенциальной энергии. Если шарик считать материальной точкой, а положение статического равновесия 1 совместить с минимальным значением потенциальной энергии, то

$$P_2 = mgh. \quad (1.13)$$

Если далее шарик отпустить без начальной скорости, то он начнёт двигаться в сторону минимизации потенциальной энергии, причём по мере опускания шарика относительно нулевого уровня потенциальной энергии, будет происходить её трансформация в кинетическую энергию. В точке 1 потенциальная энергия станет равной нулю, шарик будет обладать только кинетической энергией, которая затем снова начнёт преобразовываться в потенциальную энергию. В точке 3 энергия шарика снова станет только потенциальной. Если пренебречь потерями на сопротивление и трение, то шарик будет бесконечно долго перемещаться внутри потенциальной ямы, совершая гармонические собственные незатухающие колебания.

Применительно к массе, скреплённой с горизонтальной пружиной (рис.1.1) изменение потенциальной энергии определится уравнением

$$\Pi = \frac{kx^2}{2}, \quad (1.14)$$

величина x в конкретном случае зависит от положения массы, которая будет совершать движение в пределах потенциальной ямы. Потенциальную яму любой формы можно представить в виде функции смещения, аппроксимируя её степенным рядом

$$\Pi(x) = ax^2 + bx^3 + cx^4 + \dots,$$

При малых отклонениях $x^2 \gg x^3 \gg x^4$, с учётом этого $\Pi(x) \cong ax^2$.

В рассматриваемом случае, при растяжении и сжатии пружины, её потенциальная энергия будет равна

$$\Pi(x) = \frac{kx^2}{2}, \text{ или } ax^2 = \frac{kx^2}{2}, \Rightarrow a = \frac{k}{2}. \quad (1.15)$$

Проекция действующей силы для консервативных механических систем связана с потенциальной энергией известным соотношением

$$F_x = -\frac{\partial \Pi(x)}{\partial x} = -2ax = -kx; \quad (1.16)$$

Уравнение (1.16) совпадает с ранее введённым значением возвращающей силы. Перепишем (1.16) следующим образом

$$F_x = -kx, \quad m\ddot{x} + kx = 0, \quad m\ddot{x} + \omega^2 mx = 0,$$

или окончательно

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

что аналогично с уравнению (1.3).

Рассмотрим далее энергетические особенности гармонических незатухающих собственных колебаний.

Отметим, что упругая сила относится к консервативным силам, работа которых не зависит от вида траектории, а определяется только положением начальной и конечной точки, т.е. для массы, соединённой с горизонтальной пружиной можно записать

$$\oint_L \vec{F}_{\text{упр}} d\vec{\ell} = 0. \quad (1.17)$$

Полная энергия колеблющейся массы должна оставаться постоянной, т.е. справедлив закон сохранения энергии. В процессе колебаний происходит преобразование потенциальной энергии в кинетическую энергию. На дне потенциальной ямы (рис.1.2) масса обладает только кинетической энергией, которая имеет максимальной значение. В крайних положениях массы энергия имеет потенциальный характер

$$E_{2,3} = \Pi_{\max} = \frac{kx_0^2}{2}, \quad E_1 = K_{\max} = \frac{m\dot{x}_0^2}{2} = \frac{mx_0^2\omega^2}{2}. \quad (1.18)$$

Установим закон изменения кинетической и потенциальной энергии в случае гармонического колебания, для этого перепишем (1.18) с учётом (1.10)

$$K(t) = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{mx_0^2\omega^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi_0), \quad (1.19)$$

$$\Pi(t) = \frac{kx^2}{2} = \frac{kx_0^2}{2} \cos^2(\omega t + \varphi_0), \quad (1.20)$$

Заменяя в уравнении (1.20) k на $m\omega^2$, и складывая (1.19) с (1.20) получим

$$E = K + \Pi = \frac{kx_0^2}{2} = \frac{mx_0^2\omega^2}{2}, \quad \langle E \rangle = \frac{E}{2}. \quad (1.21)$$

Периодичность изменения энергии установим, переписав (1.19) и (1.20) в соответствии с тригонометрическими правилами

$$K(t) = K_{\max} \sin^2(\omega t + \varphi_0) = K_{\max} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2(\omega t + \varphi_0) \right], \quad (1.22)$$

$$\Pi(t) = \Pi_{\max} \cos^2(\omega t + \varphi_0) = \Pi_{\max} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(\omega t + \varphi_0) \right], \quad (1.23)$$

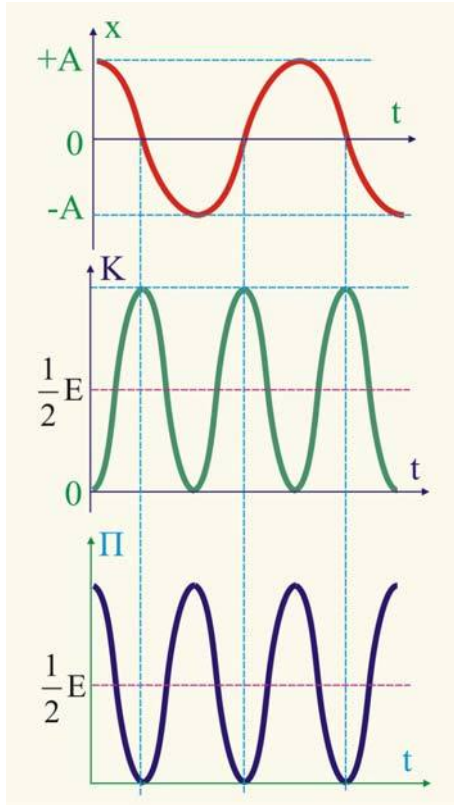


Рис. 1.3. Зависимость смещения и энергии от времени

очевидно, что **кинетическая и потенциальная энергии изменяются с частотой 2ω , в два раза превышающей частоту колебаний**. В моменты амплитудного значения смещения кинетическая энергия обращается в нуль, а полная энергия колебаний равна наибольшему значению потенциальной энергии (рис. 1.3)

$$E = \Pi_{\max} = \frac{kA^2}{2}. \quad (1.24)$$

При прохождении системой положения равновесия при $x = 0$, полная энергия является кинетической

$$E = K_{\max} = \frac{mA^2\omega^2}{2}. \quad (1.25)$$

Разумеется, что в отсутствие сопротивления значение максимальной кинетической энергии совпадает со значением максимальной потенциальной энергии колебательной системы.

Средние значения кинетической энергии $\langle K \rangle$ и потенциальной $\langle \Pi \rangle$ равны половине полной энергии

$$\langle K \rangle = \langle \Pi \rangle = \frac{E}{2} = \frac{kA^2}{4}. \quad (1.26)$$

1.2. Уравнение свободных колебаний в обобщённых координатах

Уравнение свободных колебаний в общем виде можно получить на основе уравнения Лагранжа второго рода, о котором говорилось во введении (31)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial K}{\partial q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q}. \quad (1.27)$$

Образует уравнение кинетической энергии [4]

$$K = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} m_k \vec{v}_k \vec{v}_k. \quad (1.28)$$

Пусть положение некой точки консервативной системы m_k с радиус-вектором $\vec{r}_k$ однозначно определяется обобщённой координатой q , в этом случае

$$\vec{v}_k = \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q} \dot{q}. \quad (1.29)$$

Уравнение кинетической энергии (1.28) с учётом значения скорости через обобщённую координату примет вид

$$K = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} m_k \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q} \right)^2 \dot{q}^2 = \frac{1}{2} \dot{q}^2 \sum_{k=1}^{k=n} m_k \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q} \right)^2. \quad (1.30)$$

Сумма, входящая в последнее уравнение является функцией обобщённой координаты

$$\sum_{k=1}^{k=n} m_k \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q} \right)^2 = f(q). \quad (1.31)$$

Разложим эту функцию в ряд Маклорена в окрестности значения $q = 0$

$$f(q) = f(0) + f'(0)q + \frac{f''(0)}{2}q^2 + \dots, \quad (1.32)$$

где $f'(0)$ и $f''(0)$ – первая и вторая производные функции по обобщённой координате. При малых колебаниях можно ограничиться только первым членом разложения, обозначив который через ζ , кинетическую энергию запишем в виде

$$K = \frac{1}{2} \zeta \dot{q}^2. \quad (1.33)$$

Входящий в уравнение (1.33) коэффициент ζ называется обобщённой (приведённой) массой или инерциальным коэффициентом. Как правило, при анализе относительно простых колебательных систем к разложению в ряд Маклорена не прибегают. В зависимости от вида колебательной системы и выбора обобщённой координаты оказывается достаточным получить выражение кинетической энергии через квадрат обобщённой скорости.

Потенциальная энергия в уравнении (1.27) так же является функцией обобщённой координаты

$$\Pi = \Pi(q). \quad (1.34)$$

Разложим и уравнение потенциальной энергии в ряд Маклорена по аналогии с уравнением (1.32)

$$\Pi = \Pi(0) + \Pi'(0)q + \frac{\Pi''(0)}{2}q^2 + \dots \quad (1.35)$$

Поскольку абсолютное значение потенциальной энергии зависит от выбора нулевого уровня, то можно положить, что $\Pi(0) = 0$, в этом случае, используя уравнение (17) введения, можно записать

$$\Pi' = -Q. \quad (1.36)$$

Так как в положении равновесия обобщённая сила равна нулю, то величина потенциальной энергии может быть записана следующим образом

$$\Pi = \xi q^2, \quad (1.37)$$

где $\xi = \Pi''(0)$ – называется обобщённым коэффициентом жёсткости или квазиупругим коэффициентом. Если систему счисления потенциальной энергии выбрать так, чтобы в положении равновесия имел место минимум, то $\Pi''(0) > 0$, откуда следует, что $\xi > 0$.

Подставим в уравнение Лагранжа (1.27) полученные значения кинетической и потенциальной энергии

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\frac{1}{2} \zeta \dot{q}^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{2} \zeta \dot{q}^2 \right) = - \frac{\partial}{\partial q} (\xi q^2), \quad (1.38)$$

где

$$\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{2} \zeta \dot{q}^2 \right) = 0; \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\frac{1}{2} \zeta \dot{q}^2 \right) \right] = \zeta \ddot{q}, \quad - \frac{\partial}{\partial q} (\xi q^2) = -2\xi q. \quad (1.39)$$

Таким образом, приходим к дифференциальному уравнению свободных незатухающих колебаний в обобщённых координатах

$$\zeta \ddot{q} + \xi q = 0, \quad (1.40)$$

которое структурно совпадает с уравнением (1.1), особенно это становится заметным, если ввести обозначение

$$\omega = \sqrt{\frac{\xi}{\zeta}}, \quad (1.42)$$

уравнение (1.41) примет окончательный вид

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0. \quad (1.43)$$

Решение уравнения (1.43) имеет следующий вид

$$q = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (1.44)$$

где

$$A = \sqrt{\left[\frac{\dot{q}(0)}{\omega} \right]^2 + q(0)^2}; \quad \varphi_0 = \arctg \frac{\omega q(0)}{\dot{q}(0)}. \quad (1.45)$$

Рассмотрим методику описания колебательных систем с использованием уравнения Лагранжа второго рода на примере колебательной системы состоящей из рейки А (рис.1.4) массой m_1 упруго соединенной с горизонтальной пружиной жёсткостью k_1 . Рейка опирается на каток С и цилиндр В массой m_2 . Трение между рейкой и цилиндром исключает проскальзывание рейки по цилиндру. Цилиндр посредством штока соединён с вертикальной пружиной жёсткостью k_2 . Определить собственную частоту свободных колебаний системы [4].

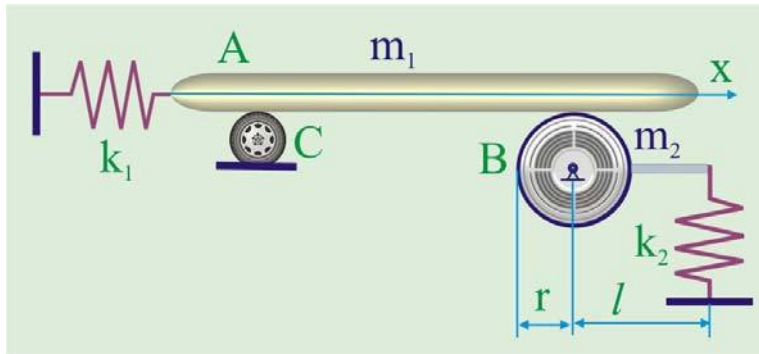


Рис. 1.4. Колеблющийся горизонтально стержень

В данном случае рейка А вследствие наложенных на неё связей обладает одной степенью свободы, для описания её движения достаточно одной обобщённой координаты. Так как рейка может перемещаться только поступательно, поэтому в качестве обобщённой координаты целесообразно выбрать горизонтальное перемещение произвольной точки рейки вдоль оси x . Отсчёт перемещения удобнее всего вести от положения статического равновесия, когда обе пружины не деформированы. Перемещение цилиндра будет представлять собой вращение вокруг горизонтальной оси, проходящей перпендикулярно плоскости чертежа. Угловое перемещение диска можно выразить через обобщённую координату x

$$\varphi = \frac{x}{r}. \quad (1.46)$$

Кинетическая энергия системы в данном случае будет складываться из энергии рейки и энергии цилиндра

$$K = \frac{m_1 \dot{x}^2}{2} + \frac{1}{2} J_y \dot{\varphi}^2, \quad (1.47)$$

где $J_y = m_2 r^2 / 2$ – момент инерции диска относительно оси его вращения, $\dot{\varphi} = (\dot{x}/r) = \omega$ – угловая скорость цилиндра. Перепишем уравнение кинетической энергии

$$K = \frac{m_1 \dot{x}^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}^2}{4} = \frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{m_2}{2} \right) \cdot \dot{x}^2. \quad (1.48)$$

Из уравнения (1.48) следует, что обобщённая масса ζ в данном случае равна

$$\zeta = m_1 + \frac{m_2}{2}. \quad (1.49)$$

Потенциальная энергия системы будет складываться из энергий двух деформированных пружин

$$\Pi = \frac{k_1 x^2}{2} + \frac{1}{2} k_2 \left(\frac{\ell}{r} x \right)^2 = \frac{1}{2} \left(k_1 + \frac{\ell^2}{r^2} k_2 \right) \cdot x^2. \quad (1.50)$$

Обобщённый коэффициент жёсткости запишется, таким образом, как

$$\xi = k_1 + \frac{\ell^2}{r^2} k_2. \quad (1.51)$$

Подставляя далее обобщённую массу и обобщённый коэффициент жёсткости в уравнение (1.42), определим собственную частоту данной колебательной системы

$$\omega = \sqrt{\frac{\xi}{\zeta}} = \sqrt{\frac{k_1 + \frac{\ell^2}{r^2} k_2}{m_1 + \frac{m_2}{2}}}. \quad (1.52)$$

Рассмотрим ещё один пример. Стержень длиной $2l$, шарнирно закреплённый за один из концов, на втором конце он несёт массу m , а в центральной своей части соединён с вертикальной пружиной, обладающей коэффициентом жёсткости k_0 (рис. 1.5). По массе производят вертикальный однократный удар величиной $\bar{S}$. Записать уравнение движения системы после окончания единичного ударного импульса [4].

Определим положение статического равновесия стержня, которое будет отличаться от горизонтального, потому что масса, закреплённая на расстоянии $2l$ от шарнира, будет отклонять стержень на угол φ^* . Статическая деформация пружины определится в виде произведения $\ell\varphi^*$. Таким образом на стержень в статическом положении будут действовать две силы, сила тяжести mg и реакция связи пружины $k_0\ell\varphi^*$. Для определения угла φ^* необходимо составить уравнение моментов относительно центра шарнирной опоры, с тем чтобы не учитывать реакцию связи в опоре

$$2mg\ell - k_0\ell^2\varphi^* = 0, \quad (1.53)$$

откуда

$$\varphi^* = \frac{2mg}{k_0\ell}. \quad (1.54)$$

Предположим далее, что после удара стержень сместился на угол φ , тогда полное отклонение от положения равновесия составит $(\varphi^* + \varphi)$, при этом полная реакция пружины определится как

$$N_z = k_0(\ell\varphi^* + \ell\varphi). \quad (1.55)$$

Составим дифференциальное уравнение вращательного движения стержня, используя в качестве обобщённой координаты угол поворота φ

$$4m\ell^2 \frac{d^2}{dt^2} (\varphi^* + \varphi) = 2mg\ell - k_0\ell^2 (\varphi^* + \varphi), \quad (1.56)$$

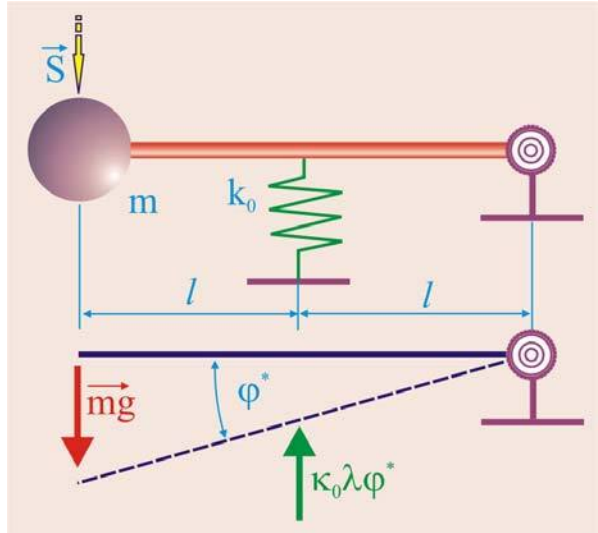


Рис. 1.5. Колебательная система

где $4m\ell^2$ – момент инерции системы. Раскроем скобки в правой части уравнения (1.56)

$$4m\ell^2 \frac{d^2}{dt^2}(\varphi^* + \varphi) = 2mg\ell - k_0\ell^2\varphi^* - k_0\ell^2\varphi. \quad (1.57)$$

С учётом уравнения (1.53) последнее соотношение примет вид

$$4m\ell^2 \frac{d^2}{dt^2}(\varphi^* + \varphi) = k_0\ell^2\varphi, \quad 4m\ddot{\varphi} + k_0\varphi = 0. \quad (1.58)$$

Из уравнения (1.58) очевидно, что обобщённая (приведённая) масса и обобщённый коэффициент жёсткости равны

$$\zeta = 4m; \quad \xi = k_0. \quad (1.59)$$

Циклическая частота собственных колебаний в соответствии с уравнением (42) составит

$$\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k_0}{m}}. \quad (1.60)$$

Пред интегрированием уравнения (1.58) сформулируем начальные условия. В самый первый момент после действия ударного импульса $\vec{S}$ стержень будет находиться в положении статического равновесия, поэтому $\varphi(0) = 0$. Скорость же массы получает при этом мгновенный скачок $\dot{\varphi}(0)\ell$. Начальная скорость может быть определена с помощью теоремы о сохранении импульса

$$2m\dot{\varphi}(0)\ell - 0 = S, \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}(0) = \frac{S}{2m\ell}. \quad (1.61)$$

Таким образом, начальные условия представляются следующим образом

$$\left. \begin{aligned} \varphi(0) &= 0; \\ \dot{\varphi}(0) &= \frac{S}{2m\ell}. \end{aligned} \right\} \quad (1.62)$$

Перепишем уравнение (1.58) в виде

$$\ddot{\varphi} + \frac{k_0}{4m}\varphi = 0; \quad \ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0. \quad (1.63)$$

Решение уравнения (1.63) будем искать в виде

$$\varphi(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t, \quad (1.64)$$

где

$$C_1 = \frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega}; \quad C_2 = \varphi(0). \quad (1.65)$$

Подставляя значение постоянных интегрирования в решение (1.64), получим

$$\varphi(t) = \frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega} \sin \omega t + \varphi(0) \cos \omega t. \quad (1.66)$$

С учётом уравнений (1.62) закон движения переписывается в виде

$$\varphi(t) = \frac{S}{2m\omega\ell} \sin \omega t. \quad (1.67)$$

Амплитудное значение углового перемещения будет иметь место при $\sin \omega t = 1$

$$\varphi_{\max} = \frac{S}{2m\omega\ell}. \quad (1.68)$$

С учётом значения собственной циклической частоты, определяемой соотношением (1.60), максимальный угол отклонения определится как

$$\varphi_{\max} = \frac{S}{\sqrt{k_0 m \ell}}. \quad (1.69)$$

1.3. Крутильные колебания

Рассмотренный пример, по сути, описывает, так называемые, крутильные колебания. Крутильные колебания возникают в том случае, когда на массу действует возвращающий момент, приостанавливающий отклонение тела от положения равновесия и сообщаящий движение в противоположную сторону. Простейшим примером крутильного осциллятора (система, совершающая собственные свободные незатухающие колебания) может служить система рис.1.6. Масса в виде автомобильной шины соединена с валом, который при вращении в подшипниках, закручивает спиральную пружину.

При повороте колеса на угол φ возникает восстанавливающий момент, пропорциональный углу закручивания

$$M_z(\vec{F}_k) = -k\varphi, \quad (1.70)$$

где k – коэффициент упругости пружины, $M_z(\vec{F}_k)$ – момент силы упругости пружины относительно вертикальной оси z . Этот восстанавливающий момент уравнивает момент сил инерции, действующий на колесо

$$M_z(\vec{F}_i) = -\frac{d}{dt}(J_z\dot{\varphi}) = -J_z\ddot{\varphi}, \quad (1.71)$$

где $M_z(\vec{F}_i)$ – момент сил инерции. Так как момент инерции колеса постоянен, то условие равновесия моментов можно записать следующим образом

$$M_z(\vec{F}_k) + M_z(\vec{F}_i) = -J_z\ddot{\varphi} - k\varphi = 0. \quad (1.72)$$

Если положить

$$\frac{k}{J_z} = \omega^2, \quad (1.73)$$

то придём к стандартному дифференциальному уравнению

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0. \quad (1.74)$$

Изменение во времени угловой координаты при нулевой начальной фазе, таким образом, представляется уравнением

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin \omega t \quad (1.75)$$

где φ_0 – амплитудное значение углового смещения, ω – циклическая частота. Запишем уравнения для угловой скорости и углового ускорения колеса

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varphi_0 \omega \cos \omega t;$$

$$\varepsilon = -\varphi_0 \omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 \varphi.$$

(1.76)

Второй закон Ньютона для вращающегося вокруг неподвижной оси тела имеет вид

$$M_z(\vec{F}) = J_z \varepsilon.$$

С учётом значения ε из уравнения (1.76)

$$M_z(\vec{F}) = -J_z \omega^2 \varphi,$$

Откуда следует, что

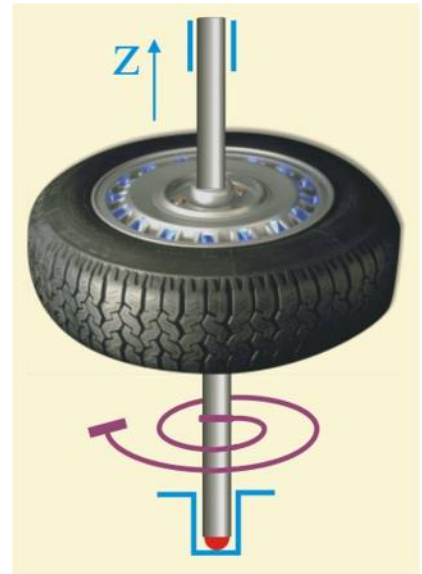


Рис.1.6. Крутильные колебания

$$\omega = \sqrt{\frac{M_z(\ddot{\varphi})}{J_z \varphi}}. \quad (1.77)$$

Величина $D = \frac{M_z(\ddot{\varphi})}{J_z}$ для данной колебательной системы постоянна, она характеризует упругие свойства пружины. Используя величину D , уравнение для циклической частоты и периода собственных колебаний можно записать так

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{J_z}}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{J_z}{D}}. \quad (1.78)$$

Приведенная выше методика анализа крутильных колебаний может использоваться и для более сложных систем. На рис. 1.7. показаны две шестерни разной массы, закреплённые на концах упругого вала, который при относительном угловом перемещении шестерёнок создаёт следствие упругих деформаций восста-

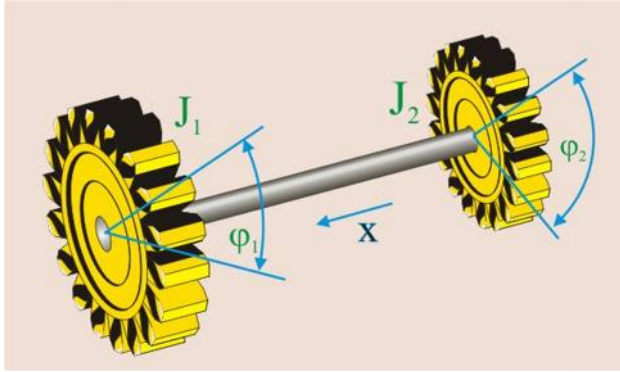


Рис. 1.7. Двойной осциллятор

навливающий момент, определяемый как

$$M_x(\ddot{\varphi}_k) = -k(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (1.79)$$

Восстанавливающий момент уравнивается суммарным инерциальным моментом

$$M_x(\ddot{\varphi}_{i(1)}) = -J_{x(1)}\ddot{\varphi}_1; \quad M_x(\ddot{\varphi}_{i(2)}) = -J_{x(2)}\ddot{\varphi}_2. \quad (1.80)$$

Условия равновесия вала, таким образом, можно представить следующим образом

$$\left. \begin{aligned} -J_{x(1)}\ddot{\varphi}_1 + k(\varphi_2 - \varphi_1), \\ -J_{x(2)}\ddot{\varphi}_2 + k(\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned} \right\} \quad (1.90)$$

Если рассматривать относительное перемещение дисков, то, вычитая из первого уравнения системы (1.90) второе уравнение и вводя обозначение $\zeta = \varphi_2 - \varphi_1$, получим дифференциальное уравнение следующего вида

$$\ddot{\zeta} + k \left(\frac{1}{J_{1(x)}} + \frac{1}{J_{2(x)}} \right) \zeta = 0. \quad (1.91)$$

Сравнивая последнее соотношение, с уравнением (1.74) можно видеть что

$$\left(\frac{1}{J_{1(x)}} + \frac{1}{J_{2(x)}} \right) = \omega^2. \quad (1.92)$$

Таким образом, анализ трёх осцилляторов, совершающих совместные свободные незатухающие крутильные колебания, свёлся к одному дифференциальному уравнению

$$\ddot{\zeta} + \omega^2 \zeta = 0, \quad (1.93)$$

которое имеет решение типа (1.75).

1.4. Математический маятник

Рассмотрим математический маятник, представляющий собой точечную массу m , закреплённую на невесомом, нерастяжимом стержне длиной l , второй конец стержня закреплён шарнирно. При отклонении стержня от вертикали на угол φ (рис. 1.8) возникает восстанавливающая компонента силы тяжести, определяемая как

$$F_g = -mg \sin \varphi. \quad (1.94)$$

При движении в сторону положения статического равновесия масса приобретает ускорение $\ell\ddot{\varphi}$, под действием силы инерции

$$F_i = -m\ell\ddot{\varphi}. \quad (1.95)$$

Приравняем далее действующие на массу силы $m\ell\ddot{\varphi} + mg \sin \varphi = 0$,

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell} \sin \varphi = 0. \quad (1.96)$$

Введём обозначение

$$\frac{g}{\ell} = \omega^2, \quad (1.97)$$

что даёт основание уравнение (1.96) переписать следующим образом

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0. \quad (1.98)$$

Мы пришли к нелинейному дифференциальному уравнению, которое в принципе можно превратить в линейное уравнение, если рассматривать малые по амплитуде колебания. Действительно

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots \approx \varphi.$$

Таким образом, для малых колебаний становится справедливым линейное дифференциальное уравнение

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0. \quad (1.99)$$

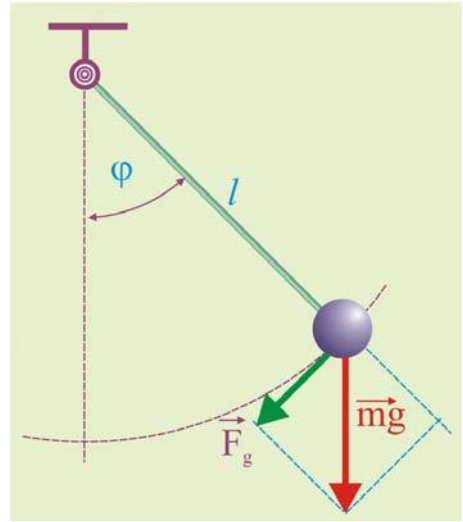


Рис. 1.8. Математический маятник

1.5. Физический маятник

Физическим маятником называется тело, способное вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. Масса физического маятника распределена в некотором объёме. Если грушу в верхней её части проткнуть спицей, так чтобы ось качания проходила перпендикулярно плоскости чертежа и пренебречь потерями на трение и сопротивление (рис.1.9), то это будет модель одного из вариантов физического маятника. Предположим, что центр масс груши располагается в точке С, которая отстоит от оси подвеса на расстоянии d. При отклонении центра масс тела из положения равновесия, например, на малый угол φ возникнет восстанавливающий момент силы тяжести

$$M_x(\vec{F}_g) = -mgd \sin \varphi. \quad (1.100)$$

Момент сил инерции определится как

$$M_x(\vec{F}_i) = -J_x \ddot{\varphi}, \quad (1.101)$$

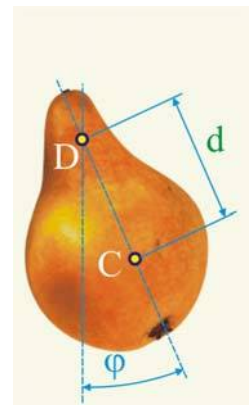
где J_x – момент инерции рассматриваемого тела относительно оси вращения. Уравнение статического баланса представится следующим образом

$$J_x \ddot{\varphi} + mgd \sin \varphi = 0,$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgd}{J_x} \sin \varphi = 0. \quad (1.102)$$

Напрашивается обозначение



1.9. Физический маятник

$$\frac{mgd}{J_x} = \omega^2. \quad (1.103)$$

Если рассматриваются малые колебания, то уравнение (1.102) с учётом значения циклической частоты собственных колебаний (1.103) дифференциальное уравнение движения физического маятника примет знакомый вид со стандартным решением

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0.$$

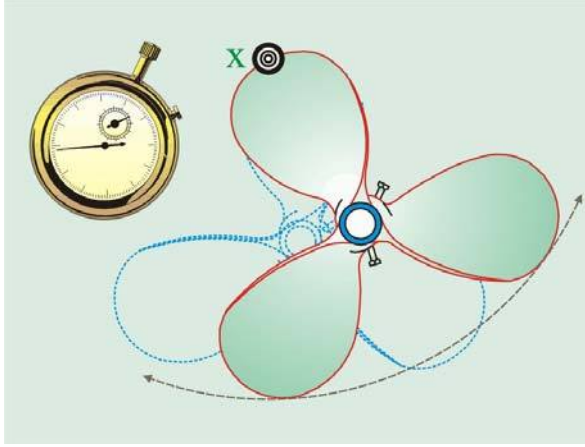


Рис. 1.10. Измерение периода колебаний

Модель колебаний физического маятника используется на практике для вычисления моментов инерции тел сложной геометрии, когда применение аналитических методов сопряжено со значительными математическими трудностями. Исследуемое тело, например судовой винт, (рис. 1.10) подвешивается таким образом, чтобы он мог вращаться вокруг оси, проходящей через концевой элемент кромки одной из лопастей. Затем отклоняют винт на небольшой угол и измеряют посредством секундомера, например, десять периодов колебаний. Из уравнения (1.103) следует, что

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{mgd}{J_x},$$

откуда

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_x}{mgd}}; \quad J_x = \frac{mgdT^2}{4\pi^2}. \quad (1.104)$$

Таким образом, зная массу винта, положение центра масс и период малых колебаний можно вычислить момент инерции относительно оси качания, затем, используя теорему Гюйгенса – Штейнера возможно перейти к моменту инерции относительно центра масс.

1.6. Собственные колебания массы с двумя горизонтальными пружинами

Рассмотрим колебательную систему, состоящую из массы, способной перемещаться вдоль горизонтальной оси без трения и сопротивления (рис. 1.11). Масса соединена с двумя горизонтальными пружинами жёсткостью k каждая, которые в статическом положении массы предварительно напряжены с одинаковой силой F_0 . Силы упругости, действующие на массу можно в этом случае записать следующим образом

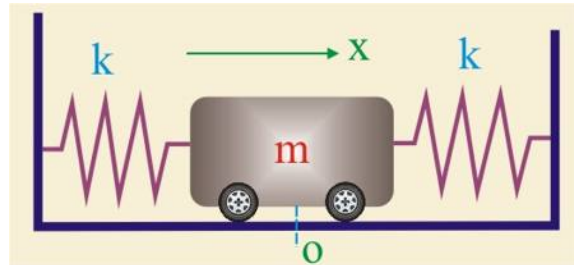


Рис. 1.11. Горизонтальные колебания массы, соединённой с двумя пружинами

Масса предварительно напряжена с одинаковой силой F_0 . Силы упругости, действующие на массу можно в этом случае записать следующим образом

$$\left. \begin{aligned} F_{k1} &= F_0 + \frac{kx}{2}; \\ F_{k2} &= F_0 - \frac{kx}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.104)$$

Поскольку на массу одновременно действуют две силы упругости, направленные в

противоположные стороны, то

$$F_k = F_{k2} - F_{k1} = -kx. \quad (1.105)$$

Кроме упругой силы к массе будет приложена даламберова сила инерции

$$F_i = -\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = -m\ddot{x}. \quad (1.106)$$

Условие равновесия массы, таким образом, представиться в виде

$$m\ddot{x} + kx = 0, \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (1.107)$$

Мы снова пришли к дифференциальному уравнению типа (1.3), что лишний раз подчёркивает универсальность подходов, выработанных при изучении теории колебательных процессов.

1.7. Вертикальные колебания массы, соединённой с двумя пружинами

Рассмотрим далее движение массы, закреплённой между двумя горизонтальными пружинами (рис. 1.12), выведенной из состояния равновесия вертикальным импульсным воздействием. В этом случае сила, действующая со стороны предварительно напряжённых пружин при их деформации вследствие вертикального смещения массы, определится как

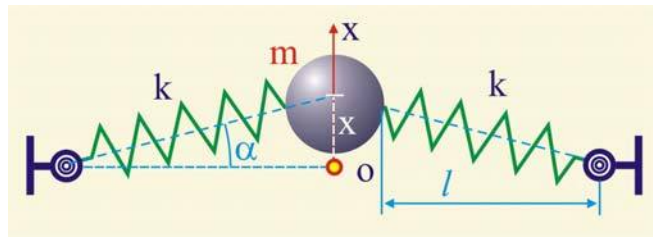


Рис. 1.12. Вертикальные колебания массы

$$F_k = F_0 + \frac{kx}{2} = F_0 + \frac{k(\sqrt{\ell^2 + x^2} - \ell)}{2}. \quad (1.108)$$

На движение влияние будут оказывать только вертикальные составляющие сил упругости

$$F_{kx} = F_{kx(1)} + F_{kx(2)} = 2F_k \sin \alpha = 2F_k \frac{x}{\sqrt{\ell^2 + x^2}}, \quad (1.109)$$

$$F_{kx} = \frac{2F_0 x}{\sqrt{\ell^2 + x^2}} + kx \left(1 - \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + x^2}} \right) = f(x). \quad (1.110)$$

Уравнение движения, таким образом, принимает вид

$$m\ddot{x} + f(x) = 0. \quad (1.111)$$

Полученное дифференциальное уравнение нелинейно, но для малых колебаний при $\ell \gg x$ уравнение $f(x)$ можно разложить в ряд

$$f(x) \approx 2F_0 \frac{x}{\ell} + \left(\frac{c\ell}{2} - F_0 \right) \left(\frac{x}{\ell} \right)^3, \quad (1.112)$$

и использовать только первый член разложения, что делает уравнение (1.111) линейным

$$m\ddot{x} + \frac{2F_0}{\ell} x, \quad \ddot{x} + \frac{2F_0}{m\ell} x = 0. \quad (1.113)$$

Очевидно, что

$$\omega^2 = \frac{2F_0}{m\ell}, \quad (1.114)$$

т.е. приходим к традиционному линейному дифференциальному уравнению гармонических колебаний

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (1.115)$$

1.8. Вертикальные колебания массы, соединённой с пружиной

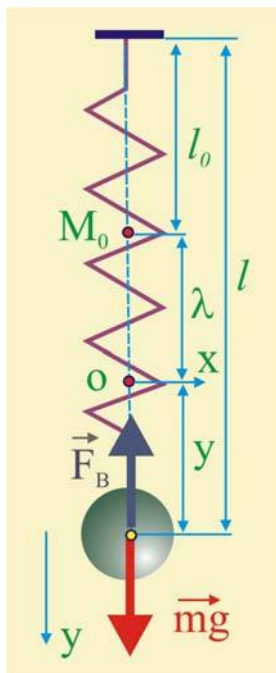


Рис. 1.13. Вертикальные колебания

К вертикальной пружине длины l_0 в недеформируемом состоянии подвешивают массу m , которая увеличивает длину пружины на величину λ . Массу смещают далее вертикально вниз на расстояние y и отпускают без начальной скорости. В отклонённом состоянии на массу станут действовать две вертикальные силы, с совпадающими линиями действия и противоположными направлениями. Деформирование пружины приведёт к возникновению силы упругости, которая представляется в данном случае и возвращающей силой $\vec{F}_B$, обеспечивающей процесс возникновения гармонических колебаний.

Для анализа колебаний выберем систему отсчёта, начало которой, точку O , совместим с положением равновесия колебательной системы, когда сила тяжести $m\vec{g}$ и сила упругости пружины уравнивают друг друга, т.е.

$$mg = k\lambda, \quad (1.116)$$

где k – коэффициент упругости пружины, λ – статическое удлинение пружины. При смещении массы на величину y , возвращающая сила станет равна

$$F_B = -k(\lambda + y). \quad (1.117)$$

Уравнение второго закона Ньютона запишем в следующем виде

$$m\ddot{y} = mg - k(\lambda + y). \quad (1.118)$$

Совмещая далее уравнения (1.116) и (1.118), получим

$$m\ddot{y} = k\lambda - k\lambda - ky, \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{k}{m}y. \quad (1.119)$$

Если ввести стандартную замену $k/m = \omega^2$, то придём к не менее стандартному дифференциальному уравнению

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \quad (1.120)$$

которое имеет общее решение вида

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t. \quad (1.121)$$

Зависимость скорости от времени на основании (1.121) запишется следующим образом

$$\dot{y} = -\omega C_1 \sin \omega t + \omega C_2 \cos \omega t. \quad (1.122)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 сформулируем начальные условия: при $t = 0$, $y(0) = -\lambda$, $\dot{y}(0) = 0$, подставляя которые в уравнение (1.121) получим следующие значения постоянных

$$C_1 = -\lambda, \quad C_2 = 0. \quad (1.123)$$

Уравнение вертикальных колебаний массы, соединённой с вертикальной пружиной запишется следующим образом

$$y = -\lambda \cos \omega t = -\lambda \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t. \quad (1.124)$$

Амплитуда колебаний в данном случае равна статическому удлинению пружины, наибольшее же удлинение пружины в процессе колебаний составит $\lambda_{\max} = 2\lambda$.

1.9. Колебания уровня жидкости в U-образной трубке

Если в трубку постоянного сечения s налить жидкости плотности ρ , то движение жидкости ввиду принципа неразрывности можно рассматривать как единое целое. В соответствии с законом сообщающихся сосудов, в статическом положении уровень жидкости в коленах будет одинаковым. При выведении массы жидкости из равновесного состояния, её уровень станет совершать собственные гармонические колебания.

Рассмотрим колебания столба жидкости плотностью ρ , длиной l , площадью поперечного сечения s и массой

$$m = \rho V = \rho s \ell. \quad (1.125)$$

Явлениями внутреннего трения и турбулентными эффектами при движении жидкости будем пренебрегать. Если уровень жидкости в одном из колен сместить на расстояние y_0 , то равновесие нарушится, причём возникнет возвращающая сила в данном случае она выступит в образе веса столба рассматриваемой жидкости высотой y_0

$$F_B = -2\rho g s \ell y_0. \quad (1.126)$$

Уравнение второго закона Ньютона в данном случае представится следующим образом

$$m \ddot{y} = -2\rho g s y,$$

или

$$m \ddot{y} + 2\rho g s \ell y = 0. \quad (1.127)$$

С учётом уравнения (1.125)

$$m \ddot{y} + 2 \frac{mg}{\ell} y = 0. \quad (1.128)$$

Если ввести традиционное обозначение

$$\omega^2 = \frac{2g}{\ell}, \quad (1.129)$$

то придём к следующему дифференциальному уравнению

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0. \quad (1.130)$$

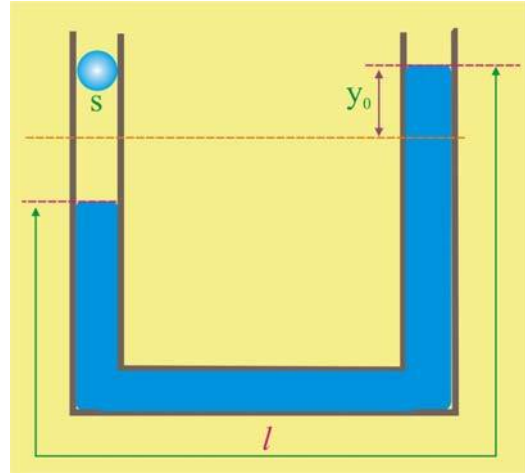


Рис. 1.14. Колебание уровня жидкости

1.10. Электрический колебательный контур

Электрический колебательный контур состоит из последовательно соединённых конденсатора C и индуктивности L (рис. 1.15). Если, предварительно заряженный конденсатор замкнуть на индуктивность, то запасённая в конденсаторе электрическая энергия будет преобразовываться в энергию электромагнитного поля, запасаемую индуктивностью

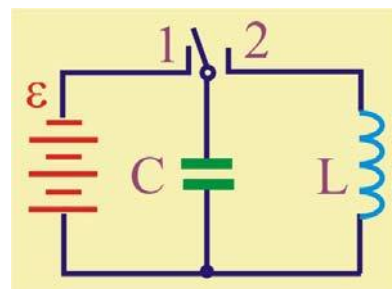


Рис. 1.15. Колебательный контур

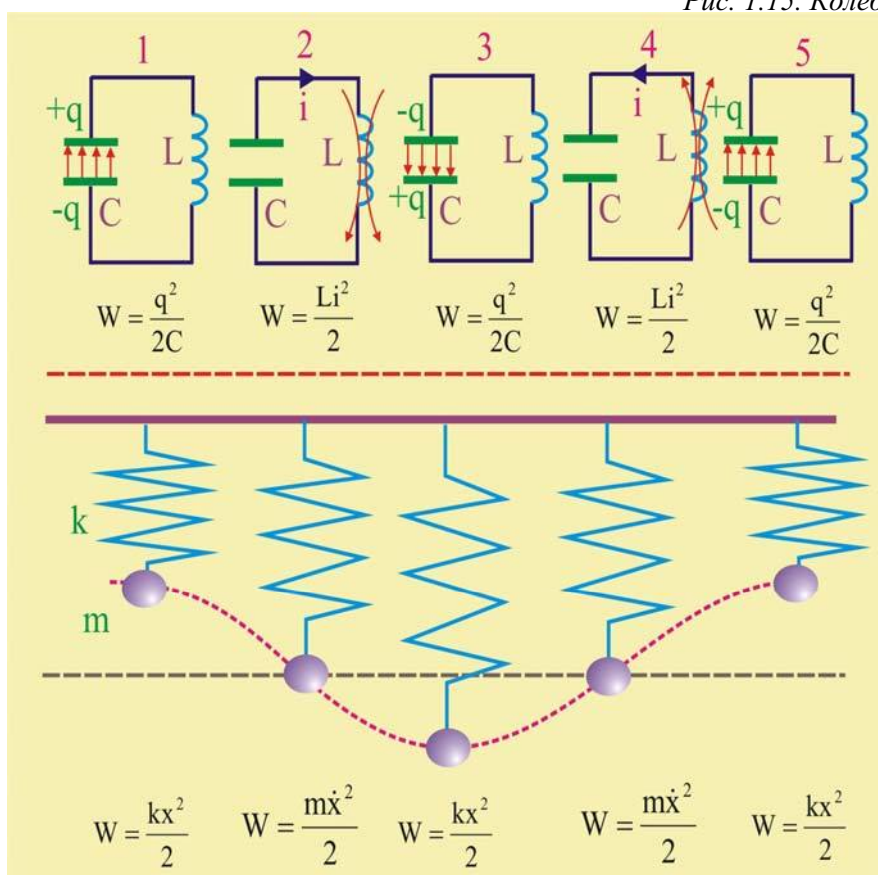


Рис. 1.16. Электромеханические аналогии

$$W_{\text{э}} = \frac{CU^2}{2} \Leftrightarrow W_{\text{м}} = \frac{Li^2}{2}. \quad (1.131)$$

Колебания, возникающие в контуре можно сопоставить с колебаниями математического маятника или груза на пружине, суть процессов, в энергетическом плане даёт к этому все основания. В механических колебательных системах происходит преобразование кинетической энергии в потенциальную энергию, а в рассматриваемом контуре энергия магнитного поля преобразуется в энергию электрического поля. На рис. 1.15 показаны пять стадий развития колебательного процесса в идеальном (без сопротивления) контуре и пружинном маятнике.

Дифференциальное уравнение такого осциллятора можно получить из условия равенства напряжений на конденсаторе U_C и индуктивности U_L

$$U_C = \frac{q}{C}; \quad U_L = -L \frac{di}{dt}, \quad (1.132)$$

где q – заряд конденсатора, i – ток через индуктивность, C – ёмкость конденсатора, L – индуктивность катушки.

Сумма падений напряжения на ёмкости и индуктивности в соответствии с законом сохранения энергии должна быть равна нулю, т.е.

$$\frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} = 0; \quad i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}q = 0; \quad (1.133)$$

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0.$$

Вводя традиционное обозначение $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$, получим

$$q + \omega_0^2 q = 0, \quad (1.134)$$

уже знакомое дифференциальное уравнение, имеющее стандартное решение

$$q(t) = q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (1.135)$$

Период колебаний данного осциллятора определяется **формулой Томсона**

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC} \quad (1.136)$$

Изменение силы тока в контуре определится путём дифференцирования (1.136)

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \omega_0 q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi); \quad (1.137)$$

т.е. колебания тока опережают по фазе колебания заряда на $0,5\pi$.

Электрическая и магнитная энергия определяются уравнениями

$$W_{\text{э}} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C} \sin^2(\omega_0 t + \varphi); \quad (1.138)$$

$$W_{\text{м}} = \frac{Li^2}{2} = \frac{1}{2} L \omega_0^2 q_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} \frac{Lq_0^2}{LC} \cos^2(\omega_0 t + \varphi); \quad (1.139)$$

$$W_{\Sigma} = W_{\text{м}} + W_{\text{э}};$$

В контуре происходит непрерывное преобразование электрической энергии в магнитную энергию и наоборот. Когда магнитная составляющая достигает максимума, электрическая составляющая обращается в нуль. Таким образом

$$W_{\Sigma} = \frac{q_0^2}{2C}; \quad \langle W_{\text{э}} \rangle = \langle W_{\text{м}} \rangle = \frac{q_0^2}{4C} = \frac{LI_0^2}{4}; \quad (1.140)$$

Как видно из полученных уравнений, процессы колебаний в механических и электрических системах подчиняются одинаковым законам, отличие заключается в обозначениях и сути физических величин. Это обстоятельство легло в основу разработки одного из результативных методов анализа – метода электромеханических аналогий.

Если предположить, что в электрической цепи конденсатор является аналогом массы в механической системе, а индуктивность – аналогом упругого элемента – пружины, то можно механические колебательные системы моделировать электрическими цепями (рис. 1.16). Этот метод широко используется при оптимизации электродинамических преобразователей энергии, таких как микрофоны и громкоговорители. Удобно так же характеристики колебаний исследовать на электрическом макете. Методы и средства измерения токов, напряжений, разности фаз и электрических энергий гораздо проще, точнее и надёжнее, чем анализ величин, характеризующих механические колебательные системы.

1.11. Колебательная система с непрерывно распределёнными накопителями энергии

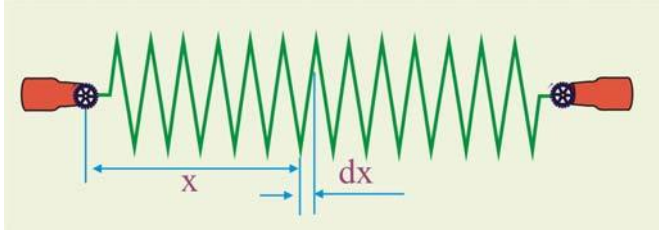


Рис. 1.17. Винтовая пружина постоянного сечения

Рассмотренные выше колебательные системы характеризовались тем, что накопители потенциальной и кинетической энергии локализовались в разных элементах системы. Так например, в пружинных осцилляторах принималось, что пружины, обладая упругостью, были лишены массы, а колеблющаяся масса рассматри-

валась как недеформируемая. Однако такие упрощения в некоторых случаях приводят к значительным погрешностям.

Рассмотрим протяжённую цилиндрическую пружину (рис. 1.17), каждый участок длины которой обладает определённой массой и упругостью. Элемент пружины с координатой x при колебаниях смещается на расстояние $\xi = \xi(x)$. Выделим далее элемент пружины бесконечно малой длины dx и составим уравнение его движения, обозначив массу единицы длины через μ . В этом случае инерциальную силу можно определить следующим образом

$$\Delta F_i = -\mu dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\mu dx \ddot{\xi}. \quad (1.141)$$

Рассматриваемый элемент пружины dx при движении испытывает либо растяжение, либо сжатие, величину которого можно представить в виде относительной величины

$$\varepsilon = \frac{\xi(x + dx) - \xi(x)}{dx} = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad (1.142)$$

при этом, возникающая упругая сила определится как

$$\Delta F_k = k \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (1.143)$$

Результирующая сила, приложенная к концам выделенного элемента, определится в виде разности силы инерции и силы упругости, при этом условие равновесия элемента представится так

$$\Delta F = -dx(\mu \ddot{\xi} - k \xi'') = 0. \quad (1.144)$$

Введём обозначение

$$c^2 = \frac{k}{\mu}, \quad (1.145)$$

что позволяет записать уравнение движения в виде

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (1.146)$$

Это, так называемое, волновое уравнение, которое описывает распространение упругих колебаний (сжатия и разряжения) вдоль пружины. Как видно, полученное уравнение не совпадает с ранее полученными уравнениями для сосредоточенных масс и упругостей. Физический смысл волнового уравнения будет подробно рассмотрен в разделе, посвящённом волновому движению.

1.12. Нелинейная зависимость восстанавливающей силы от смещения

При прежнем рассмотрении различных колебательных систем, постоянно оговаривалось, что полученные уравнения их движения справедливы только для колебаний малых амплитуд. В большинстве своём это было вызвано тем, что при малых значениях смещений зави-

симось восстанавливающей (возвращающей) силы сохраняет свою линейность в зависимости от величин перемещений. При определённых для каждой системы значениях смещения линейная зависимость восстанавливающей силы вырождается, и колебательная система становится нелинейной. На рис. 1.18 приведены примеры колебательных систем, для которых зависимость $F = F(x)$ не является линейной.

$$m\ddot{x} + F(x) = 0. \quad (1.147)$$

Решение этого уравнения представляется следующим образом [2]

$$t = \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{-\frac{2}{m} \int_x^a F(x) dx}}, \quad (1.148)$$

Если пренебречь силами сопротивления, то уравнение движения можно представить в следующем виде

где a – максимальное положительное смещение, с которого начинается отсчёт времени. Возникающие в таких системах колебания не будут гармоническими, это псевдогармонические колебания.

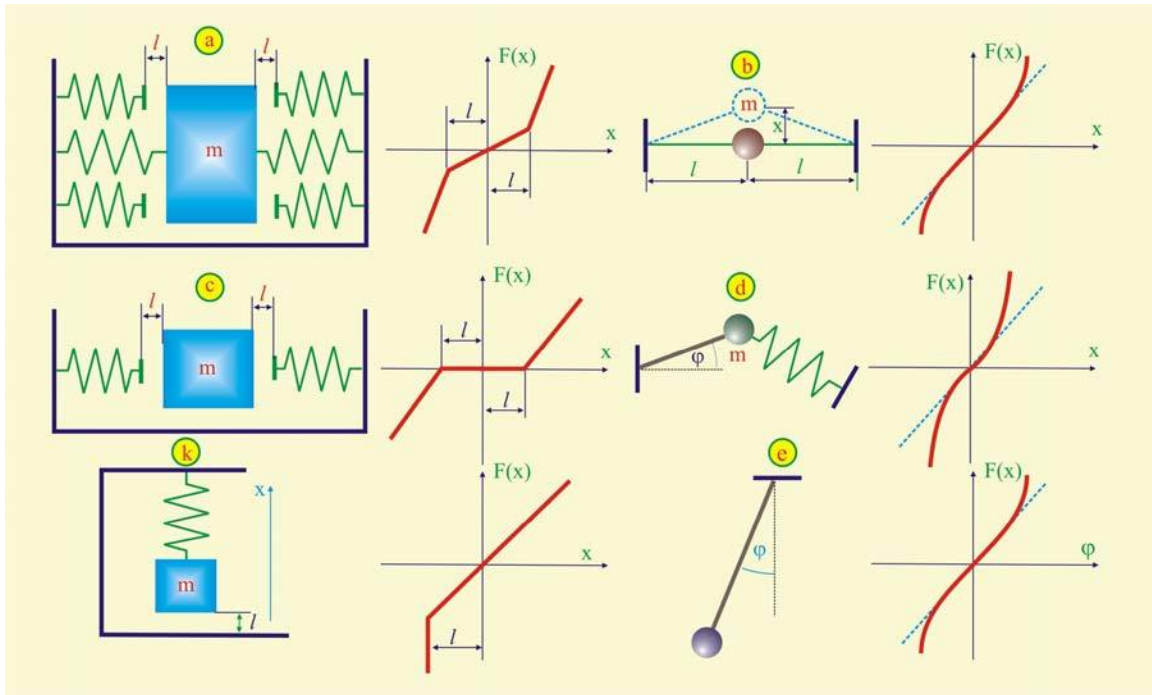


Рис. 1.18. Примеры нелинейных колебательных систем

Время, в течение которого величина смещения x проходит весь цикл, изменяя значения от a до $-b$ и обратно, т.е. период колебаний при $a \neq b$ определяется как

$$T = 2 \int_{-b}^a \frac{dx}{\sqrt{-\frac{2}{m} \int_x^a F(x) dx}}. \quad (1.149)$$

Поскольку в крайних точках колебаний значение потенциальной энергии должно быть одинаковым, то справедливо равенство

$$\int_0^a F(x) dx = \int_0^{-b} F(x) dx. \quad (1.150)$$

Интегралы (1.148) и (149) берутся только в ряде простейших случаев, например, при $F = kx$, при нелинейных зависимостях интегралы вычисляются численными методами, чаще все-

го путём аппроксимации нелинейных зависимостей многочленами третьей или четвёртой степени

$$F(x) = a_1 x \pm a_3 x^3. \quad (1.151)$$

Знак плюс выбирается для упругих элементов, у которых абсолютное значение производной от силовой функции увеличивается с ростом деформации. Такими свойствами обладают «жёсткие» системы a , b и d , приведенные на рис. 1.18. В противном случае, когда с увеличением деформации упругость становится меньше, выбирается знак минус, колебательные системы с такими элементами называются «мягкими». К «мягким» системам, например, относится математический маятник (рис. 1.18,а).

Если многочлен вида (1.151) подставить в уравнение (1.148) и для случая «жёстких» систем заменить переменную

$$x = a \cos \varphi, \quad (1.152)$$

то получится уравнение, содержащее в своём составе эллиптический интеграл, значения которых, как известно, приведены в соответствующих справочниках

$$t = \sqrt{\frac{m}{a_1 + a_3 a^2}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \sqrt{\frac{m}{a_1 + a_3 a^2}} \cdot \mathfrak{I}(k, \varphi), \quad (1.152)$$

где $k^2 = \frac{a_3 a^2}{2(a_1 + a_3 a^2)} < 1$, $\mathfrak{I}(k, \varphi)$ – эллиптический интеграл первого рода. При изменении величины φ от 0 до $\pi/2$ проходит четверть периода колебаний, в этой связи

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{m}{a_1 + a_3 a^2}} \cdot \mathfrak{I}\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{m}{a_1 + a_3 a^2}} \cdot \mathfrak{R}(k), \quad (1.153)$$

здесь $\mathfrak{R}(k)$ – полный эллиптический интеграл. Для исследования формы колебаний нелинейных систем часто эллиптический интеграл первого рода представляют в виде

$$\mathfrak{I}(k, \varphi) = t \sqrt{\frac{a_1 + a_3 a^2}{m}} = u; \quad \varphi = amu. \quad (1.154)$$

При подстановке уравнения (1.154) в выражение (1.152) получается следующая формула для формы колебаний, возникающих в нелинейных системах с «жёсткой» характеристикой с началом отсчёта времени, когда $x = a$

$$x = a \cos(a \cdot m \cdot u) = a \operatorname{cn}\left(t \sqrt{\frac{a_1 + a_3 a^2}{m}}\right). \quad (1.155)$$

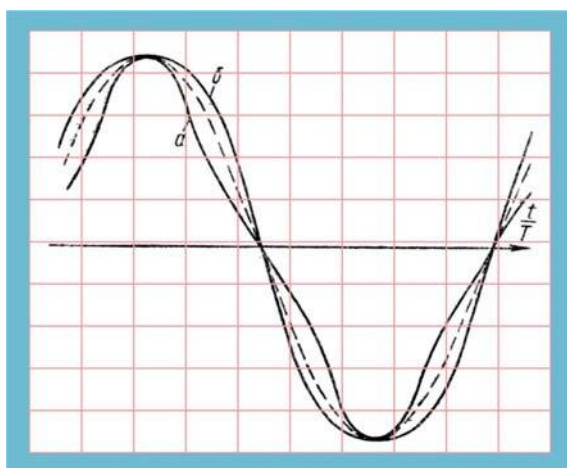


Рис. 1.19. Формы свободных колебаний в нелинейных системах

На рис. 1.19 приведены типичные формы колебаний для нелинейных «жёстких» систем. Формуле (1.155) соответствует кривая a , которая в отличие от стандартной синусоиды (пунктирная кривая) имеет более острые вершины и дополнительные точки перегиба. Кривая b типична для колебательных систем с «мягкими» характеристиками.

Нелинейные колебательные системы могут быть рассмотрены и методами аналитической механики. Покажем такую возможность на примере больших колебаний математического маятника (рис. 1.18, е), приняв за обобщённую координату угол отклонения φ . В этом случае высота подъёма згизика определится как $h = \ell(1 - \cos \varphi)$, потенциальная энергия системы в этом случае составит

$$\Pi = mg\ell(1 - \cos \varphi) \Rightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = mg\ell \sin \varphi . \quad (1.156)$$

Кинетическая энергия определится как

$$K = \frac{m\ell^2 \dot{\varphi}^2}{2} . \quad (1.157)$$

Если записать далее уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial K}{\partial q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q} , \quad (1.158)$$

и подставить значения производных от кинетической и потенциальной энергии, то получится нелинейное дифференциальное уравнение

$$a\ddot{q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0 . \quad (1.159)$$

1.13. Примеры вычисления параметров собственных незатухающих колебаний

Пример № 1. Уравнение гармонических колебаний некоторой точки задано уравнением $x(t) = A \cos \omega(t + \tau)$, $\omega = \pi \text{ рад/с}$, $\tau = 0,2 \text{ с}$. Найти период колебаний T и начальную фазу φ_0 .

1. Определим период колебаний

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2 \text{ с}.$$

(1)

2. Начальная фаза колебаний

$$\varphi_0 = \omega\tau = \frac{\pi}{5} \text{ рад} = 36^\circ. \quad (2)$$

Пример № 2. Колебательный процесс задан уравнением $x(t) = A \sin \omega(t + \tau)$, циклическая частота колебаний равна $\omega = 2,5\pi \text{ рад/с}$, $\tau = 0,4 \text{ с}$. Найти период T , частоту ν и начальную фазу колебаний φ_0 .

1. Определим период заданного колебательного движения, воспользовавшись уравнением (1) предыдущей задачи

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2,5\pi} = 0,8 \text{ с}. \quad (1)$$

2. Найдём частоту колебаний

$$\omega = 2\pi\nu, \Rightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} = 1,25 \text{ Гц}. \quad (2)$$

3. Начальная фаза колебаний определится как

$$\varphi_0 = \omega\tau = 2,5\pi \cdot 0,4 = \pi \text{ рад}. \quad (3)$$

Пример № 3. Зная уравнение колебательного движения материальной точки $x(t) = A \cos(\pi t + \varphi_0)$, амплитуду $A = 4 \text{ см}$, определить начальную фазу колебаний, если смещение в начальный момент времени $x(0) = 2 \text{ см}$. Найти скорость и ускорение для момента времени $\tau = 1 \text{ с}$.

1. Перепишем заданное уравнение движения для начального момента времени ($t = 0$) и определим начальную фазу колебаний

$$\frac{A}{2} = A \cos \varphi_0, \Rightarrow \cos \varphi_0 = \frac{1}{2}, \quad \varphi_0 = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}. \quad (1)$$

2. Определим смещение точки для момента времени $\tau = 1 \text{ с}$

$$x(t) = A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right), \quad (2)$$
$$x(\tau) = 4 \cdot 10^{-2} \cos\left(\pi \cdot 1 + \frac{\pi}{3}\right) = -2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

3. Скорость материальной точки в заданный момент времени τ

$$\dot{x}(t) \equiv \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (3)$$

$$\dot{x}(\tau) = -4 \cdot 10^{-2} \cdot 3,14 \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) \cong 0,1 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (4)$$

4. Ускорение точки в общем виде представится как

$$\ddot{x}(t) \equiv \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (5)$$

5. Перепишем уравнение (5) применительно к условиям данного колебания

$$\ddot{x}(\tau) \cong -4 \cdot 10^{-2} \cdot 10 \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) \cong 0,2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}. \quad (6)$$

Пример № 4. Точка, колеблющаяся по гармоническому закону с амплитудой $A = 4$ см и периодом $T = 2$ с в начальный момент времени имеет смещение $x(0) = 2$ см. Определить момент времени τ , когда скорость достигнет величины -1 м/с.

1. По заданным начальным условиям определим начальную фазу колебаний

$$x(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right), \quad x(0) = 4 \cdot 10^{-2} \cos \varphi_0, \quad (1)$$

$$\cos \varphi_0 = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 10^{-2}} = \frac{1}{2}, \quad \varphi_0 = \arccos \frac{1}{2}, \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{3}. \quad (2)$$

2. Запишем уравнение для скорости в общем виде

$$\dot{x}(t) \equiv \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (3)$$

для заданных условий уравнение (3) переписывается следующим образом

$$\dot{x}(\tau) = -A \frac{2\pi}{T} \sin\left(\frac{2\pi}{T}\tau + \frac{\pi}{3}\right), \quad -1 \cdot 10^{-2} = -4 \cdot 10^{-2} \frac{6,28}{2} \sin\left(\pi\tau + \frac{\pi}{3}\right). \quad (4)$$

3. Разрешим уравнение (4) относительно искомого времени τ

$$\sin\left(\pi\tau + \frac{\pi}{3}\right) = 8 \cdot 10^{-2}, \quad (\pi\tau + 0,33\pi) = \arcsin 8 \cdot 10^{-2}, \quad (5)$$

$$\pi\tau + 0,33\pi = 1,46\pi, \quad \Rightarrow \quad \tau = 1,13 \text{ с}.$$

Пример № 5. Точка перемещается по круговой траектории радиуса $R = 0,1$ м против хода часовой стрелки с периодом $T = 6$ с. Записать уравнение движения точки, найти для момента времени $\tau = 1$ с смещение, скорость и ускорение точки. В начальный момент времени $x(0) = 0$.

1. Определим циклическую частоту колебаний

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{3} \frac{\text{рад}}{\text{с}}. \quad (1)$$

2. Запишем уравнение смещения точки в общем виде

$$x(t) = R \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \varphi_0\right). \quad (2)$$

3. Перепишем уравнение (2) для заданных начальных условий, $t = 0$, $x(0) = 0$

$$x(0) = R \cos(\varphi_0), \quad \cos \varphi_0 = 0, \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2}. \quad (3)$$

4. Определим смещение точки в момент времени $\tau = 1$ с

$$x(\tau) = 0,1 \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot 1 + \frac{\pi}{2}\right) \cong -8,67 \cdot 10^{-2} \text{ м}. \quad (4)$$

5. Скорость точки в произвольный момент времени

$$\dot{x}(t) = R \frac{2\pi}{T} \sin\left(\frac{\pi}{3} t + \frac{\pi}{2}\right), \quad (5)$$

в момент времени $\tau = 1$ с

$$\dot{x}(\tau) = -R \frac{2\pi}{T} \sin\left(\frac{5}{6} \pi\right), \quad \dot{x}(\tau) \cong -0,1 \cdot 1 \sin\left(\frac{5}{6} \pi\right) \cong -5 \cdot 10^{-2} \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (6)$$

Пример № 6. Колебания материальной точки происходят по гармоническому закону с амплитудой $A = 3$ см и циклической частотой $\omega = \pi/2$ рад/с. Каких максимальных значений достигают скорость и ускорение точки.

1. Пусть колебания происходят в соответствие с уравнением

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (1)$$

2. Скорость и ускорение на основе уравнения (1) будут определяться следующими соотношениями

$$\dot{x}(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (2)$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (3)$$

3. Максимальное значение скорости будет иметь место при достижении $\cos(\omega t + \varphi) = 1$, другими словами

$$\dot{x}_{\max} = A\omega = 3 \cdot 10^{-2} \cdot 1,57 = 4,7 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}. \quad (4)$$

4. Амплитудное значение ускорения определится на основе аналогичных рассуждений

$$\ddot{x}_{\max} = -A\omega^2 = -3 \cdot 10^{-2} \cdot 2,47 = -7,4 \text{ м/с}^2. \quad (5)$$

Пример № 7. Задан закон гармонических колебаний точки: $x(t) = A \cos \omega t$, причём, $A = 5$ см, $\omega = 2$ рад/с. Определить модуль ускорения для момента времени, когда скорость точки достигнет значения 8 см/с.

1. Запишем уравнение для скорости точки

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin \omega t. \quad (1)$$

2. Для интересующего нас момента времени, когда $\dot{x}(t) = 8$ м/с уравнение (1) перепишется следующим образом

$$\dot{x}(\tau) = -A\omega \sin \omega \tau, \quad (2)$$

рассматривая далее только модули величин, можно определить значение τ

$$\frac{\dot{x}(\tau)}{A\omega} = \sin \omega \tau, \quad \omega \tau = \arcsin\left(\frac{\dot{x}(\tau)}{A\omega}\right) = 0,92 \text{ рад}, \quad (3)$$

$$\tau = \frac{1,5}{\omega} = 0,46 \text{ с}. \quad (4)$$

3. Определим модуль ускорения точки в момент времени $\tau = 0,46$ с

$$|\ddot{x}(\tau)| = A\omega^2 \cos \omega \tau, \quad (5)$$

$$|\ddot{x}(\tau)| = 5 \cdot 10^{-2} \cdot 4 \cos 2 \cdot 0,46 \cong 12 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}^2. \quad (6)$$

Пример № 8. Колеблющаяся гармонически точка достигает наибольшего отклонения от положения равновесия $A = 10$ см и максимальной скорости $v_{\max} = 20$ см/с. Определить циклическую частоту колебаний и максимальное значение ускорения.

1. Пусть точка колеблется в соответствии с уравнениями

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (1)$$

$$\dot{x}(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (2)$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (3)$$

2. Запишем уравнение скорости (2) для амплитудного значения, когда $\sin(\omega t + \varphi_0) = 1$

$$\dot{x}_{\max} = A\omega, \Rightarrow \omega = \frac{\dot{x}_{\max}}{A} = 2 \frac{\text{рад}}{\text{с}}. \quad (4)$$

3. Максимальное значение ускорения определится как

$$\ddot{x}_{\max} = -A\omega^2 = -0,4 \text{ м/с}^2. \quad (5)$$

Пример № 9. При нулевой начальной фазе гармонические колебания точки происходят таким образом, что: наибольшее значение скорости достигает величины $v_{\max} = 10$ см/с, а максимальное ускорение $a_{\max} = 100$ см/с². Найти циклическую частоту ω , период T и амплитуду A .

1. Выразим амплитудные значения скорости и ускорения, воспользовавшись уравнениями (2) и (3) предыдущей задачи, образовав систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_{\max} = A\omega; \\ \ddot{x}_{\max} = -A\omega^2. \end{cases} \quad (1)$$

2. Выразим из первого уравнения системы (1) амплитуду и подставим это значение во второе уравнение

$$A = \frac{\dot{x}_{\max}}{\omega}, \Rightarrow \ddot{x}_{\max} = \frac{\dot{x}_{\max}}{\omega} \omega^2, \Rightarrow \omega = \frac{\ddot{x}_{\max}}{\dot{x}_{\max}} = 10 \frac{\text{рад}}{\text{с}}. \quad (2)$$

3. Определим период колебаний

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6,28}{10} = 0,628 \text{ с}. \quad (3)$$

4. Амплитуда колебаний определится из первого уравнения системы (1)

$$A = \frac{\dot{x}_{\max}}{\omega} = \frac{10^{-2}}{10} \cong 10^{-2} \text{ м}. \quad (4)$$

Пример № 10. Гармонические колебания точки характеризуются тем, что в некоторый момент времени τ_1 смещение точки из положения равновесия было равно $x_1 = 5$ см. После увеличения фазы колебаний в два раза смещение стало равным $x_2 = 8$ см. Определить амплитуду колебаний, если они протекают по закону $x(t) = A \sin \omega t$.

1. Запишем уравнения смещения точки для моментов времени τ_1 и τ_2

$$\begin{cases} x_1 = A \sin \omega \tau_1; \\ x_2 = A \sin 2\omega \tau_1. \end{cases} \quad (1)$$

2. Преобразуем синус двойного угла

$$\sin 2\omega \tau_1 = 2 \sin \omega \tau_1 \cos \omega \tau_1. \quad (2)$$

3. Перепишем систему уравнений (1) с учетом преобразования (2)

$$\begin{cases} x_1 = A \sin \omega \tau_1; \\ x_2 = A 2 \sin \omega \tau_1 \cos \omega \tau_1. \end{cases} \quad (3)$$

4. Поделим уравнения системы (3) друг на друга почленно и определим значение фазы для момента времени τ_1

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{2 \cos \omega t}, \Rightarrow \omega t = \arccos\left(\frac{x_2}{2x_1}\right) = \arccos 0,8 = 0,64 \text{ рад.} \quad (4)$$

5. Подставим значение фазы в первое уравнение системы (1) и разрешим полученное соотношение относительно амплитуды

$$x_1 = A \sin 0,64, \Rightarrow A = \frac{x_1}{\sin 0,64} \cong 8,33 \cdot 10^{-2} \text{ м.} \quad (5)$$

Пример № 11. Материальная точка массой $m = 0,01$ кг колеблется в соответствие с уравнением

$$x(t) = 0,01 \cos(1,5\pi t + \pi/3).$$

Для момента времени $\tau = 1$ с определить смещение точки из положения равновесия, скорость, ускорение и величину возвращающей силы.

1. В данном случае амплитуда колебаний равна $A = 10^{-2}$ м, циклическая частота – $\omega = 25\pi$ рад/с, начальная фаза – $\pi/3$ рад, поэтому уравнение смещения материальной точки для заданного момента времени примет вид

$$x(\tau) = 0,01 \cos(1,5 \cdot 3,14 \cdot 1 + 1,046) = 0,01 \cos 5,756 \cong 8,8 \cdot 10^{-3} \text{ м.} \quad (1)$$

2. Уравнение для скорости точки в общем виде запишется в виде производной координаты по времени

$$\dot{x}(t) \equiv \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0),$$

для момента времени $\tau = 1$ с

$$\dot{x}(\tau) = -0,01 \cdot 4,71 \sin 5,756 \cong 2,35 \cdot 10^{-2} \text{ м/с.} \quad (2)$$

3. Ускорение точки в общем случае

$$\ddot{x}(t) \equiv \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (3)$$

для заданного момента времени $\tau = 1$ с

$$\ddot{x}(\tau) = -0,01 \cdot 22,2 \cos 5,756 \cong 0,2 \text{ м/с}^2. \quad (4)$$

4. Возвращающая сила, действующая на точку в момент времени $\tau = 1$ с

$$|\vec{F}| = m\ddot{x} = 0,01 \cdot 0,2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Н.} \quad (5)$$

Пример № 12. Материальная точка совершает гармонические колебания по закону $x(t) = 0,02 \cos(\omega t + \varphi_0)$ так, что в начальный момент времени смещение точки составляет $x(0) = 0,01$ м при положительном направлении скорости. Определить начальную фазу колебаний φ_0 .

1. Перепишем уравнение движения для момента времени $t = 0$

$$x(0) = 0,02 \cos \varphi_0. \quad (1)$$

2. Разрешим уравнение (1) относительно начальной фазы

$$\varphi_0 = \arccos \frac{0,01}{0,02} = \frac{\pi}{3} \text{ рад.} \quad (2)$$

3. Значению аргумента у косинуса 0,5 удовлетворяют два значения угла, $\pi/3$ и $5\pi/3$. Принимаемое для заданных условий значение угла определим из условия $\dot{x}(0) > 0$

$$\dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (3)$$

Перепишем уравнение (3) для момента времени $t = 0$

$$\dot{x}(t) = -A\omega \sin \varphi_0, \quad (4)$$

Подставим поочерёдно в уравнение (4) значения углов: при значении угла $\pi/3$ скорость имеет отрицательное значение, а при $5\pi/3$ скорость положительна, что удовлетворяет условию задачи. Следовательно, начальную фазу следует принять равной $\varphi_0 = 5\pi/3$.

Пример № 13. Колебания материальной точки массой $m = 10^{-3}$ кг протекают с амплитудой $A = 10^{-2}$ см при частоте $\nu = 1$ Гц. Определить скорость точки с момент времени, когда её смещение из положения равновесия составит $x = 5 \cdot 10^{-3}$ м. Найти амплитудное значение возвращающей силы, действующей на точку и полную механическую энергию.

1. Составим систему уравнений, состоящую из зависимостей смещения и скорости от времени

$$\begin{cases} x(t) = A \cos(\omega t + \varphi); \\ \dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi). \end{cases}$$

(1)

2. Исключим их уравнений системы (1) время для чего возведём их в квадрат

$$x^2 = A^2 \cos^2(\omega t + \varphi), \quad \dot{x}^2 = A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi). \quad (2)$$

3. Освободимся от коэффициентов при тригонометрических функциях

$$\frac{x^2}{A^2} = \cos^2(\omega t + \varphi), \quad \frac{\dot{x}^2}{A^2 \omega^2} = \sin^2(\omega t + \varphi). \quad (3)$$

4. Сложим последние уравнения почленно

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{A^2 \omega^2} = \cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi), \quad (4)$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{A^2 \omega^2} = 1, \quad \frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{4\pi^2 \nu^2 A^2} = 1. \quad (5)$$

5. Разрешим уравнение (5) относительно скорости движения точки

$$x^2 + \frac{\dot{x}^2}{4\pi^2 \nu^2} = A^2, \quad \dot{x}^2 = 4\pi^2 \nu^2 (A^2 - x^2), \quad (6)$$

$$\dot{x} = 2\pi\nu \sqrt{A^2 - x^2} = 6,28 \cdot 1 \sqrt{5 \cdot 10^{-3}} \cong \pm 0,44 \text{ м/с}. \quad (7)$$

6. Амплитудное значение возвращающей силы пропорционально массе точки и её ускорению

$$F = m\ddot{x} = -m\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi), \quad F_{\max} = -4\pi^2 \nu^2 mA. \quad (8)$$

$$F_{\max} \cong 4 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} \cong 40 \text{ мкН}. \quad (9)$$

7. При гармонических колебаниях суммарная энергия материальной точки определяется в виде суммы кинетической и потенциальной энергии. Поскольку в этой задаче речь идёт о колебаниях, протекающих без потерь, то максимальное значение кинетической энергии будет равно максимальному значению потенциальной энергии. Полную энергию целесообразно вычислить, в этой связи, определив максимальное значение кинетической энергии

$$\Pi_{\max} = K_{\max} = E = \frac{mv_{\max}^2}{2}. \quad (10)$$

8. Амплитудное значение скорости определим из второго уравнения системы (1)

$$\dot{x}_{\max} = -A \cdot 2\pi\nu = -10^{-3} \cdot 6,28 \cdot 1 \cong -6,28 \cdot 10^{-3} \text{ м/с},$$

(11)

$$K_{\max} \cong \frac{10^{-3} \cdot 40}{2} \cong 20 \text{ мДж}. \quad (12)$$

Пример № 14. Материальная точка массой $m = 1$ кг колеблется гармонически с периодом $T = 1$ с, при этом максимальное смещение точки из положения равновесия равно $A = 1$

м. В начальный момент времени смещение точки составляет $x(0) = 0,33$ м. Определить смещение, скорость и ускорение точки в момент времени $\tau = 0,5$ с.

1. Составим уравнение гармонических колебаний точки в соответствии с заданными условиями

$$x(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0\right). \quad (1)$$

2. Начальную фазу колебаний φ_0 определим при подстановке значения времени $t = 0$ в уравнение (1)

$$x(0) = A \cos \varphi_0, \Rightarrow \varphi_0 = \arccos \frac{x(0)}{A} = \arccos 0,333 \cong 0,8\pi \text{ рад}. \quad (2)$$

3. Определим смещение точки для заданного момента времени τ

$$x(t) = 1 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{1} \cdot 0,5 + 0,8\pi\right) = 1 \cdot \cos 1,8\pi \cong 0,8 \text{ м}. \quad (3)$$

4. Найдём скорость точки в заданный момент времени

$$\dot{x}(\tau) = -A \frac{2\pi}{T} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \tau + 0,8\pi\right) = -1 \cdot 6,28 \sin 1,8\pi \cong 3,7 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (4)$$

5. Ускорение в данный момент времени будет составлять

$$\ddot{x}(\tau) = -A \frac{4\pi^2}{T^2} \cos(1,8\pi) \cong -40 \cos 1,8\pi \cong -32,4 \text{ м/с}^2. \quad (5)$$

Пример № 15. Материальная точка массой $m = 1$ кг, соединённая с горизонтальной пружиной колеблется гармонически с амплитудой $A = 0,1$ м. Период колебаний составляет $T = 2$ с. В начальный момент времени точка имеет максимальное смещение из положения статического равновесия. Определить величину кинетической и потенциальной энергии для момента времени $\tau = 1,5$ с.

1. Запишем уравнение колебаний материальной точки

$$x(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0\right). \quad (1)$$

2. Определим начальную фазу колебаний из условия, что при $t = 0$ величина смещения $x(0) = A$

$$A = A \cos \varphi_0, \Rightarrow \cos \varphi_0 = 1, \Rightarrow \varphi_0 = 0. \quad (2)$$

3. Уравнение колебаний на основании уравнений (1) и (2) можно переписать следующим образом

$$x(t) = 0,1 \cos(\pi t), \quad (3)$$

$$x(\tau) = 0,1 \cos(1,5\pi) \cong 0. \quad (4)$$

4. Запишем на основании уравнения для смещения (3) уравнение скорости точки

$$\dot{x}(t) = -A \frac{2\pi}{T} \sin(\pi t). \quad (5)$$

5. Подставим в уравнение скорости заданные параметры колебания

$$\dot{x}(\tau) = -0,1\pi \sin(1,5\pi) \cong 0,1 \text{ м/с}. \quad (6)$$

6. Определим величину кинетической энергии в заданный момент времени

$$K = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{1 \cdot 0,01}{2} = 0,05 \text{ Дж}. \quad (7)$$

7. Потенциальная энергия точки зависит от упругости пружины и величины смещения

$$\Pi = \frac{kx^2}{2}. \quad (8)$$

Поскольку смещение в заданный момент времени $\tau = 1,5$ с равно нулю, то и потенциальная энергия будет нулевой.

Пример № 16. Амплитуда гармонических колебаний составляет $A = 0,1$ м, максимальное значение скорости $\dot{x}_{\max} = 0,5$ м/с, начальная фаза равна $\varphi_0 = 15^\circ$. Определить смещение, скорость и ускорение точки через $\tau = 0,2$ с после начала движения.

1. Запишем уравнение смещения и скорости гармонических колебаний в общем виде

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad \dot{x}(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (1)$$

2. В моменты времени, когда скорость достигает своего максимального значения $\cos(\omega t + \varphi_0) = 1$, поэтому

$$\dot{x}_{\max} = A\omega, \Rightarrow \omega = \frac{\dot{x}_{\max}}{A} = \frac{0,5}{0,1} = 5 \frac{\text{рад}}{\text{с}}. \quad (2)$$

3. Определим смещение и скорость точки в заданный момент времени $\tau = 0,2$ с, для чего подставим заданные и найденные значения величин в уравнения (1)

$$x(\tau) = 0,1 \sin\left(5 \cdot 0,2 + \pi \frac{15}{180}\right) \cong 9,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}. \quad (3)$$

$$\dot{x}(\tau) = A \cos\left(\omega \tau + \frac{\pi}{12}\right) = 0,1 \cdot 5 \cos(5 \cdot 0,2 + 0,262) \cong 0,15 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (4)$$

4. Ускорение точки при $\tau = 0,2$ с определится следующим образом

$$\ddot{x}(\tau) = -A\omega^2 \sin\left(\omega \tau + \frac{\pi}{12}\right) \cong 0,1 \cdot 25 \cdot 0,953 \cong 2,4 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}. \quad (5)$$

Пример № 17. Точка массой $m = 1 \cdot 10^{-2}$ кг колеблется с периодом $T = 10$ с при начальной фазе $\varphi_0 = \pi/10$. Найти время, через которое смещение точки из положения равновесия достигнет половины амплитуды. Определить для этого момента времени значения скорости и ускорения точки если полная энергия колебательного движения составляет $E = 0,1$ Дж.

1. В уравнение гармонических колебаний материальной точки

$$x(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0\right), \quad (1)$$

подставим заданное условие для смещения точки, когда $x(\tau) = 0,5A$

$$\frac{A}{2} = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} \tau + \varphi_0\right), \Rightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{T} \tau + \varphi_0\right) = \frac{1}{2}. \quad (2)$$

2. Полученное уравнение является основанием для определения величины τ

$$\left(\frac{2\pi}{T} \tau + \varphi_0\right) = \arcsin \frac{1}{2}, \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{T} \tau + \varphi_0\right) = \frac{\pi}{6}, \quad (3)$$

$$\tau = \frac{10}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{10} + \frac{\pi}{10}\right) = 1,5 \text{ с}. \quad (4)$$

3. Воспользовавшись уравнением полной энергии при колебательном движении, определим амплитуду колебаний

$$E = \frac{m\omega^2 A^2}{2}, \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E}{\omega^2 m}} = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{2E}{m}} \cong 0,16 \sqrt{\frac{2 \cdot 0,1}{10^{-2}}} \cong 0,7 \text{ м}. \quad (5)$$

6. Определим далее скорость и ускорение колеблющейся точки при $\tau = 1,5$ м с, когда $(2\pi/T + \varphi_0) = \pi/6$

$$\dot{x}(\tau) = A\omega \cos(\pi/6) = A \frac{2\pi}{T} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0,38 \text{ м/с}. \quad (6)$$

$$\ddot{x}(\tau) = -A\omega^2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cong -0,7 \cdot 0,4 \cdot 0,5 \cong -1,4 \frac{\text{М}}{\text{с}^2},$$

Знак минус ускорения показывает, что вектор ускорения в данный момент времени направлен в сторону противоположную векторам смещения и скорости.

Пример № 18. Определить силу, действующую на точку массой $m = 10 \text{ г}$ в момент времени τ , когда скорость достигнет величины $\dot{x}(\tau) = 0,5 \text{ м/с}$, если амплитуда колебаний равна $A = 10 \text{ см}$, циклическая частота $\omega = 10 \text{ рад/с}$, начальная фаза $\varphi_0 = 0$.

1. Запишем уравнения для смещения и скорости материальной точки

$$x(t) = A \sin \omega t, \quad \dot{x}(t) = A\omega \cos \omega t. \quad (1)$$

2. Подставим в уравнение скорости, заданные величины и определим время τ

$$\dot{x}(\tau) = 0,1 \cdot 10 \cos(10\tau), \quad \cos(10\tau) = 0,5; \quad \tau = \frac{\arccos 0,5}{10} = \frac{\pi}{3 \cdot 10} \cong 0,1 \text{ с}. \quad (2)$$

3. Определим ускорение в момент времени $\tau = 0,1 \text{ с}$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega \sin \omega t; \quad \ddot{x}(\tau) = -0,1 \cdot 10 \sin(10 \cdot 0,1) \cong 0,84 \text{ м/с}^2. \quad (3)$$

4. Найдём действующую в момент времени τ силу

$$F(\tau) = m\ddot{x}(\tau) = 10^{-2} \cdot 0,84 = 8,4 \cdot 10^{-3} \text{ Н}. \quad (4)$$

Пример № 19. Материальная точка массой $m = 0,1 \text{ кг}$ совершает гармонические колебания при нулевой начальной фазе с периодом $T = 10 \text{ с}$. За какое время с момента начала движения точка сместится на половину амплитуды $A = 0,2 \text{ м}$. Какой кинетической энергией будет обладать точка?

1. Запишем уравнение колебаний точки при заданных условиях

$$x(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} \tau\right), \quad \frac{A}{2} = A \sin\left(\frac{\pi}{5} \tau\right), \quad \sin\left(\frac{\pi}{5} \tau\right) = \frac{1}{2}, \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{5} \tau = \frac{\pi}{6}, \quad \Rightarrow \quad \tau = 0,83 \text{ с}. \quad (2)$$

2. Определим скорость в точки в момент времени $\tau = 0,83 \text{ с}$

$$\dot{x}(\tau) = A \frac{2\pi}{T} \sin\left(\frac{\pi}{5} \tau\right) = 0,2 \cdot 0,628 \sin 0,2\pi \cong 0,074 \frac{\text{М}}{\text{с}}. \quad (3)$$

3. Сила, действующая на точку

$$F(\tau) = \frac{m\dot{x}^2(\tau)}{2} = \frac{0,1 \cdot 5,45 \cdot 10^{-3}}{2} \cong 2,7 \cdot 10^{-4} \text{ Н}. \quad (4)$$

Пример № 20. Материальная точка, соединённая с горизонтальной пружиной совершает гармонические колебания с нулевой начальной фазой. Определить отношение кинетической энергии точки к её потенциальной энергии для момента времени $\tau = T/12$.

1. Запишем уравнения для смещения и скорости в общем виде

$$x(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right), \quad \dot{x}(t) = A \frac{2\pi}{T} \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right). \quad (1)$$

2. Выразим коэффициент упругости пружины через частоту собственных колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}. \quad (2)$$

3. Запишем уравнения кинетической и потенциальной энергии точки

$$K = \frac{m\dot{x}^2}{2}, \quad \Pi = \frac{kx^2}{2}. \quad (3)$$

4. Подставим в уравнения (3) значения скорости, смещения и коэффициента упругости пружины

$$K = \frac{2\pi^2 m}{T^2} A^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right), \quad \Pi = \frac{2\pi^2 m}{T^2} A^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right). \quad (4)$$

5. Определим отношение кинетической и потенциальной энергии

$$\frac{K}{\Pi} = \frac{\cos^2(2\pi t/T)}{\sin^2(2\pi t/T)} = \operatorname{ctg}^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right). \quad (5)$$

6. Соотношение энергий материальной точки при $\tau = T/12$

$$\frac{K}{\Pi} = \operatorname{ctg}^2\left(\frac{2\pi T}{12T}\right) = \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{6} \cong 3. \quad (6)$$

Пример № 21. Записать уравнение гармонических колебаний, если известно, что максимальное значение кинетической энергии равно $K = 1 \text{ мкДж}$, максимальная возвращающая сила $F_{\max} = 1 \text{ мН}$, при периоде колебаний $T = 1 \text{ с}$ и начальной фазе $\phi_0 = \pi/4$.

1. Максимальное значение кинетической энергии равно полной энергии материальной точки

$$K_{\max} = E = \frac{2\pi^2 m}{T^2} A^2. \quad (1)$$

2. Воспользовавшись уравнением (2) предыдущей задачи, определим величину максимальной силы

$$F_{\max} = kA = \frac{4\pi^2 m}{T^2} A. \quad (2)$$

3. Определим величину амплитуды, поделив уравнение (1) на уравнение (2)

$$\frac{K_{\max}}{F_{\max}} = \frac{A}{2}, \quad A = \frac{2K_{\max}}{F_{\max}} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{10^{-3}} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}. \quad (3)$$

4. Запишем уравнение колебаний

$$x(t) = 2 \cdot 10^{-3} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot 10^{-3} \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right). \quad (4)$$

Пример № 22. Тело массы $m = 1 \text{ кг}$ подвешенное на вертикальной пружине совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 0,1 \text{ м}$ и максимальным значением скорости 1 м/с . Определить жесткость пружины.

1. Запишем уравнение для смещения и скорости массы, соединённой с пружиной

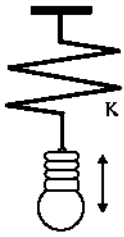
$$\begin{cases} x(t) = A \sin \omega t; \\ \dot{x}(t) = A\omega \cos \omega t. \end{cases} \quad (1)$$

2. Уравнение амплитудного значения скорости позволяет найти собственную циклическую частоту колебаний ω

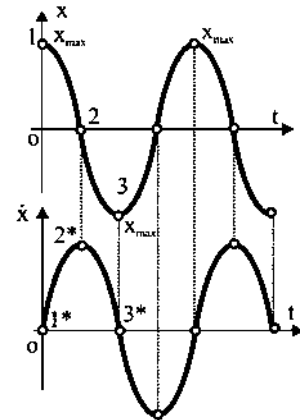
$$\dot{x}_{\max} = A\omega, \Rightarrow \omega = \frac{\dot{x}_{\max}}{A} = \frac{1}{0,1} = 10 \frac{\text{рад}}{\text{с}}. \quad (2)$$

3. Циклическая частота собственных колебаний массы на пружине без учёта потерь определяется уравнением

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \Rightarrow k = \omega^2 m = 100 \frac{\text{Н}}{\text{м}}. \quad (3)$$



Пример № 23. Электрическая лампочка, соединённая с пружиной совершает вертикальные колебания с постоянной частотой $\nu = 1 \text{ Гц}$ и амплитудой $A = 20 \text{ см}$. При нахождении лампочки в крайнем нижнем и крайнем верхнем положении кажется, что она вспыхивает ярче, несмотря на то, что через нить накала течёт постоянный по величине ток. Почему?



1. Запишем уравнения смещения и скорости при гармонических свободных колебаниях и построим графики этих зависимостей

$$\begin{cases} x(t) = A \cos \frac{2\pi}{T} t; \\ \dot{x}(t) = A \frac{2\pi}{T} \sin \frac{2\pi}{T} t. \end{cases} \quad (1)$$

2. Из системы уравнений (1) видно, что в момент времени 1 отклонение лампочки от положения равновесия будет максимальным, в то время как скорость лампочки (точка 2* нижнего графика) будет равна нулю, другими словами, у наблюдателя будет создаваться впечатление что, лампочка на некоторое мгновение останавливается. В окрестностях точек 1*, 3* скорость лампочки будет иметь относительно малое значение.

3. Вычислим максимальное значение скорости

$$\dot{x}_{\max} = 0,2 \cdot 6,28 \sin \frac{\pi}{2} = 1,25 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (2)$$

4. Когда смещение лампочки будет достигать значений $x(t) = 0,95 A$ скорость лампочки будет равна $0,2 \text{ м/с}$.

Приме № 24. Математический маятник длиной $l = 1 \text{ м}$ с массой повешенного шарика $m = 0,1 \text{ кг}$ отклоняют от положения равновесия на расстояние $\delta = 0,1 \text{ м}$. Определить действующую на шарик силу и зависимость потенциальной энергии шарика от смещения δ .

1. Изобразим маятник в положении, заданном по условию задачи и приложим к шарiku действующие силы: силу тяжести mg и силу натяжения нити T . Выберем систему координат, совместив её начало с центром шарика, который в данной задаче можно считать материальной точкой, так как длина нити подвеса полагается существенно большей размеров шарика.

2. Величина возвращающей силы F численно будет равна проекции силы тяжести mg на направление выбранной оси x

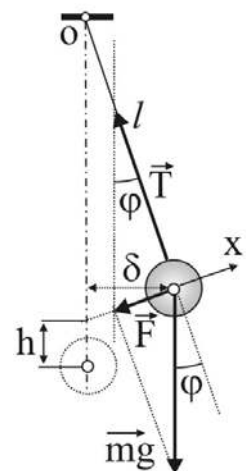
$$|\vec{F}| = mg \sin \varphi. \quad (1)$$

3. Выразим угол отклонения маятника φ через его параметры

$$\sin \varphi = \delta / \ell. \quad (2)$$

4. Совместив уравнения (1) и (2), получим следующее уравнение для модуля возвращающей силы

$$|\vec{F}| = \frac{mg\delta}{\ell} = \frac{0,1 \cdot 10 \cdot 0,1}{1} = 0,1 \text{ Н}. \quad (3)$$



5. Потенциальная энергия численно равна работе, совершаемой при подъеме шарика на некоторую высоту h . Элементарная работа, при малых значениях угла отклонения определится в виде произведения возвращающей силы (3) на бесконечно малое перемещение шарика $d\delta$

$$d\Pi = |\delta A| = \frac{mg\delta}{\ell} d\delta. \quad (4)$$

6. Конечное изменение потенциальной энергии определится в виде интеграла

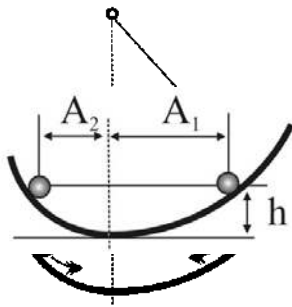
$$\Pi = \frac{mg}{\ell} \int_0^{\delta} \delta d\delta = \frac{mg\delta^2}{2\ell} \cong 0,05 \text{ Дж}. \quad (5)$$

Пример № 25. Математический маятник длиной $l = 10$ м колеблется с амплитудой $A = 0,1$ м. Считая колебания маятника малыми, определить максимальную скорость шарика маятника.

1. При отклонении маятника на величину A в точке наивысшего подъёма шарика его энергия будет потенциальной, величина которой определяется уравнением (5) предыдущей задачи. В момент прохождения шариком маятника положения статического равновесия вся потенциальная энергия преобразуется в кинетическую энергию.

2. Поскольку движение математического маятника анализируется без учёта затухания (силы сопротивления отсутствуют) то справедлив закон сохранения механической энергии

$$\frac{mgA^2}{2\ell} = \frac{mv_{\max}^2}{2}; \quad v_{\max} = A\sqrt{\frac{g}{\ell}} \cong 0,1 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (1)$$



Пример № 26. Горизонтальный жёлоб слева от нижней линии выгнут по цилиндрической поверхности радиуса r , а справа – по поверхности радиуса R . Найти отношение наибольших отклонений влево и вправо при малых колебаниях в жёлобе небольшого шарика.

1. Выберем за нулевой уровень потенциальной энергии положение шарика в точке стыковки поверхностей. В соответствии с законом сохранения энергии, при отклонении шарика из положения статического равновесия вправо на высоту h , шарик запасёт потенциальную энергию, определяемую уравнением (1) предыдущей задачи, которое для рассматриваемого случая представится следующим образом

$$\Pi_1 = \frac{mgA_1^2}{2R}. \quad (1)$$

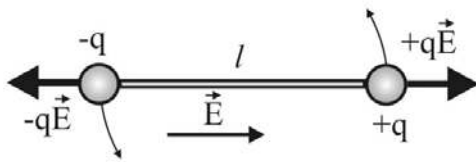
2. После скатывания в точку равновесия шарик по инерции станет подниматься по жёлобу меньшего радиуса на ту же высоту, но при этом отклонится на меньшее расстояние от положения равновесия

$$\Pi_2 = \frac{mgA_2^2}{2r}. \quad (2)$$

3. Поскольку потери при колебаниях отсутствуют, то возможно энергии, определяемые уравнениями (1) и (2) приравнять

$$\Pi_1 = \Pi_2; \quad \frac{mgA_1^2}{2R} = \frac{mgA_2^2}{2r}, \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \sqrt{\frac{R}{r}}. \quad (3)$$

Пример № 27. На концах лёгкого диэлектрического стержня длиной l закреплено два точечных разноимённых, заряда модули, которых одинаковы и равны q . Конструкция помещена в электрическое поле с напряжённостью E . На заряды действует сила Кулона $F = \pm qE$. Найти массу каждого шарика m , если амплитуда малых поперечных колебаний равна A , а максимальная скорость v_m .



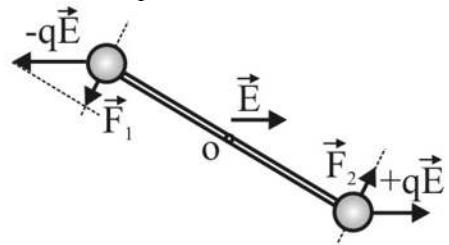
1. Система электрических зарядов, приведенная на рисунке, находится в положении статического равновесия. При повороте стержня вокруг оси, проходящей через середину стержня перпендикулярно плоскости вращения, т.е. вокруг точки O , возникнут проекции сил Кулона F_1 и F_2 , которые будут стремиться вернуть заряды в исходное положение. Другими словами возникнет возвращающие силы, являющиеся необходимым условием возникновения колебаний.

2. При амплитудном значении смещения система зарядов будет обладать потенциальной энергией

$$\Pi = \frac{qEA^2}{\ell}. \quad (1)$$

3. В момент прохождения зарядами положения статического равновесия вследствие отсутствия сопротивления, потенциальная энергия преобразуется в кинетическую энергию

$$\frac{mv_m^2}{2} = \frac{qEA^2}{\ell}, \Rightarrow m = \frac{2qEA^2}{\ell v_m^2}. \quad (2)$$



Пример № 28. Шар массы m и радиуса r скользит по поверхности лунки с кривизной R . Найти зависимость потенциальной энергии шара от величины его малых колебаний x из положения статического равновесия.

1. Охарактеризуем смещение шара из положения равновесия углом отклонения φ . Смещение центра шара на расстояние x от положения равновесия приведёт к изменению взаимного направления силы тяжести mg и нормальной реакции связи N , что, собственно и является причиной возникновения возвращающей силы F

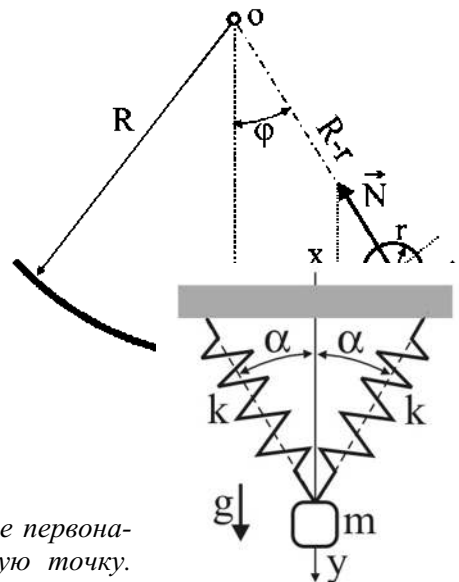
$$F = mg \sin \varphi = mg \frac{x}{R-r}. \quad (1)$$

2. Бесконечно малое изменение потенциальной энергии будет численно равно элементарной работе, совершаемой на перемещении dx , составит

$$d\Pi = \frac{mgx}{R-r} dx. \quad (2)$$

3. Изменение потенциальной энергии на конечном перемещении запишется в виде следующего определённого интеграла

$$\Pi = \frac{mg}{R-r} \int_0^x x dx = \frac{mgx^2}{2(R-r)}. \quad (3)$$



Пример № 29. Две одинаковые, недеформированные первоначально, пружины жёсткостью k , имеют одну общую точку. Груз, какой массы необходимо подвесить к общей точке пружин, чтобы он опустился в положение равновесия на малое расстояние y ?

1. Определим удлинение пружины в проекции на вертикальную ось

$$\Delta y = y \cos \alpha. \quad (1)$$

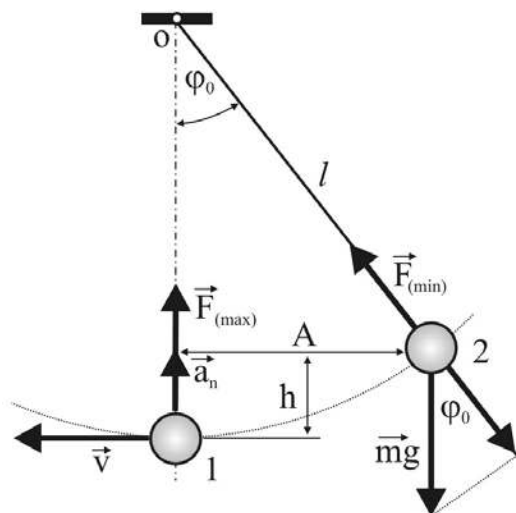
2. Проекция силы упругости одной пружины в проекцию на вертикальную ось

$$F = k\Delta y \cos \alpha = ky \cos^2 \alpha. \quad (2)$$

3. При подвешивании к общей точке пружин груза массой m суммарная сила упругости в состоянии равновесия по модулю должна быть равна силе тяжести

$$mg = 2ky \cos^2 \alpha, \Rightarrow m = \frac{2ky \cos^2 \alpha}{g}. \quad (3)$$

Пример № 30. Математический маятник длиной $l = 1$ м с массой, подвешенного к нити шарика $m = 1$ кг, совершает малые гармонические колебания с амплитудой $A = 0,1$ м. Определить максимальное и минимальное значение силы натяжения нити.



1. Определим угол отклонения нити маятника

$$\varphi_0 = \arcsin \frac{A}{l} \cong 5,74^\circ. \quad (1)$$

2. Минимальное значение силы натяжения будет наблюдаться в положении шарика 2, когда он обладает только потенциальной энергией и скорость равна нулю. Максимальное натяжение нити подвеса будет иметь место в момент прохождения массой положения статического равновесия 1.

3. При амплитудном отклонении нити математического маятника сила натяжения нити по модулю будет равна проекции силы тяжести на направление отклонённой нити

$$F_{(\min)} = mg \cos \varphi_0 \cong 1 \cdot 10 \cdot 0,995 \cong 9,95 \text{ Н}. \quad (1)$$

4. В момент прохождения шариком точки статического равновесия эта энергия будет только кинетическая, что позволяет, используя закон сохранения найти величину скорости

$$\Pi = mgh = mg\ell(1 - \cos \varphi_0), \quad K = \frac{mv_{(\max)}^2}{2}, \quad (2)$$

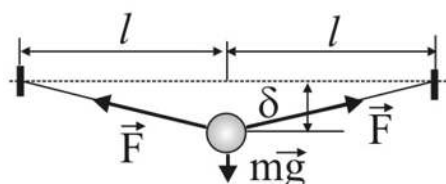
$$mg\ell(1 - \cos \varphi_0) = \frac{mv_{(\max)}^2}{2}, \quad v_{(\max)} = \sqrt{2g\ell(1 - \cos \varphi_0)}. \quad (3)$$

5. Поскольку шарик маятника движется по круговой траектории радиуса l , то движение будет ускоренным, величина нормального ускорения определится как

$$a_n = \frac{v_{(\max)}^2}{\ell} = 2g(1 - \cos \varphi_0). \quad (4)$$

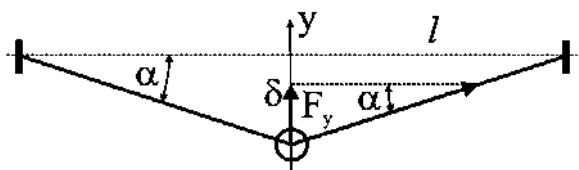
6. Максимальное значение силы натяжения в положении шарика 1 будет равно сумме силы тяжести и фиктивной силы инерции, обусловленной наличием нормального ускорения

$$F_{(\max)} = mg + \frac{mv_{(\max)}^2}{\ell} = m[g + 2g(1 - \cos \varphi_0)] \cong 10,1 \text{ Н}. \quad (5)$$



Пример № 31. Посередине натянутой струны длины $2l$ закреплён шар массой m . Определить суммарную силу F_Σ действующую на шар со стороны струны, если его поперечное смещение из положения равновесия $\delta \ll l$, а сила натяжения струны F не зависит от смещения. Как зависит потенциальная энергия шара от его смещения δ ? С какой скоростью движется шар в момент прохождения положения статического равновесия? Амплитуда смещения шара A .

1. Определим проекцию силы натяжения струны на направление смещения шара



$$F_y = F \cos \alpha \cong F \operatorname{tg} \alpha \cong F \frac{\delta}{\ell}. \quad (1)$$

2. Модуль силы, приложенной к шару со стороны струны, определится как сумма проекций сил натяжения

$$F_{\Sigma} = 2F_y = -\frac{2F\delta}{\ell}, \quad F_{\Sigma(\max)} = -\frac{2FA}{\ell}. \quad (2)$$

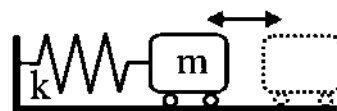
3. Потенциальная энергия будет численно равна работе силы, приложенной к шару на перемещении δ

$$\Pi = A_{0 \rightarrow \delta} = 2F_{\Sigma} \delta = \frac{2F\delta^2}{\ell}. \quad (3)$$

4. Ввиду отсутствия затухания, потенциальная энергия шара в нижнем положении при отклонении на $\delta = A$, полностью трансформируется в кинетическую энергию в момент прохождения шаром положения статического равновесия

$$\frac{2FA^2}{\ell} = \frac{mv_m^2}{2}, \quad v_m = A \sqrt{\frac{2F}{m\ell}}. \quad (4)$$

Пример № 32. Небольшое тело массой $m = 1$ кг соединённое с горизонтальной пружиной, совершает малые колебания с амплитудой $A = 10$ см, причём, максимальное значение энергии достигает величины $E = 50$ Дж. Через какой промежуток времени τ смещение точки после начала движения достигнет половины амплитуды $\delta = 0,5 A$? Какова средняя скорость за это время?



1. По величине заданной энергии можно определить жёсткость пружины, т.к. при амплитудном смещении массы её энергия будет только потенциальной

$$E = \Pi = \frac{kA^2}{2}, \Rightarrow k = \frac{2E}{A^2}. \quad (1)$$

2. Определим далее частоту собственных колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{A} \sqrt{\frac{2E}{m}} \cong 100 \frac{\text{рад}}{\text{с}}. \quad (2)$$

3. Предположим, что колебания происходят по закону

$$x(t) = A \sin \omega t, \quad (3)$$

в этом случае заданное условие смещения, с учётом уравнения (3) можно записать следующим образом

$$\frac{A}{2} = A \sin(\omega \tau), \quad \omega \tau = \arcsin \frac{1}{2}, \quad \omega \tau = 0,52 \text{ рад}, \quad (4)$$

$$\tau = \frac{0,52}{\omega} = 5,3 \cdot 10^{-3} \text{ с}. \quad (5)$$

4. Средняя скорость по определению равна частному от деления перемещения на время, за которое оно совершается

$$\langle v \rangle = \frac{A}{2\tau} \cong 50 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (6)$$

Пример № 33. На какое расстояние δ необходимо сместить из положения равновесия груз массой $m = 0,5$ кг, соединённый с пружиной жёсткостью $k = 200$ Н/м, чтобы он проходил положение равновесия со скоростью $v_m = 10$ м/с?

1. Заданные масса и жёсткость пружины позволяют определить частоту собственных колебаний пружинного маятника

$$\omega = \sqrt{k/m} . \quad (1)$$

2. Максимальная скорость груза определится как

$$v_m = \omega \delta = \delta \sqrt{\frac{k}{m}}, \Rightarrow \delta = v_m \sqrt{\frac{m}{k}} = 0,5 \text{ м} . \quad (2)$$

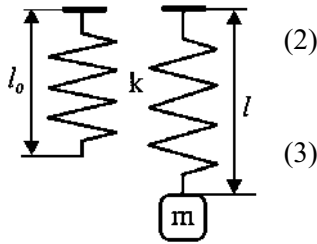
Пример № 34. Колебательная система состоит из вертикальной пружины и небольшого тела массой m_1 . Если к колеблющемуся телу прибавить массу $m_2 = 0,3 \text{ кг}$, то частота колебаний уменьшится в два раза. Определить начальную массу тела.

1. Запишем уравнения собственных частот

$$\begin{cases} \nu_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_1}}; \\ \nu_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}. \end{cases} \quad (1)$$

2. Поделим уравнения друг на друга

$$n = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1}} .$$



3. Разрешим уравнение (2) относительно искомой массы m_1
 $n^2 = 1 + m_2/m_1, m_1 = m_2/(n^2 - 1) = 0,1 \text{ кг} .$

Пример № 35. Материальная точка, соединённая с пружиной колеблется с периодом $T = 12 \text{ с}$. За какое время точка пройдёт расстояние от среднего положения до крайнего? Каково время прохождения первой и второй половины этого пути?

1. Запишем уравнение гармонического колебания в виде

$$x(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) . \quad (1)$$

2. Для момента времени τ , когда точка переместится из положения равновесия на величину амплитуды A уравнение (1) переписывается следующим образом

$$A = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} \tau_1\right), \Rightarrow \frac{2\pi}{T} \tau_1 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}, \Rightarrow \tau_1 = \frac{T}{4} = 3 \text{ с} . \quad (2)$$

3. Время необходимое точке для отклонения на первую половину амплитудного значения определится как

$$\frac{A}{2} = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} \tau_2\right), \Rightarrow \frac{2\pi}{T} \tau_2 = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \Rightarrow \tau_2 = \frac{T}{12} = 1 \text{ с} . \quad (3)$$

4. Время прохождения второй половины пути до максимального отклонения

$$\tau_3 = \tau_1 - \tau_2 = 2 \text{ с} .$$

(4)

Пример № 36. Небольшое тело массой $m = 1 \text{ кг}$ подвешено к пружине длиной $l_0 = 0,2 \text{ м}$ с коэффициентом жёсткости $k = 1 \text{ кН/м}$. Найти положение равновесия относительно ко-

того происходят гармонические колебания с малой амплитудой $A = 1$ см и записать уравнение движения.

1. Определим статическое удлинение пружины при подвешивании к ней тела массой m

$$mg = k\Delta\ell, \quad \Delta\ell = \frac{mg}{k} \cong 0,01 \text{ м}, \quad (1)$$

длина пружины при равновесии массы, таким образом, равна

$$\ell = \ell_0 + \Delta\ell = 0,21 \text{ м}.$$

(2)

2. Определим далее циклическую частоту собственных колебаний массы

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{1000} = 31,6 \frac{\text{рад}}{\text{с}}. \quad (3)$$

3. Запишем уравнение колебаний

$$x(t) = 0,01 \sin 31,6t. \quad (4)$$

Пример № 37. Получить уравнение циклической частоты собственных колебаний математического маятника с длиной нити подвеса l . Определить зависимость углового ускорения шарика маятника от его отклонения φ и величину возвращающей силы.

1. В качестве координаты выберем угол отклонения нити φ . При отклонении нити из положения равновесия на угол φ возникает вращающий момент, стремящийся вернуть шарик обратно. Уравнение движения грузика при этом записывается следующим образом

$$m\ell^2\ddot{\varphi} = -mg\ell \sin \varphi, \quad (1)$$

где $m\ell^2$ – момент инерции грузика маятника относительно оси проходящей через точку O перпендикулярно плоскости чертежа, $\ddot{\varphi}$ – угловое ускорение грузика, $mg\ell \sin \varphi$ – момент силы тяжести.

2. При малых углах отклонения нити от положения равновесия можно принять, что $\sin \varphi \approx \varphi$, в этом случае

$$\ell\ddot{\varphi} + g\varphi = 0, \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0. \quad (2)$$

3. Введём обозначение $\omega^2 = g/\ell$, где ω – циклическая частота собственных колебаний, т.е.

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}. \quad (3)$$

4. Запишем уравнение движения грузика маятника

$$\varphi = \varphi_0 \sin \omega t = \varphi_0 \sin \sqrt{\frac{g}{\ell}} t. \quad (4)$$

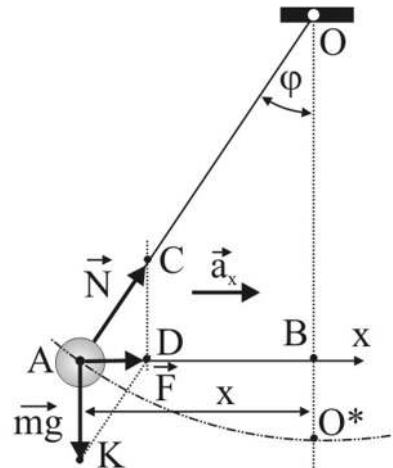
5. Определим далее угловую скорость и угловое ускорение грузика

$$\dot{\varphi} = \varphi_0 \omega \cos \omega t, \quad \ddot{\varphi} = -\varphi_0 \omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 \varphi. \quad (5)$$

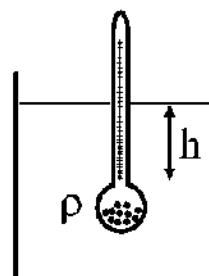
$$\ddot{\varphi} = -\varphi \frac{g}{\ell}. \quad (6)$$

6. Из подобия треугольников $\triangle OAB$ и $\triangle ADK$ следует, что

$$\frac{x}{\ell} = \frac{F}{mg}, \Rightarrow F = \frac{mgx}{\ell} = \frac{mg\ell \sin \varphi}{\ell} = mg \sin \varphi. \quad (7)$$



Пример № 38. Известно, что ареометр совершает колебания в воде с периодом $T = 2$ с. Каков будет период колебаний при опускании ареометра в бензин с плотностью $\rho = 730 \text{ кг/м}^3$?



1. Ареометр обладает положительной плавучестью, к нему приложена сила Архимеда, которая в данном случае будет выполнять роль возвращающей силы

$$F_A = \rho_L g V = \rho_L g s h, \quad (1)$$

где ρ_L – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения, V – объём погруженной части ареометра, s – средняя площадь поперечного сечения, h – глубина погружения.

2. С другой стороны силу, действующую на ареометр при его максимальном заглублении на величину h можно выразить из уравнения гармонического движения по известной схеме

$$\begin{aligned} x(t) &= h \sin \frac{2\pi}{T} t, \\ \dot{x}(t) &= h \frac{2\pi}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t, \\ \dot{x}_{\max} &= h \frac{2\pi}{T}, \quad \ddot{x}_{\max} = -\frac{4\pi^2}{T^2} h, \\ F &= -m\ddot{x} = -m \frac{4\pi^2}{T^2} h. \end{aligned} \quad (2)$$

3. Запишем условие равновесия ареометра в проекции на вертикальную ось

$$\rho_L g s h - m \frac{4\pi^2}{T^2} h = 0, \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho_L g s}}. \quad (3)$$

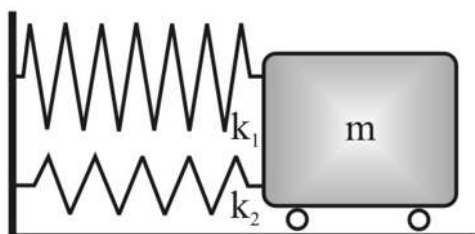
4. образуем систему уравнений

$$\begin{cases} T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho_1 g s}}; \\ T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho_2 g s}}; \end{cases} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}, \quad (4)$$

где T_1 , – период колебаний в воде с плотностью $\rho_1 = 10^3 \text{ кг/м}^3$, T_2 – период колебаний ареометра в керосине с плотностью $\rho_2 = 730 \text{ кг/м}^3$.

5. Разрешим уравнение (4) относительно периода колебаний ареометра в керосине

$$T_2 = T_1 \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} = 2 \sqrt{\frac{10^3}{730}} \cong 2,34 \text{ с}. \quad (5)$$



Пример № 39. Тело массой $m = 1$ кг может без трения скользить по горизонтальной поверхности. Тело прикреплено одновременно к двум пружинам с жёсткостью $k_1 = 1000 \text{ Н/м}$ и $k_2 = 800 \text{ Н/м}$. Определить максимальное значение скорости тела во время его малых собственных колебаний с амплитудой $A = 1$ см.

1. Определим общую жёсткость параллельно соединённых пружин, исходя из того, что они удлиняются на одну и ту же величину x

$$F_1 = k_1 x, \quad F_2 = k_2 x, \quad F = F_1 + F_2 = x(k_1 + k_2), \quad (1)$$

$$kx = x(k_1 + k_2), \Rightarrow k = k_1 + k_2. \quad (2)$$

2. Найдём частоту собственных колебаний массы, соединённой с двумя параллельно соединёнными пружинами

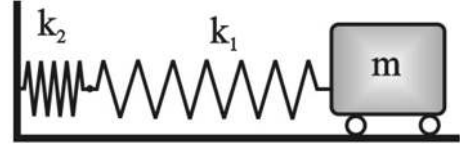
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}. \quad (3)$$

3. Запишем уравнения смещения и скорости гармонического колебания и найдём максимальное значение скорости

$$x(t) = A \sin \omega t; \quad \dot{x}(t) = A \omega \cos \omega t; \quad \dot{x}_{\max} = A \omega, \quad (4)$$

$$\dot{x}_{\max} = A \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} = 10^{-2} \sqrt{\frac{1000 + 800}{1}} = 0,42 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (5)$$

Пример № 40. В условиях предыдущей задачи пружины соединили последовательно. Как это влияет на величину максимальной скорости колеблющейся массы?



1. В данном случае при растяжении или сжатии пружин на разные величины x_1 и x_2 , сила приложенная к концам пружин будет одинаковой, т.е. общая жёсткость пружин определится следующим образом

$$x = x_1 + x_2, \quad F = k_1 x_1, \quad F = k_2 x_2, \quad x_1 = \frac{F}{k_1}, \quad x_2 = \frac{F}{k_2}, \quad (1)$$

$$F = k(x_1 + x_2) = k \left(\frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \right); \quad 1 = k \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right); \quad k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}. \quad (2)$$

2. Определим собственную частоту колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}.$$

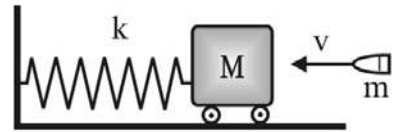
(3)

3. Найдём максимальную скорость массы, подставив значение ω из уравнения (3) в уравнение (5) предыдущей задачи

$$\dot{x}_{\max} = A \omega = A \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}} = 10^{-2} \sqrt{\frac{1000 \cdot 800}{1(1000 + 800)}} \cong 0,21 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (4)$$

Так как эквивалентная жёсткость пружин при последовательном соединении уменьшается приблизительно в четыре раза в сравнении с параллельным их соединением, то скорость максимальная скорость уменьшается в два раза.

Пример № 41. Пуля, массой $m = 10$ гр, летящая горизонтально со скоростью $v = 500$ м/с попадает в тело массой $M = 5$ кг, соединённое с горизонтальной пружиной. Тело вместе с застрявшей в ней пулей смещается из положения равновесия на $A = 10$ см. Записать уравнение возникших гармонических колебаний.



1. Запишем уравнение гармонических колебаний

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (1)$$

2. Для определения начальной фазы φ_0 запишем начальные условия: при $t = 0$, $x(0) = 0$, поэтому $\sin \varphi_0 = 0$, следовательно, $\varphi_0 = \pi$

3. Определим циклическую частоту колебаний массы с застрявшей в ней пулей

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M + m}}. \quad (2)$$

4. Поскольку по условию задачи коэффициент упругости пружины не задан, а потери при движении тела отсутствуют, то возможно для определения k воспользоваться законом

сохранения энергии. При максимальном сжатии пружины она приобретёт потенциальную энергию, которая в процессе перемещения в точку статического равновесия преобразуется в кинетическую энергию

$$\frac{kA^2}{2} = \frac{(M+m)u^2}{2}, \quad (3)$$

где u – скорость движения массы после попадания в неё пули, которую можно определить, используя закон сохранения импульса

$$mv = (M+m)u; \Rightarrow u = \frac{mv}{(M+m)}. \quad (4)$$

5. Разрешим уравнение (3) относительно коэффициента упругости, подставив в него значение скорости u из уравнения (4)

$$k = \frac{(M+m)u^2}{A^2} = \frac{(M+m)}{A^2} \frac{m^2 v^2}{(M+m)^2} = \frac{m^2 v^2}{A^2 (M+m)}, \quad (5)$$

$$k \cong \frac{m^2 v^2}{MA^2} \cong \frac{10^{-4} \cdot 2,5 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^{-2}} \cong 50 \frac{\text{Н}}{\text{м}}. \quad (6)$$

6. Подставим значение коэффициента упругости в уравнение циклической частоты собственных колебаний

$$\omega \cong \sqrt{\frac{k}{M}} \cong \sqrt{\frac{50}{5}} \cong 3,16 \frac{\text{рад}}{\text{с}}. \quad (7)$$

7. Запишем уравнение колебаний

$$x(t) \cong 0,1 \sin(\pi t + \pi).$$

(8)



Пример № 42. На рабочий стол вибростенда, колеблющийся с частотой $\nu = 5$ Гц, поставлен для испытания системный блок персонального компьютера. При какой амплитуде колебаний блок не будет отрываться от поверхности рабочего стола?

1. Блок будет оставаться в соприкосновении с поверхностью рабочего стола во всех случаях, когда нормальная реакция связи будет отлична от нуля. Уравнение второго закона Ньютона в проекции на вертикальную ось можно представить следующим образом

$$m\ddot{y}(t) = mg - N. \quad (1)$$

2. Определим максимальное значение ускорения при колебательном движении, используя уравнение гармонических колебаний

$$y(t) = A \sin \omega t; \quad \dot{y}(t) = A\omega \cos \omega t; \quad \ddot{y}(t) = -A\omega^2 \sin \omega t. \quad (2)$$

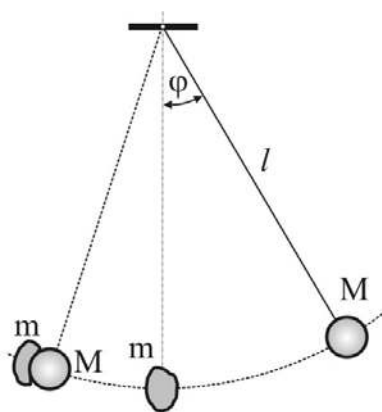
$$\ddot{y}_{\max} = -A\omega^2. \quad (3)$$

3. Найдём величину циклической частоты и подставим её значение в уравнение (3)

$$\omega = 2\pi\nu; \Rightarrow \ddot{y}_{\max} = -4\pi^2\nu^2 A. \quad (4)$$

4. Отрыв системного блока от поверхности стола вибростенда произойдёт при условии $|\ddot{y}_{\max}| = |g|$, другими словами

$$4\pi^2\nu^2 A = g; \quad A = \frac{g}{4\pi^2\nu^2} \cong \frac{10}{40 \cdot 25} \cong 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}. \quad (5)$$



Пример № 43. Математический маятник длиной $l = 1$ м с массой грузика $M = 0,5$ кг совершает гармонические колебания, отклоняясь от положения равновесия на угол $\varphi = 10^\circ$. При прохождении в очередной раз положения статического равновесия грузик налетает на кусок пластилина массой $m = 0,1$ кг, испытывая абсолютно неупругий удар. Во сколько раз изменится потенциальная энергия грузика с налипшим на него пластилином и период колебаний маятника?

1. Определим потенциальную энергию маятника при его движении без пластилина

$$\Pi_1 = mg\ell(1 - \cos \varphi). \quad (1)$$

2. При прохождении маятником положения статического равновесия потенциальная энергия полностью трансформируется в кинетическую энергию, при этом скорость грузика определится как

$$Mg\ell(1 - \cos \varphi) = \frac{Mv^2}{2}, \quad (2)$$

$$v = \sqrt{2g\ell(1 - \cos \varphi)}. \quad (3)$$

3. Для определения скорости движения грузика с налипшим на него пластилином воспользуемся законом сохранения импульса

$$Mv = (M + m)u; \quad u = \frac{Mv}{M + m} = \frac{m\sqrt{2g\ell(1 - \cos \varphi)}}{M + m}. \quad (4)$$

4. Кинетическая энергия грузика с налипшим на него пластилином будет равна максимальному значению потенциальной энергии при максимальном отклонении

$$\Pi_2 = K_2 = \frac{(M + m)u^2}{2} = \frac{(M + m)m^2 2g\ell(1 - \cos \varphi)}{(M + m)^2}. \quad (5)$$

$$\Pi_2 = \frac{2g\ell m^2(1 - \cos \varphi)}{M + m}. \quad (6)$$

5. Определим отношение потенциальных энергий

$$\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{Mg\ell(1 - \cos \varphi)(M + m)}{m^2 2g\ell(1 - \cos \varphi)} = \frac{M(M + m)}{2m^2} \cong \frac{0,5 \cdot 0,6}{0,5} \cong 0,6.$$

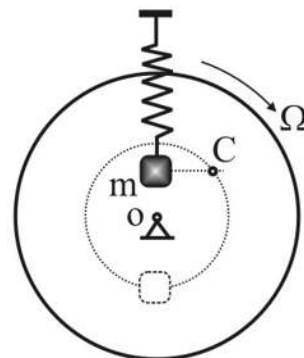
(7)

6. Период колебаний маятника ввиду их изохронности, т.е. независимости от амплитуды, меняться не будет, кроме того, масса маятника в уравнение периода не входит.

Пример № 44. Тело массы m , соединённое с пружиной совершает вертикальные гармонические колебания. Рядом с колебательной системой расположено колесо, вращающееся с угловой скоростью Ω , причём точка C колеса находится постоянно на одном уровне с центром масс тела. Где находится положение статического равновесия тела. Через какое наименьшее время повторится значение скорости и смещения груза? Какова максимальная сила, действующая на тело?

1. Поскольку точка C вращающегося колеса находится постоянно на одном уровне с центром масс колеблющегося тела, то циклическая частота колебаний тела будет совпадать с величиной угловой скорости колеса, т.е. $\Omega = \omega$.

2. Ввиду синхронности вращения колеса и колебаний тела положение статического равновесия последнего будет совпадать с положением оси вращения колеса.



Пример № 45. Физический маятник представляет собой однородный стержень длины $l = 2$ м. Колебания происходят вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его верхний конец.

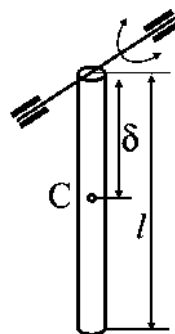
1. Момент инерции стержня относительно горизонтальной оси колебаний определится как

$$J_x = \frac{1}{3} m \ell^2. \quad (1)$$

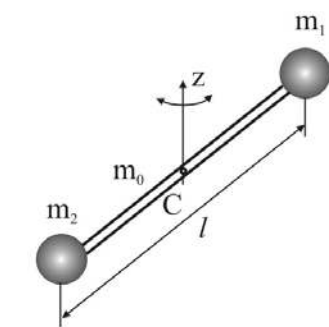
2. Период малых колебаний физического маятника при расстоянии от центра масс до оси колебаний $\delta = l/2$, определится посредством уравнения

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_x}{mg\delta}} = 2\pi \sqrt{\frac{2\ell}{3g}} \cong 6,28 \sqrt{\frac{4}{30}} \cong 2,3 \text{ с}.$$

(2)



Пример № 46. Физический маятник представляет собой тонкий стержень длиной $l = 2$ м и массой $m_0 = 1$ кг, на концах которого закреплены свинцовые шарики массами $m_1 = m_2 = 0,5$ кг. Маятник совершает малые колебания вокруг оси, проходящей через середину стержня перпендикулярно его оси. Определить период колебаний.



1. Период колебаний физического маятника определяется уравнением

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_z}{Mg\ell_c}}, \quad (1)$$

где J_z – момент инерции маятника относительно оси колебаний z , M – масса маятника, ℓ_c – расстояние от центра масс маятника до оси.

2. Маятник состоит из двух точечных масс m_1 и m_2 и массы стержня m_0 , поэтому его суммарный момент инерции определится как

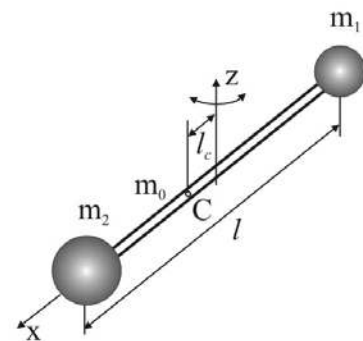
лится как

$$J_z = J_1 + J_2 + J_3 = \frac{m_1 \ell^2}{4} + \frac{m_2 \ell^2}{4} + \frac{m_0 \ell^2}{12} = \frac{m_1 \ell^2}{2} + \frac{m_0 \ell^2}{12} \cong 1,33 \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \quad (2)$$

3. Поскольку маятник симметричен, то ось вращения будет проходить через центр масс, т.е. $\ell_c = l/2$, поэтому период маятника определится следующим уравнением

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2J_z}{(m_1 + m_2 + m_0)\ell}} = 6,28 \sqrt{\frac{2,66}{4}} \cong 5,12 \text{ с}. \quad (3)$$

Пример № 47. В условиях предыдущей задачи массы шаров равны $m_1 = 0,3$ кг, $m_2 = 0,6$ кг. Определить период колебаний стержня, длина и масса которого остались неизменными.



1. В этом случае момент инерции стержня с шарами определится посредством уравнения

$$J_z = J_1 + J_2 + J_3 = \frac{m_1 \ell^2}{4} + \frac{m_2 \ell^2}{4} + \frac{m_0 \ell^2}{12} = 1,23 \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \quad (1)$$

2. Так как на концах стержня закреплены шары разной массы, то ось z , вокруг которой происходят колебания, не будет совпадать с центром масс. Определим положение центра масс маятника

$$\ell_c = X_c = \frac{\sum_{i=1}^3 m_i x_i}{\sum_{i=1}^3 m_i}, \quad (2)$$

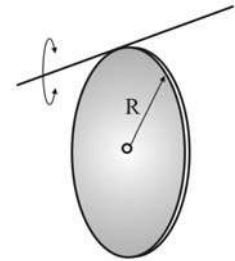
$$\ell_c = \frac{m_1 \left(-\frac{\ell}{2}\right) + m_2 \left(\frac{\ell}{2}\right) + m_0 \cdot 0}{m_1 + m_2 + m_0}, \quad (3)$$

$$\ell_c = \frac{(m_2 - m_1)\ell}{2(m_1 + m_2 + m_0)} = \frac{0,3 \cdot 2}{3,8} \cong 0,158 \text{ м}. \quad (4)$$

3. Период колебаний маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_z}{Mg\ell_c}} = 6,28 \sqrt{\frac{1,23}{1,9 \cdot 9,81 \cdot 0,158}} \cong 4,05 \text{ с}. \quad (5)$$

Пример № 48. Однородный диск радиусом $R = 30 \text{ см}$ колеблется около горизонтальной оси, проходящей через одну из образующих цилиндрической поверхности диска. Определите период колебаний этого физического маятника.



1. В данном случае расстояние между осью, относительно которой происходят колебания и центром масс диска равно радиусу диска, т.е. $\ell_c = R$.

2. Момент инерции диска относительно оси, проходящий через образующую диска определяется как

$$J_x = \frac{3}{2} mR^2. \quad (1)$$

3. Период колебаний такого физического маятника будет равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_x}{mg\ell_c}} = 2\pi \sqrt{\frac{3R}{2g}} = 6,28 \sqrt{\frac{0,9}{19,62}} \cong 1,345 \text{ с}. \quad (2)$$

Пример № 49. На концах невесомого тонкого стержня длиной $l = 1 \text{ м}$ укреплены одинаковые грузы. Стержень совместно с грузами колеблется вокруг вертикальной оси, проходящей через точку, удалённую на расстояние $d = 0,25 \text{ м}$ от одного из грузов. Определить период колебаний маятника и его приведённую длину.

1. Определим расстояние между центром масс и осью z , вокруг которой происходят колебания

$$\ell_c = \frac{\ell}{2} - d = \frac{\ell}{4} = 0,25 \text{ м}. \quad (2)$$

2. Определим момент инерции маятника

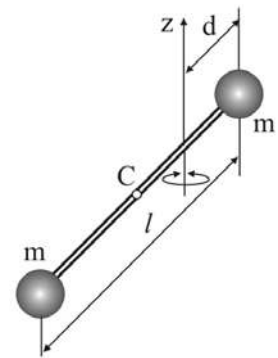
$$J_z = m(\ell - d)^2 + md^2 = m[\ell^2 - 2d(\ell + d)]. \quad (3)$$

3. Период колебаний данного физического маятника

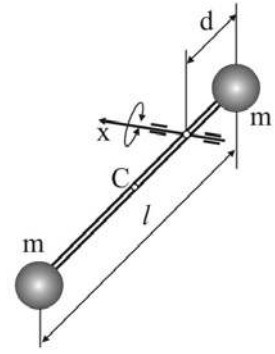
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_z}{mg\ell_c}} = 2\pi \sqrt{\frac{m[\ell^2 - 2d(\ell + d)]}{mg\ell_c}} \cong 2,45 \text{ с}. \quad (4)$$

4. Приведённая длина маятника определится как

$$L = \frac{J_z}{m\delta} = \frac{4m[\ell^2 - 2d(\ell + d)]}{m\ell} = 1,5 \text{ м}. \quad (5)$$



Пример № 50. На концах невесомого тонкого стержня длиной $l = 0,3$ м укреплены одинаковые точечные грузы. Стержень совместно с грузами колеблется вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку, удалённую на расстояние $d = 0,1$ м от одного из концов стержня. Определить период колебаний маятника и его приведённую длину.



1. В отличие от предыдущей задачи, где колебания происходили в плоскости перпендикулярной вектору силы тяжести, т.е. при движении системы потенциальная энергия не изменялась, в данном случае изменение относительного положения грузов будет сопровождаться изменением потенциальной энергии системы. Момент инерции, при этом, определится как

$$J_z = m(\ell - d)^2 - md^2 = m[\ell^2 - 2d(\ell - d)]. \quad (1)$$

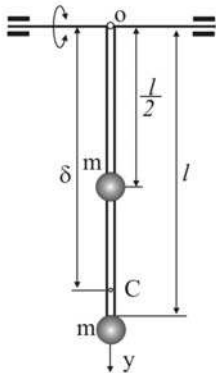
2. Период колебаний такого физического маятника, при учёте того, что $l_C = l/4$, будет определяться уравнением (4) предыдущей задачи

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_z}{mg\ell_c}} = 2\pi \sqrt{\frac{m[\ell^2 - 2d(\ell - d)]}{mg\ell_c}} \cong 1,42 \text{ с}. \quad (2)$$

3. Приведённая длина маятника

$$L = \frac{J_z}{m\delta} = \frac{4m[\ell^2 - 2d(\ell + d)]}{m(\ell - 2d)} = 0,5 \text{ м}. \quad (3)$$

Пример № 51. На невесомом стержне длиной $l = 0,3$ м закреплены два одинаковых шара: один в середине стержня, а второй – на одном из его концов. Система тел колеблется около горизонтальной оси, проходящей через свободный конец стержня. Определить период колебаний и приведённую длину этого физического маятника.



1. Определим положение центра масс данной механической системы

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^2 m_i x_i}{\sum_{i=1}^2 m_i} = \frac{m\left(\frac{\ell}{2}\right) + m\ell}{2m} = \frac{3}{4} \ell. \quad (1)$$

2. Найдём далее момент инерции маятника относительно горизонтальной оси вращения

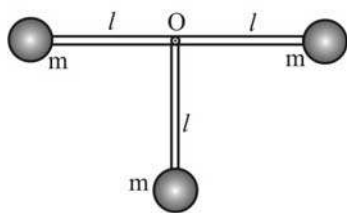
$$J_x = \frac{m\ell^2}{4} + m\ell^2 = \frac{5}{4} m\ell^2. \quad (2)$$

3. Приведённая длина физического маятника, с учётом того, что расстояние между центром масс маятника и осью, вокруг которой происходят колебания $\delta = 3l/4$

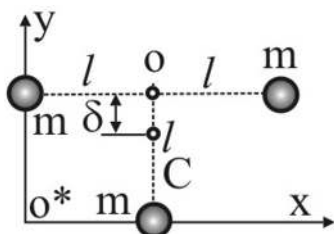
$$L = \frac{J_x}{2m\delta} = \frac{\frac{5}{4} m\ell^2}{2m \frac{3}{4} \ell} = \frac{5}{6} \ell = 0,25 \text{ м}. \quad (4)$$

4. Период колебаний маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} = 6,28 \sqrt{\frac{0,25}{9,81}} \cong 1 \text{ с}. \quad (5)$$



Пример № 52. Физический маятник представляет собой систему трёх точечных грузов, соединённых невесомыми стержнями одинаковой длины $l = 0,3$ м колеблется вокруг горизонтальной оси, проходящей перпендикулярно плоскости чертежа через общую точку O стержневой системы. Определить период колебаний маятника.



1. Определим положение центра масс относительно оси колебаний, проходящих через точку O

$$x_c = \frac{m\ell + 2m\ell}{3m} = \ell, \quad (1)$$

$$y_c = \frac{m\ell + m\ell}{3m} = \frac{2}{3}\ell. \quad (2)$$

2. Расстояние между центром масс и осью колебаний состав

вит

$$\delta = \ell - y_c = \ell/3. \quad (3)$$

3. Момент инерции анализируемой колебательной системы относительно оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости чертежа

$$J_z = m\ell^2 + m\ell^2 + m\ell^2 = 3m\ell^2. \quad (4)$$

4. Период колебаний маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_z}{3mg\delta}} = 2\pi\sqrt{\frac{3m\ell^2 \cdot 3}{3mg\ell}} = \sqrt{\frac{3\ell}{g}} \cong 1,9 \text{ с}. \quad (5)$$

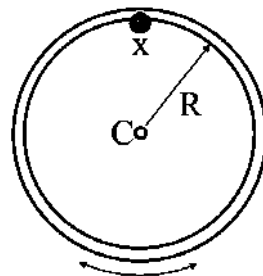
Пример № 53. Тонкий обруч радиусом $R = 0,3$ м колеблется вокруг вбитого горизонтально в стену гвоздя, так что плоскость колебания параллельна стене. Определить период колебаний такого физического маятника.

1. В данном случае центр масс обруча не совпадает с осью колебаний, для определения момента инерции относительно оси колебаний x, перпендикулярной плоскости чертежа необходимо воспользоваться теоремой Гюйгенса – Штейнера

$$J_x = mR^2 + ma^2 = 2mR^2. \quad (1)$$

2. Период колебаний обруча

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_x}{mg\delta}} = 2\pi\sqrt{\frac{2mR^2}{mgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}} = 6,28\sqrt{\frac{0,6}{9,81}} \cong 1,55 \text{ с}. \quad (2)$$

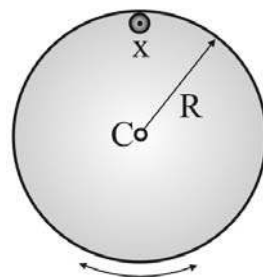


Пример № 54. Однородный диск радиусом $R = 0,3$ м колеблется около горизонтальной оси, проходящей через одну из образующих цилиндрической поверхности диска. Определить период колебаний.

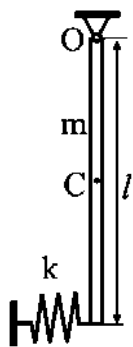
1. Так же как и в предыдущей задаче, центр масс диска не совпадает с положением оси x, относительно которой колеблется физический маятник. Для определения момента инерции диска относительно оси x воспользуемся теоремой Гюйгенса – Штейнера

$$J_x = J_C + mR^2 = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2. \quad (3)$$

2. Период колебаний маятника с учётом того, что $\delta = R$, определится посредством следующего уравнения



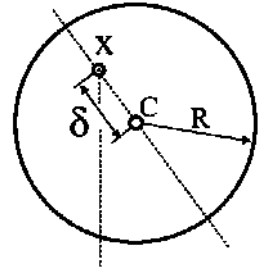
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_x}{mg\delta}} = 2\pi \sqrt{\frac{3R}{2g}} = 6,28 \sqrt{\frac{0,9}{2 \cdot 9,81}} \cong 1,345 \text{ с.} \quad (4)$$



Пример № 55. Диск радиусом $R = 0,24 \text{ м}$ колеблется вокруг горизонтальной оси, проходящей через середину одного из радиусов перпендикулярно плоскости диска. Определить приведённую длину и период колебаний маятника.

1. По методике, использованной в предыдущих задачах определим момент инерции диска относительно горизонтальной оси x , которая разнесена с осью колебаний на расстояние $\delta = R$

$$J_x = J_c + m \frac{R^2}{2} = \frac{mR^2}{2} + m \frac{R^2}{4} = \frac{3}{4} mR^2.$$



(2)

2. Приведённая длина физического маятника

$$L = \frac{J_x}{m\delta} = \frac{3 \cdot 2mR^2}{4mR} = \frac{3}{2} R = 0,36 \text{ м.} \quad (3)$$

3. Период колебаний

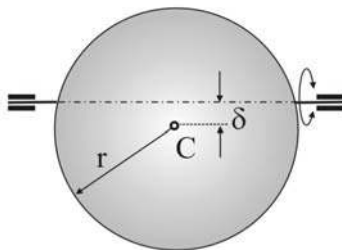
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} = 1,2 \text{ с.} \quad (4)$$

Пример № 56. Математический маятник длиной $l_1 = 0,4 \text{ м}$ и физический маятник в виде тонкого прямоугольного стержня длиной $l_2 = 0,6 \text{ м}$ синхронно колеблются около одной горизонтальной оси. Определить расстояние δ между центром масс стержня и осью его колебаний.

1. Поскольку колебания математического и физического маятников синхронные, то периоды будут одинаковыми

$$T_1 = T_2; \quad 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_2^2}{3g\delta}}; \Rightarrow \delta = \frac{l_2^2}{3l_1} = \frac{0,36}{3 \cdot 0,4} = 0,3 \text{ м.}$$

Пример № 56. Физический маятник представляет собой однородный диск радиусом $r = 0,4 \text{ м}$, горизонтальная ось колебаний которого проходит на расстоянии $\delta = r/4$ от центра масс диска. Определить период малых колебаний диска.



1. Момент инерции диска относительно оси, проходящей через центр масс, определяется уравнением

$$J_{cx} = \frac{mr^2}{4}. \quad (1)$$

2. Момент инерции относительно параллельной оси, отстоящей на расстоянии δ , определим с помощью теоремы Гюйгенса – Штейнера

$$J_x = J_{cx} + m \left(\frac{r}{4} \right)^2 = \frac{mr^2}{4} + \frac{mr^2}{16} = \frac{5}{16} mr^2. \quad (2)$$

3. Период малых колебаний этого физического маятника запишется следующим образом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_x}{mg\delta}} = 2\pi \sqrt{\frac{5mr^2 \cdot 4}{16mgr}} = 2\pi \sqrt{\frac{5r}{4g}} \cong 6,28 \sqrt{\frac{5 \cdot 0,4}{40}} \cong 1,4 \text{ с.} \quad (3)$$

Пример № 57. Определить частоту малых колебаний тонкого однородного стержня массой $m = 1$ кг длиной $l = 1$ м вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O , если противоположный конец стержня присоединён к пружине жёсткости $k = 100$ Н/м. В статическом положении стержень вертикален и пружина не деформирована.

1. Момент инерции стержня относительно оси колебаний

$$J_x = \frac{1}{3} m l^2. \quad (1)$$

2. Рассматриваемая конструкция физического маятника в соответствии с уравнением (1) имеет следующее значение приведённой массы

$$\mu = \frac{m}{3} \quad (2)$$

3. Циклическая частота колебаний стержня при условии равенства расстояния от оси колебаний до центра масс $\delta = l/2$ определится уравнением

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{2\pi \sqrt{\frac{J_x}{\mu g \delta}}} = \sqrt{\frac{3g}{2l}}. \quad (3)$$

4. Циклическая частота собственных колебаний стержня, один конец которого присоединён к пружине жёсткостью k

$$\omega_0 = \omega_1 + \sqrt{\frac{3k}{m}} = \sqrt{\frac{3g}{2l} + \frac{3k}{m}} = \sqrt{\frac{30}{2} + 300} = 17,75 \frac{\text{рад}}{\text{с}}. \quad (4)$$

5. Период собственных малых колебаний физического маятника

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,35 \text{ с}. \quad (4)$$

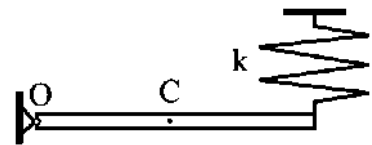
Пример № 58. Однородный стержень массой $m = 1$ кг совершает колебания вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O , свободный конец стержня соединён с вертикальной пружиной жёсткости $k = 10$ Н/м. Определить период малых колебаний физического маятника.

1. Физический маятник в данном случае можно рассматривать как часть массы стержня подвешенной к вертикальной пружине. Присоединённую к пружине массу определим из уравнения момента инерции стержня относительно горизонтальной оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости чертежа

$$J_x = \frac{m l^2}{3}. \quad (1)$$

2. Период колебаний в этом случае запишется как

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}} = 6,28 \sqrt{\frac{1}{20}} \cong 1,4 \text{ с}. \quad (2)$$

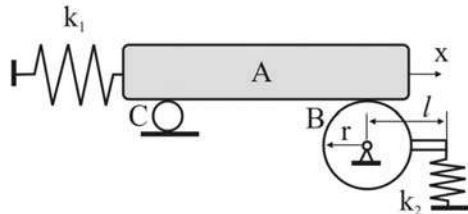


Пример № 59. Найти циклическую частоту собственных малых свободных горизонтальных колебаний однородного диска массой $m = 0,33$ кг, соединённого с пружиной жёсткостью $k = 50$ Н/м. Качение диска по горизонтальной плоскости происходит без проскальзывания.

1. Если в качестве обобщённой координаты принять горизонтальное перемещение диска x , то уравнение его кинетической энергии можно представить в виде суммы энергии поступательного движения и энергии вращения

$$K = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{1}{2} J_z \omega^2 = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{J_z \dot{x}^2}{2R^2}. \quad (1)$$

2. Момент инерции диска относительно оси z , перпендикулярной плоскости чертежа и проходящей через точку крепления пружины к диску



$$J_z = \frac{mR^2}{2}. \quad (2)$$

3. Подставим уравнение (2) в уравнение (1)

$$K = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{mx^2}{4} = \frac{3}{4}m\dot{x}^2, \quad (3)$$

приведённая масса, при этом, равна $\mu = 3m/2$.

4. Определим частоту собственных колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{\frac{2k}{3m}} = \sqrt{\frac{100}{0,333 \cdot 3}} \approx 10 \frac{\text{рад}}{\text{с}}. \quad (4)$$

Пример № 60. Определить собственную частоту колебаний системы, состоящей из упруго закреплённой горизонтальной рейки A , которая лежит на подпружиненном цилиндре B и катке C . Массы рейки $m_1 = 1$ кг и цилиндра $m_2 = 0,5$ кг, жёсткости пружин: $k_1 = 20$ Н/м, $k_2 = 10$ Н/м, радиус качения цилиндра составляет $r = 0,2$ м. Расстояние от точки крепления вертикальной пружины до оси цилиндра $l = 0,22$ м.

1. Рассматриваемая в задаче колебательная система имеет одну степень свободы, поэтому положение любой движущейся точки, принадлежащей системе, можно однозначно охарактеризовать одной обобщённой координатой, в качестве которой целесообразно взять линейное перемещение рейки с началом системы отсчёта в положении статического равновесия.

3. При перемещении рейки на расстояние x каток поворачивается на угол $\phi = x/r$.

4. Запишем уравнение кинетической энергии колебательной системы

$$K = \frac{m_1 \dot{x}^2}{2} + \frac{1}{2} J_2 \dot{\phi}^2. \quad (2)$$

5. Подставим в уравнение кинетической энергии значение момента инерции цилиндра и его угловой скорости

$$J_2 = \frac{m_2 r^2}{2}; \quad \dot{\phi} = \frac{\dot{x}}{r}. \quad (3)$$

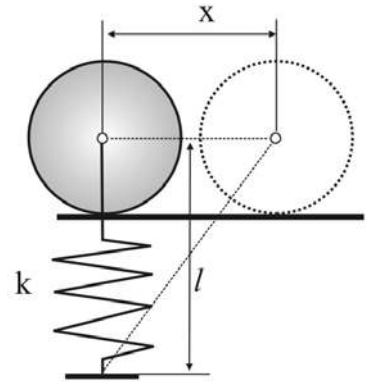
$$K = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}^2}{4} = \frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{m_2}{2} \right) \dot{x}^2.$$

(4)

6. Из уравнения (4) определим приведённую массу (инерционный коэффициент)

$$\mu = m_1 + \frac{1}{2} m_2. \quad (2)$$

7. Коэффициент упругости системы определим путём анализа уравнения потенциальной энергии системы



$$U = \frac{k_1 x^2}{2} + \frac{k_2 (\ell x/r)^2}{2} = \frac{1}{2} \left(k_1 + \frac{\ell^2}{r^2} \right) x^2. \quad (3)$$

8. Коэффициент упругости системы, таким образом, равен

$$k_0 = k_1 + \frac{\ell^2}{r^2} k_2. \quad (4)$$

9. Циклическая частота собственных колебаний системы

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_0}{\mu}} = \sqrt{\frac{k_1 + \frac{\ell^2}{r^2} k_2}{m_1 + \frac{1}{2} m_2}}. \quad (5)$$

10. Собственная частота колебаний

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 + \frac{\ell^2}{r^2} k_2}{m_1 + \frac{1}{2} m_2}} = \frac{1}{6,28} \sqrt{\frac{20 + \frac{4,8 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 10^{-2}} 10}{1 + 0,25}} \cong 4 \text{ Гц}. \quad (6)$$

Пример № 61. Найти циклическую частоту собственных колебаний механической системы, состоящей из балки длиной $2l$ с грузом на конце массой $m = 1$ кг. Второй конец балки закреплён шарнирно, в своей средней части балка опирается на пружину с $k = 36$ Н/м.

1. В положении равновесия пружина под действием веса груза деформируется на величину $\ell\varphi_0$, т.е. на середину балки действует сила упругости

$$F_{k(0)} = k\ell\varphi_0. \quad (1)$$

2. Уравнение моментов относительно центра шарнирной опоры позволяет определить величину φ_0

$$mg \cdot 2\ell - k\ell\varphi_0 \cdot \ell = 0; \Rightarrow \varphi_0 = \frac{2mg}{k\ell}. \quad (2)$$

3. Предположим далее, что после сообщения грузу импульса угол отклонения балки составит $\varphi + \varphi_0$, что обеспечит действие со стороны пружины силы

$$F_k = k\ell(\varphi_0 + \varphi). \quad (3)$$

4. Уравнение вращательного движения балки относительно шарнира будет иметь следующий вид

$$mg\ell - \frac{k\ell(\varphi_0 + \varphi)\ell}{2} = m2\ell^2 \frac{d^2}{dt^2}(\varphi_0 + \varphi), \quad (4)$$

$$2mg\ell - k\ell^2(\varphi_0 + \varphi) = 4m\ell^2 \frac{d^2}{dt^2}(\varphi_0 + \varphi), \quad (5)$$

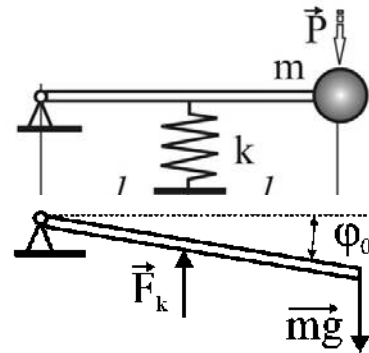
$$2mg\ell - k\ell^2(\varphi_0 + \varphi) = J_x \omega^2. \quad (6)$$

5. Приведённая масса системы, таким образом, определяется как

$$\mu = 4m. \quad (7)$$

6. Циклическая частота собственных колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{4m}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = 3 \frac{\text{рад}}{\text{с}}. \quad (8)$$

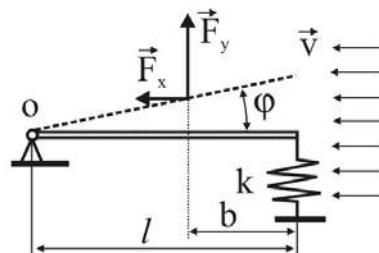


Пример № 62. Модель крыла самолёта или рулей глубины подводной лодки или торпеды можно представить в виде жёсткой пластинки с шарнирным закреплением одного конца и подпружиненным вторым концом. Пластика обтекает потоком газа или жидкости со

скоростью v , направленной вдоль пластины. Определить критическое значение скорости, соответствующее потере устойчивости пластинкой, т.е. возникновению колебаний.

1. При отклонении пластинки от горизонтального положения статического равновесия, когда на неё действует сила тяжести и реакции опор, возникают силы, обусловленные гидродинамическими давлениями. Главный вектор этих сил, приложенных в сечении пластинки, отстоящем на расстоянии b от упругой опоры

$$\begin{cases} F_x = c_x \frac{\rho v^2}{2} \ell \varphi; \\ F_y = c_y \frac{\rho v^2}{2} \ell \varphi, \end{cases} \quad (1)$$



где c_x, c_y – постоянные коэффициенты, ρ – плотность жидкости или газа, φ – угол отклонения пластинки, l – длина пластинки.

2. Момент сил относительно шарнирного закрепления

$$M_0(\vec{F}) = -k\ell^2\varphi + F_x b\varphi + F_y b, \quad (2)$$

$$M_0(\vec{F}) = -k\ell^2\varphi + c_x \frac{\rho v^2}{2} b\ell\varphi^2 + c_y \frac{\rho v^2}{2} b\ell\varphi. \quad (3)$$

3. Дифференциальное уравнение движения

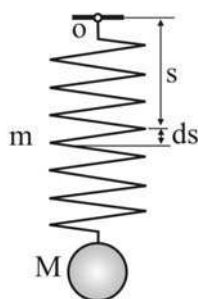
$$J_0\ddot{\varphi} + \left(k\ell - c_y \frac{\rho v^2}{2} b \right) \ell \varphi = 0.$$

(4)

4. Условие устойчивости

$$k\ell - c_y \frac{\rho v^2}{2} b > 0; \Rightarrow v_{cr} = \sqrt{\frac{2k}{c_y \rho b}}. \quad (5)$$

Пример № 63. Вычислить кинетическую энергию механической системы, состоящей из пружины массой m и прикрепленного к ней груза массой M , совершающего малые гармонические свободные колебания. Смещение точек пружины пропорционально их расстоянию до подвеса O .



1. Кинетическая энергия колебательной системы будет складываться из энергии возвратно-поступательного движения груза и кинетической энергии движущейся пружины

$$K = K_M + K_m, \quad (1)$$

где K_M – кинетическая энергия тела массой M , K_m – кинетическая энергия пружины.

2. Если выбрать вертикальную ось ou , направленную вниз, то кинетическую энергию тела можно представить в традиционном виде

$$K_M = \frac{M\dot{y}^2}{2}. \quad (2)$$

3. Энергию пружины будем рассматривать, задавшись её длиной в статическом состоянии l и линейной плотностью ρ (кг/м). Выделим на длине пружины элемент её длины ds , который будет иметь смещения ξ одинаковые по всей длине пружины и совпадающие со смещениями груза. Это даёт основание записать следующее соотношение

$$\frac{\xi}{y} = \frac{s}{l}; \Rightarrow \xi = \frac{s}{l} y; \quad \dot{\xi} = \frac{s}{l} \dot{y}. \quad (3)$$

4. Кинетическая энергия элемента пружины длины du определится на основании уравнения (3) следующим образом

$$dK_m = \frac{dm \dot{\xi}^2}{2}; \quad dm = \rho ds. \quad (4)$$

$$dK_m = \frac{1}{2} \frac{\rho \dot{y}^2}{\ell^2} s^2 ds. \quad (5)$$

5. Энергию всей пружины определится посредством определённого интеграла взятого в пределах от 0 до ℓ :

$$K_m = \int_0^\ell \frac{\rho \dot{y}^2}{2 \ell^2} s^2 ds = \frac{1}{2} \frac{\rho \dot{y}^2}{\ell^2} \int_0^\ell s^2 ds = \frac{1}{6} \frac{\rho \dot{y} s^3}{\ell^2} \Big|_0^\ell; \quad K_m = \frac{1}{6} \frac{\rho \ell \cdot \ell^2 \dot{y}^2}{\ell^2} = \frac{1}{6} m \dot{y}^2. \quad (6)$$

6. Реализуем уравнение (1), используя значения полученных энергий груза и пружины

$$K = \frac{M \dot{y}^2}{2} + \frac{m \dot{y}^2}{6} = \frac{1}{2} \left(M + \frac{1}{2} m \right) \dot{y}^2, \quad (7)$$

величина, стоящая в скобках $\mu = M + 0,5m$ называется приведённой массой колебательной системы.

Таким образом, уравнение (8) при заданном законе движения груза $y(t) = y_{\max} \sin(\omega t + \varphi_0)$ позволяет определить величину кинетической энергии колебательной системы в любой момент времени, включая и амплитудные значения, которые будут иметь место при $\sin(\omega t + \varphi_0) = 1$.

2. Собственные колебания с учётом затухания

2.1. Рациональный выбор приближённой схемы реальных систем

Рассмотренные выше колебательные системы (осцилляторы) во многом идеализированы, потому что условия, при которых они рассматривались в большей или меньшей степени отличались от реальных условий. **Учёт всех практических обстоятельств функционирования колебательных систем существенно усложняет математические представления процессов, в этой связи, при рассмотрении сложных колебательных систем принято упрощать задачи, пренебрегая свойствами системы не представляющиеся главенствующими в данной задаче. Для реальной колебательной системы составляется физическая модель в виде рационально выбранной приближённой схемы, позволяющей решать данную задачу с требуемой степенью точности [2].**

Одним из первых при анализе колебательных задач, решается вопрос о выборе необходимого числа степеней свободы, т.е. определение количества независимых переменных посредством которых возможно достоверно описать колебания рассматриваемой системы. По большому счёту любая из рассмотренных ранее колебательных систем имеют бесконечное число степеней свободы. Действительно, колеблющиеся массы, по реальной сути, Во-первых, не являются материальными точками, они занимают некий объём, т. е. состоят из более элементарных образований, во-вторых, при движении массы могут деформироваться, так же как и прочие элементы колебательной системы.

Так, например, конический маятник в общем случае (рис. 2.1) имеет две степени свободы, однако, при определённом выборе направления начальной скорости его качания будут протекать в одной плоскости и в этом систему можно характеризовать только одной степенью свободы, углом отклонения нити от положения статического равновесия.

Следующим важным обстоятельством моделирования колебательных систем является выбор закона изменения возвращающей силы, которая является необходимым атрибутом любой механической колебательной системы. Для колебательных систем с разного рода упругими элементами в виде пружин, восстанавливающая сила является

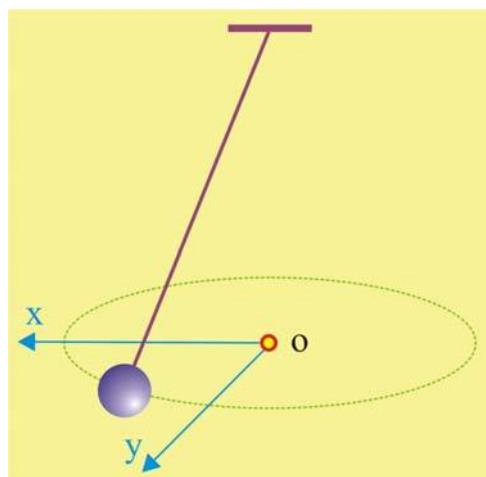


Рис. 2.1. Конический маятник

функцией отклонения массы от положения равновесия, т.е. $F_B = f(x)$, что усложняет составление и дифференцирование уравнений движения. Достаточно часто функцию зависимости восстанавливающей силы от координаты можно разлагать в степенной ряд (рис. 2.2)

$$F_B(x) = \left(\frac{dF_B}{dx} \right)_{x=0} x + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 F_B}{dx^2} \right)_{x=0} x^2 + \dots,$$

где величина

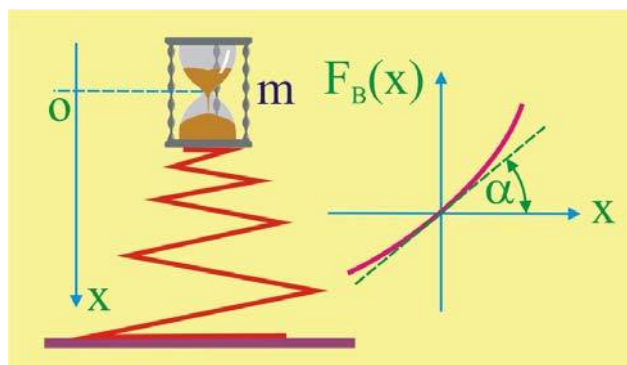


Рис. 2.2. Линеаризация восстанавливающей силы

$$\operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{dF_B}{dx} \right)_{x=0} = k, \quad (2.1)$$

называется коэффициентом упругости. Как видно из приведенного на рис.2.2 графика, восстанавливающую силу упругости конической пружины можно аппроксимировать первым членом разложения kx , в этом случае восстанавливающая сила рассматривается как линейная. При рассмотрении математического маятника восстанавливающая сила, которая представляется касательной проекцией силы тяжести, тоже зависит от угла отклонения

$$mg \ell \sin \varphi = mg \ell \left(\varphi - \frac{1}{6} \varphi^3 + \dots \right) \approx mg \ell \varphi. \quad (2.2)$$

Очевидно, что рассмотренные аппроксимации возможны только при малых колебаниях, при увеличении амплитуды колебаний необходимо возвращаться к более точным аналитическим зависимостям.

Рассмотренные ранее колебательные системы, с позиций закона сохранения энергии представляют собой PERPETUUM MOBILE, т.е. вечные двигатели первого рода, т.к. их движение протекало без всяких потерь на трение и разного рода сопротивления. Начавшись единожды, они могли протекать бесконечно длительное время, чего, естественно, быть не может. Предположение о консервативности систем может быть допущено только при малых величинах потерь, когда рассеянием (диссипацией) энергии можно пренебречь. Когда же силы сопротивления игнорировать не представляется возможным, то необходимо располагать уравнениями, характеризующими этот род сил. На практике достаточное распространение имеют силы сопротивления, не имеющие простого математического выражения. Эти силы, в большинстве своём, определяются экспериментально и в математической интерпретации имеют сложные математические описания. Однако, в ряде случаев зависимости представляется возможным упростить, например в случае действия силы сухого трения сила принимается постоянной, не зависящей от смещения и скорости

$$|\vec{F}_r| = \text{const}. \quad (2.3)$$

Одними из простых зависимостей является прямая пропорциональность силы сопротивления смещению или скорости движения в первой степени

$$F_r = -rx, \quad (2.4)$$

$$F_r = -rv = r\dot{x}, \quad (2.5)$$

где r – коэффициент сопротивления. Знак минус показывает, что сила сопротивления всегда направлена в сторону, противоположную вектору скорости. Действие сил сопротивления, пропорциональных скорости в первой степени называется в теории колебаний демпфированием.

2.2. Колебания в системах с линейной зависимостью восстанавливающей силы от смещения и силой сопротивления, пропорциональной скорости

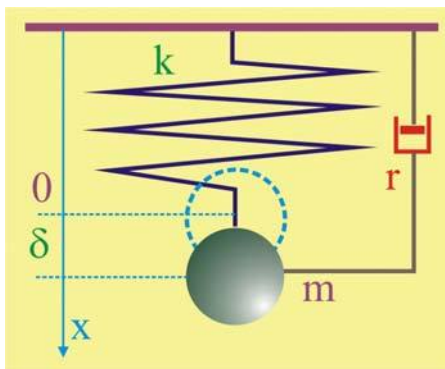


Рис. 2.3. Масса на пружине

Рассмотрим массу m , совершающую малые вертикальные колебания на спиральной пружине постоянной жесткости k (рис. 2.3). В этом случае возможно ввести следующие рациональные допущения и условия:

1. Движения массы происходит только в одном направлении, например, вдоль оси x ;
2. Длина пружины такова, что при сосредоточенной массе и малой скорости деформации, в ней не возникает практически мгновенная реакция, без уп-

лотнений и разрежений вдоль длины;

3. Опора и закрепления пружины не деформируемы;

4. В пределах максимальных смещений массы восстанавливающая сила пропорциональна деформации упругого элемента;

5. Сила сопротивления, проявляющаяся в системе, пропорциональна скорости в первой степени

6. Начало системы отсчёта совмещено с положением статического равновесия массы, когда в состоянии покоя к массе приложены сила тяжести mg и упругая сила, соответствующая статическому удлинению пружины δ .

Для равновесного состояния справедливо, таким образом, уравнение

$$k\delta = mg. \quad (2.6)$$

При сделанных допущениях уравнение второго закона Ньютона запишется следующим образом

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt}, \quad (2.7)$$

или

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{r}{m}\dot{x}. \quad (2.8)$$

Введём следующие обозначения

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \beta = \frac{r}{2m}, \quad (2.9)$$

с учетом, которых уравнение движения примет вид

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2x = 0. \quad (2.10)$$

Величина ω_0 представляет собой циклическую частоту собственных колебаний системы в отсутствии сопротивления, β – коэффициент затухания.

Последнее уравнение является однородным линейным и дифференциальным второго порядка, решение которого имеет вид

$$x = e^{-\beta t} \left(C_1 e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} \right), \quad (2.11)$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования. В зависимости от соотношения величин ω_0 и β возможны несколько характерных случаев записи решения (2.11)

Слабое затухание – $\beta < \omega_0$.

Решение (2.11) принимает вид

$$x = e^{-\beta t} (a \cos \omega t + b \sin \omega t), \quad (2.12)$$

где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad (2.13)$$

циклическая частота затухающих колебаний, a и b постоянные, определяемые из начальных условий

$$\begin{cases} a = x(0); \\ b = \frac{\dot{x}(0) + \beta x(0)}{\omega}. \end{cases} \quad (2.14)$$

В частности если предположить отсутствие затухания $\beta = 0$, то решение (2.12) переписывается в виде

$$x = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t, \quad (2.15)$$

или

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (2.16)$$

где

$$a = x(0); \quad b \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0}; \quad A = \sqrt{x(0)^2 + \frac{\dot{x}(0)^2}{\omega_0^2}}, \quad \varphi = \arctg \frac{\omega_0 x(0)}{\dot{x}(0)}, \quad (2.17)$$

что полностью совпадает ранее полученными решениями для подобной колебательной системы (1.121)

Запишем уравнение (2.12) в более рациональной форме

$$x = Ae^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.18)$$

где постоянные A и φ определяются из начальных условий

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{\omega} \sqrt{\omega^2 x(0)^2 + \{\dot{x}(0) + \beta x(0)\}^2}; \\ \varphi &= \arctg \frac{\omega x(0)}{\dot{x}(0) + \beta x(0)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

Колебательные процессы, описываемые уравнениями (2.11) и (2.18) называются экспоненциально затухающими колебаниями. На рис. 2.4. показан график экспоненциально затухающих колебаний.

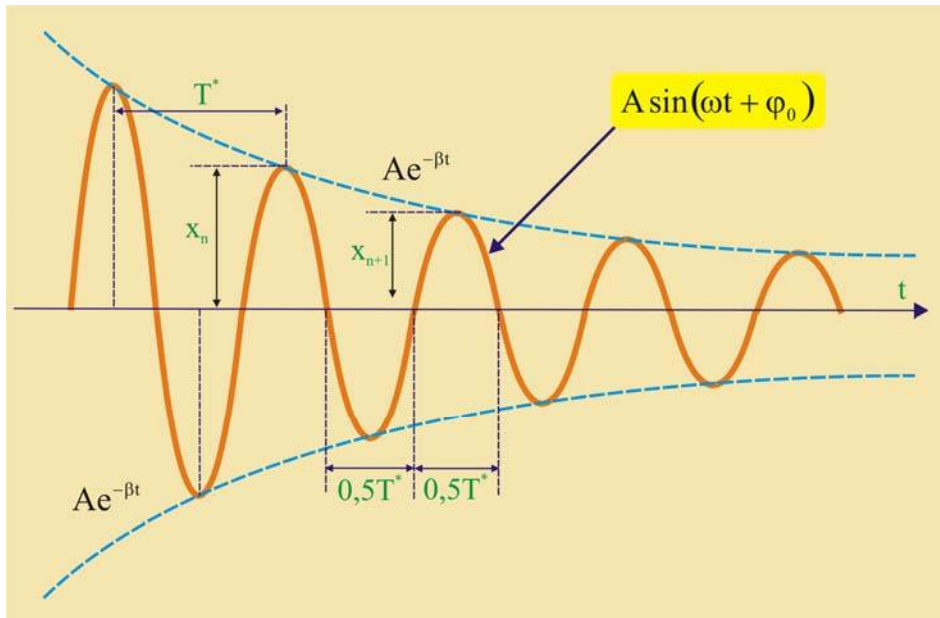


Рис. 2.4. Затухающие колебания

Приведенный график зависимости смещения массы от времени уже нельзя считать гармоническим и периодическим, так как полная повторяемость отсутствует, хотя через каждый промежуток времени

$$\frac{T^*}{2} = \frac{\pi}{\omega}, \quad (2.20)$$

величина смещения x обращается в ноль. Строго говоря, термин «амплитуда» к затухающим колебаниям не применим, так как перед синусом в уравнении (2.18) стоит, убывающая со временем величина $Ae^{-\beta t}$. В этой связи используя для затухающих колебаний термины «амплитуда» и «период» нужно давать себе, отчёт в том, что имеется в виду условный период и смещение для некоторого условного полупериода. Период затухающих колебаний несколько больше периода собственных колебаний

$$T^* = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = T \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\omega_0} \right)^2 + \dots \right\}. \quad (2.21)$$

Из уравнения (2.21) видно, что период затухающих колебаний больше периода собственных незатухающих колебаний данной системы на величину

$$\Delta T = \left(\frac{\beta}{\omega_0} \right)^2. \quad (2.22)$$

При $\omega_0 \gg \beta$ увеличение периода колебаний практического значения не имеет.

Рассмотрим далее энергетические параметры затухающих колебаний. **Кинетическая энергия** колеблющейся массы, определяется уравнением

$$K = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{m\omega_0^2 A^2}{4} [1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)], \quad (2.23)$$

из которого видно, что кинетическая энергия изменяется от нуля до максимального значения

$$K_{\max} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}, \quad (2.24)$$

причём, это изменения происходит с двойной циклической частотой $2\omega_0$ собственных колебаний. **Потенциальная энергия** деформированной пружины так же будет являться функцией времени

$$\Pi = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{kA^2}{4} [1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)]. \quad (2.25)$$

Для произвольного момента времени суммарное значение механической энергии системы определится в виде следующей суммы

$$E = K + \Pi = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} = \frac{kA^2}{2}, \quad (2.26)$$

которая равна либо максимальному значению кинетической энергии, либо максимальному значению потенциальной энергии. Это указывает на консервативность колебательной системы.

Интенсивность затухания можно определить, записав уравнение (2.18) для двух соседних максимальных значений смещения (рис. 2.4)

$$\beta = \frac{\omega}{2\pi} \ln \frac{x_n}{x_{n+1}}. \quad (2.27)$$

Натуральный логарифм, входящий в уравнение (2.27) называется **логарифмическим декрементом**

$$\lambda = \ln \frac{x_n}{x_{n+1}}. \quad (2.28)$$

Величина логарифмического декремента остаётся постоянной при любом выборе двух соседних максимальных смещений, поэтому λ характеризует рассматриваемый колебательный процесс в целом. Логарифмический декремент можно выразить через величину периода затухающих колебаний, используя уравнение (2.27), действительно

$$\beta = \frac{1}{T^*} \ln \frac{x_n}{x_{n+1}}; \Rightarrow \lambda = \beta T^*. \quad (2.29)$$

Логарифмический декремент можно определить в более общем виде

$$\lambda = \ln \frac{x(t)}{x(t+T^*)} = \beta T^* = \frac{1}{N}, \quad (2.30)$$

где N – число колебаний, в течение которых амплитуда уменьшится в e – раз ($e \cong 2,72$ – основание натурального логарифма).

Рассмотрим затухающие электромагнитные колебания в контуре, обладающим омическим сопротивлением R (рис. 2.5). Всякий реальный контур обладает собственным активным сопротивлением, даже если это только сопротивление катушки индуктивности. Изменение заряда конденсатора будет носить периодический характер. Уравнение гармонических колебаний в электрическом контуре

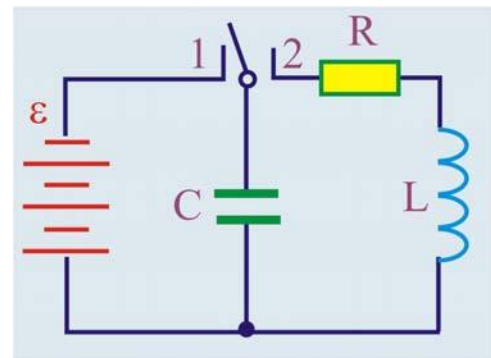


Рис. 2.5. Реальный контур

(1.135) при учёте сопротивления переписывается следующим образом

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0; \quad (2.31)$$

где введены следующие обозначения

$$\beta = \frac{R}{2L}; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (2.32)$$

Изменение заряда конденсатора во времени будет описываться уравнением аналогичным по структуре уравнению (2.18), записанному для механической колебательной системы с затуханием

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \sin(\omega t + \varphi_0); \quad (2.33)$$

В природе и технике существуют колебательные системы с самой различной степенью затухания, причём в одних случаях затухание специально уменьшается, а в других, наоборот – затухание стараются увеличить до возможного предела.

Для количественной оценки скорости убывания амплитуды затухающих колебаний пользуются понятиями логарифмического декремента и добротностью.

Добротностью колебательной системы называется безразмерная величина Θ , равная произведению 2π на отношение энергии $W(t)$ системы в произвольный промежуток времени t к убыли этой энергии от t до $t + T$, т.е. убыли энергии затухающих колебаний за один условный период

$$\Theta = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)}. \quad (2.34)$$

Так как энергия пропорциональна квадрату амплитуды колебаний, то

$$\Theta = 2\pi \frac{A^2(t)}{A^2(t) - A^2(t+T)};$$

Поделим числитель и знаменатель на $A^2(t)$

$$\Theta = \frac{2\pi}{1 - \frac{A^2(t+T)}{A^2(t)}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta}}; \quad (2.35)$$

При малых значениях логарифмического декремента $\delta \ll 1$

$$1 - e^{-2\delta} \approx 2\delta;$$

В этом случае

$$\Theta = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\pi}{\beta T_0} = \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1}} = \frac{\omega_0}{2\beta}; \quad (2.36)$$

Добротность электрического колебательного контура определится из условия того, что

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \beta = \frac{R}{2L};$$

$$\Theta = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{1 \cdot L}{\sqrt{LC} \cdot R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}; \quad (2.37)$$

Добротность пружинного маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad \beta = \frac{r}{2m};$$

$$\Theta = \frac{1}{r} \sqrt{km}; \quad (2.38)$$

Сильное затухание $\beta > \omega_0$.

В этом случае решение (2.11) принимает вид

$$x = e^{-\beta t} \left(a \cdot \operatorname{ch} \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t + b \cdot \operatorname{sh} \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t \right), \quad (2.39)$$

или

$$x = e^{-\beta t} A \cdot \operatorname{sh} \left(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t + \varphi_0 \right), \quad (2.40)$$

где a , b , A и φ – постоянные величины, определяемые из начальных условий. Как видно, в случае сильного затухания зависимость смещения от времени (2.40) не содержит тригонометрических функций, т.е. движение не является периодическим, т.е. это аperiodическое движение по сути уже нельзя рассматривать как колебательно, но при этом движение является затухающим.

Траектория такого движения зависит от модуля и направления начальной скорости $\vec{v}_0$. На рис. 2.6 представлены возможные случаи такого движения. Кривая 1 соответствует «толчку вперёд» ($v_0 > 0$), кривая 2 – «слабому» толчку назад ($v_0 < 0$), кривая 3 характеризует «сильный толчок» назад ($v_0 < 0$).

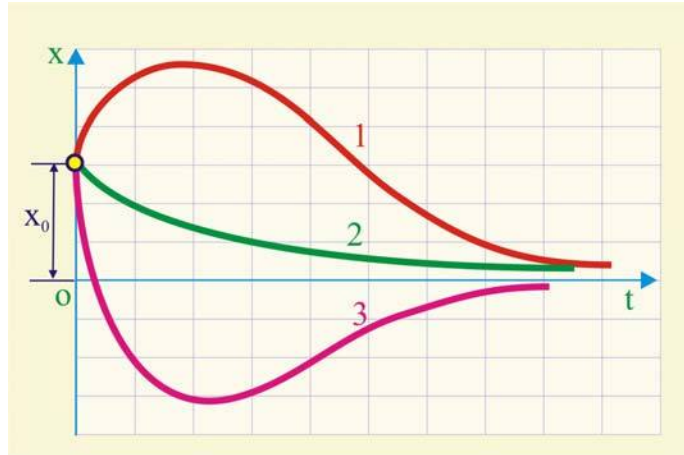


Рис. 2.6. Аperiodические колебания

2.3. Колебания при постоянной силе сопротивления

В механических колебательных системах достаточно часто проявляются силы сухого трения, которые с достаточной для практики точностью можно считать постоянными по модулю. Силы сопротивления такого рода направлены всегда в сторону, противоположную вектору скорости. Модуль силы сухого трения определяется известным уравнением

$$F_s = \mu N \quad (2.41)$$

где μ – коэффициент трения, зависящий только от свойств поверхностей соприкасающихся материалов, N – нормальная реакция связи (сила нормального давления). Рассмотрим задачу на примере колебательной системы, схема которой приведена на рис. 2.7. Движение системы будет описываться двумя дифференциальными уравнениями

$$m\ddot{x} + kx = -F_s, \quad \text{при } \dot{x} > 0, \quad (2.42)$$

$$m\ddot{x} + kx = F_s, \quad \text{при } \dot{x} < 0. \quad (2.43)$$

В рассматриваемом случае

$$F_s = \mu mg. \quad (2.44)$$

Решение нелинейных дифференциальных уравнений (2.42) и (2.43) имеют следующий вид

$$x = -d + a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t, \quad (2.45)$$

при $\dot{x} > 0$,

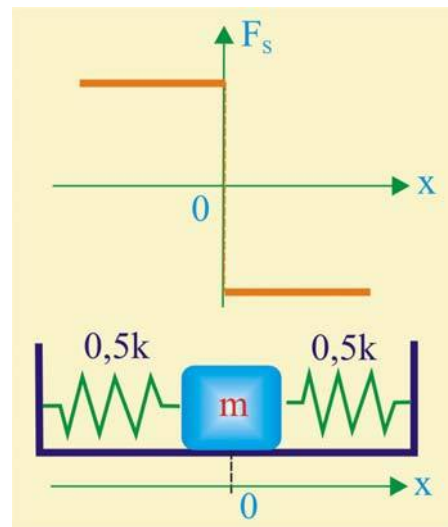


Рис. 2.7. Система с сухим трением

$$x = d + a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t, \quad \text{при } \dot{x} < 0, \quad (2.46)$$

где введены следующие обозначения

$$d = \frac{\mu g}{\omega_0^2}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}. \quad (2.47)$$

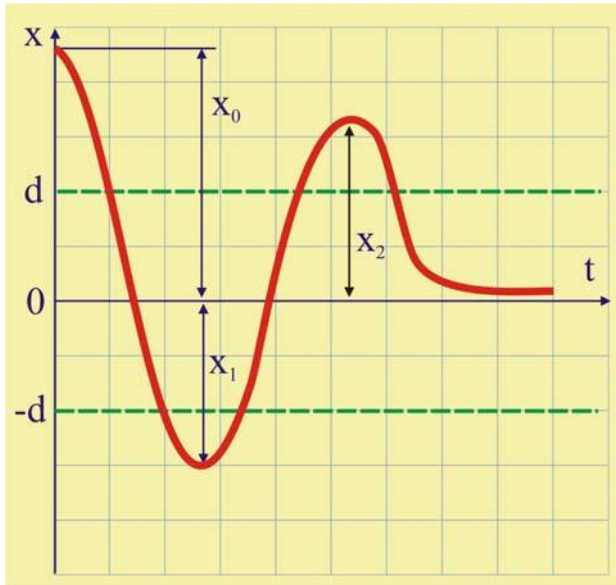


Рис. 2.8. Колебания в системе с сухим трением

решение (2.46) в этом случае будет справедливо до тех пор, пока $\dot{x} < 0$, т.е. до момента времени $t_1 = \pi/\omega_0$. В этот момент времени

$$x = -(x_0 - 2d) = -x_1. \quad (2.49)$$

В этом случае начинает действовать уравнение (2.42) с решением (2.45). При начальных условиях $x = -x_1$, $\dot{x} = 0$ для момента времени $t = t_1$ решение принимает вид

$$x = -d + (x_1 - d) \cos \omega_0 t. \quad (2.50)$$

При $x_1 > d$ сила натяжения пружин превысит силу трения и масса станет перемещаться в сторону положительного направления оси x пока $\dot{x} > 0$, т.е. до момента времени $t_2 = 2\pi/\omega_0$. Для этого момента времени справедливо уравнение

$$x = x_1 - 2d = x_0 - 4d = x_2. \quad (2.51)$$

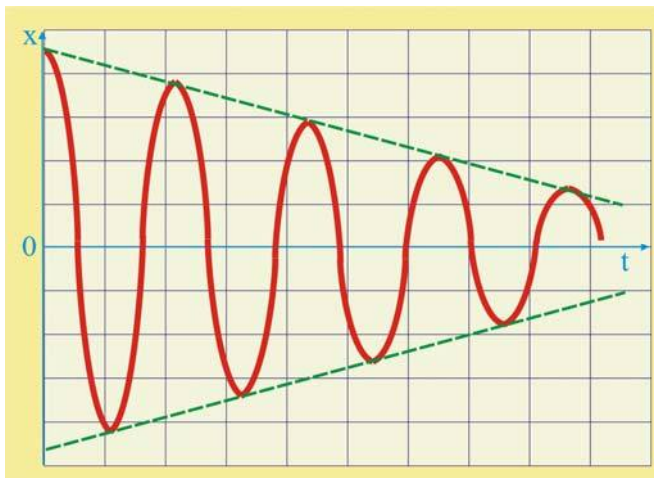


Рис. 2.9. Форма колебаний при наличии силы сухого трения

Коэффициент d имеет размерность длины, что следует из уравнения (2.47). Если в момент времени $t = 0$ сместить массу вправо на расстояние $x_0 > d$, правая пружина сожмётся, а левая растянется, и если далее отпустить массу без начальной скорости, то она начнёт за счёт восстанавливающей силы двигаться в направлении, противоположной оси x со скоростью $\dot{x} < 0$ (рис.2.8). При таких начальных условиях решение (2.46) примет вид

$$x = d + (x - d) \cos \omega_0 t. \quad (2.48)$$

В случае $x_0 < d$, модуль силы трения будет больше модуля силы упругости, другими словами, при таком смещении массы из состояния статического равновесия она не будет перемещаться, просто сдвинувшись в новое положение. Реш

В случае, когда $x_2 > d$, движение снова продолжится с $\dot{x} < 0$ до времени $t_3 = 3\pi/\omega_0$, причём, в этот момент времени

$$x_3 = -(x_0 - 6d). \quad (2.52)$$

Таким образом, каждое последующее отклонение оказывается меньшим предыдущего на $2d$, т.е. амплитудные значения смещения образуют арифметическую прогрессию. На рис. 2.9 приведена форма колебаний в системе с сухим трением. **Колебания затухают по линейному закону.**

Полоса смещений, лежащая в интервале $\pm d$ называется областью застоя.

2.4. Примеры колебательных систем с затуханием

Пример № 1. Амплитуда затухающих колебаний математического маятника за время $\tau_1 = 5$ мин уменьшилась в два раза. За какое время, считая от начального момента, амплитуда уменьшится в восемь раз?

1. Запишем уравнение логарифмического декремента колебаний

$$\theta = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{-\delta t}, \quad (1)$$

где $A(t)$ – амплитуда колебаний в начальный момент времени, $A(t+T)$ – значение амплитуды через один период колебания, δ – коэффициент затухания.

2. Определим из уравнения (1) величину коэффициента затухания, переписав его следующим образом

$$\ln \frac{A_0}{A} = \delta \tau_1; \quad \ln 2 = 300\delta; \quad \delta \cong 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}.$$

(2)

3. Воспользовавшись соотношениями (2) определим искомое время, соответствующее уменьшению амплитуды в восемь раз

$$\ln 8 = \delta \tau_2; \quad \tau_2 = \frac{\ln 8}{\delta} = \frac{2,1}{2,3 \cdot 10^{-3}} \cong 504 \text{ с} \cong 15,1 \text{ мин}.$$

(3)

Пример № 2. Логарифмический декремент маятника $\theta = 0,003$. Определите число полных колебаний N , которые совершит маятник при уменьшении амплитуды в два раза.

1. Запишем уравнение логарифмического декремента колебательного процесса, воспользовавшись уравнением

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+\tau)} = \delta \tau = \frac{1}{N}; \quad \Rightarrow \quad N\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+\tau)}, \quad (1)$$

где N – число полных колебаний, соответствующих моменту времени τ .

2. Из уравнения (1) определим искомую величину

$$N = \frac{1}{\theta} \ln 2 = 231. \quad (2)$$

Пример № 3. Определите период затухающих колебаний, если период собственных колебаний системы без потерь равен $T_0 = 1 \text{ с}$, а логарифмический декремент составляет $\theta = 0,628$.

1. Период затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4\pi^2}{T_0^2} - \frac{\theta^2}{T^2}}}, \quad (1)$$

откуда

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\frac{4\pi^2}{T_0^2} - \frac{\theta^2}{T^2}}; \quad \frac{4\pi^2 T^2}{T_0^2} - \theta^2 = 4\pi^2; \quad 4\pi^2 T^2 = T_0^2 4\pi^2 + T_0^2 \theta^2, \quad (2)$$

$$T^2 = T_0^2 + \frac{T_0^2 \theta^2}{4\pi^2}; \quad T = T_0 \sqrt{1 + \frac{\theta^2}{4\pi^2}} \cong 1 \sqrt{1 + \frac{0,39438}{39,478}} \cong 1,00498 \text{ с}. \quad (3)$$

Пример № 4. Известно, что при затухающих колебаниях за $\tau = 0,25 T$ смещение тела составило $x = 4,5$ см, период затухающих колебаний $T = 8$ с, логарифмический декремент $\theta = 0,8$. Начальная фаза колебаний равна $\varphi = 0$. Подучить уравнение затухающих колебаний и представить его графически.

1. Определим величину циклической частоты затухающих колебаний

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi \text{ рад}}{4 \text{ с}}. \quad (1)$$

2. Коэффициент затухания δ определим из уравнения логарифмического декремента

$$\theta = \delta T; \Rightarrow \delta = \frac{\theta}{T} = 0,1 \text{ с}^{-1}. \quad (2)$$

3. Значение амплитуды колебаний для момента времени τ определим, воспользовавшись уравнением затухающих колебаний

$$x(\tau) = A e^{-\delta \tau} \sin \omega \tau = A \exp\left(-\frac{\delta T}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi T}{16}\right), \quad (3)$$

$$x(\tau) = A \exp(-0,2) \sin \frac{\pi}{2}; \quad x(\tau) = A \cdot 0,819 \cdot 1; \quad (4)$$

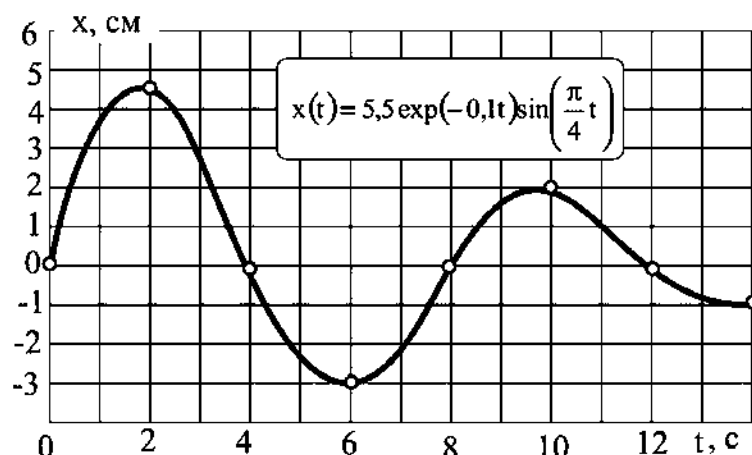
$$A = \frac{x(\tau)}{0,819} \cong 5,5 \text{ см}. \quad (5)$$

4. Запишем уравнение затухающих колебаний применительно к полученным данным

$$x(t) = 5,5 \exp(-0,1t) \sin\left(\frac{\pi}{4} t\right). \quad (6)$$

5. Для построение графика колебаний вычислим значение $x(t)$ для моментов времени: $\tau_1 = T/4 = 2$ с; $\tau_2 = T/2 = 4$ с; $\tau_3 = 3T/4 = 6$ с; $\tau_4 = T = 8$ с; $\tau_5 = 5T/4 = 10$ с; $\tau_6 = 3T/2 = 12$ с. Для чего эти величины времени, кратные $T/4$, последовательно подставим в уравнение (6)

$\tau, \text{ с}$	2	4	6	8	10	12
$x(\tau), \text{ см}$	4,5	0	-3	0	1,98	0



Пример № 5. Задано уравнение затухающих колебаний точки

$$x(t) = 10 \exp(-0,1t) \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right),$$

Найти зависимость скорости движения точки в функции времени, представить зависимость графически.

1. В данном случае амплитуда колебаний равна $A = 10$ см, циклическая частота $\omega = (\pi/3)$ рад/с, коэффициент затухания $\delta = 0,1 \text{ с}^{-1}$, начальная фаза равна нулю.

2. Определим скорость затухающих колебаний, для чего продифференцируем по времени заданное уравнение движения

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ 10 \exp(-0,1t) \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) \right\}, \quad (1)$$

$$\dot{x}(t) = 10 \exp(-0,1t) \left[\frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3}t - 0,1 \sin \frac{\pi}{3}t \right]. \quad (2)$$

3. Определим период колебаний

$$\omega = \frac{2\pi}{T}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \cdot 3 \cdot \pi}{\pi} = 6 \text{ с}. \quad (3)$$

4. Вычислим значение скорости в следующие моменты времени:

$$t_1 = 0,$$

$$\dot{x}(t_1) = 10 \exp(0) \left[\frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} \cdot 0 - 0,1 \sin \frac{\pi}{3} \cdot 0 \right] \cong 10,47 \frac{\text{М}}{\text{с}}; \quad (4)$$

$$t_2 = T/4 = 1,5 \text{ с}$$

$$\dot{x}(t_2) = 10 \exp(-0,1 \cdot 1,5) \left[\frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} \cdot 1,5 - 0,1 \sin \frac{\pi}{3} \cdot 1,5 \right] \cong -0,32 \frac{\text{М}}{\text{с}}; \quad (5)$$

$$t_3 = T/2 = 3 \text{ с}$$

$$\dot{x}(t_3) = 10 \exp(-0,3) \left[\frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} \cdot 3 - 0,1 \sin \frac{\pi}{3} \cdot 3 \right] \cong -7,4 \frac{\text{М}}{\text{с}}; \quad (6)$$

$$t_4 = T = 6 \text{ с}$$

$$\dot{x}(t_4) = 10 \exp(-0,6) \left[\frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} \cdot 6 - 0,1 \sin \frac{\pi}{3} \cdot 6 \right] \cong 5,5 \frac{\text{М}}{\text{с}}; \quad (7)$$

$$t_5 = 5T/4 = 7,5 \text{ с}$$

$$\dot{x}(t_5) = 10 \exp(-0,75) \left[\frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} \cdot 7,5 - 0,1 \sin \frac{\pi}{3} \cdot 7,5 \right] \cong -4,7 \frac{\text{М}}{\text{с}}; \quad (8)$$

$$t_6 = 3T/2 = 9 \text{ с}$$

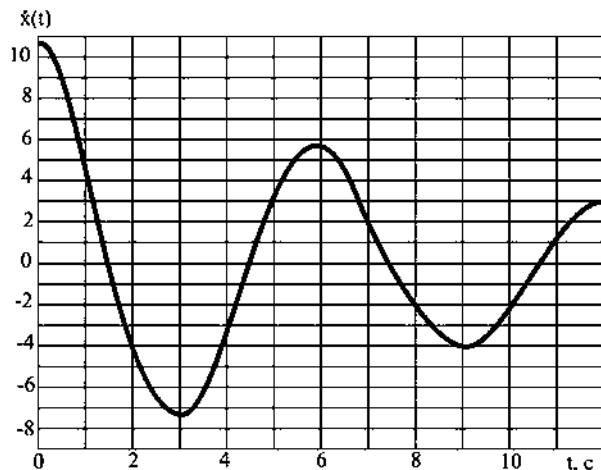
$$\dot{x}(t_6) = 10 \exp(-0,9) \times$$

$$\times \left[\frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} \cdot 9 - 0,1 \sin \frac{\pi}{3} \cdot 9 \right] \cong -4 \frac{\text{М}}{\text{с}}; \quad (9)$$

$$t_7 = 2T = 12 \text{ с}$$

$$\dot{x}(t_7) = 10 \exp(-1,2)$$

$$\left[\frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} \cdot 12 - 0,1 \sin \frac{\pi}{3} \cdot 12 \right] \cong 3 \frac{\text{М}}{\text{с}}.$$



Пример № 6. Математический маятник колеблется в среде, обеспечивающей величину логарифмического декремента $\theta = 0,5$. Во сколько раз уменьшится амплитуда колебаний по истечении одного полного периода колебаний?

1. Запишем уравнение затухающих колебаний в общем виде

$$x(t) = A_0 \exp(-\theta t) \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (1)$$

2. Для определения амплитудных значений отклонений маятника уравнение (1) необходимо переписать при условии $\sin(\omega t + \varphi_0) = 1$

$$A_1 = A_0 \exp\left(-\theta \frac{t}{T}\right); \quad A_2 = A_0 \exp\left(-\theta \frac{t+T}{T}\right) = A_0 e^{-\theta}, \quad (2)$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \exp(0,5) = 1,65. \quad (3)$$

Пример № 7. Математический маятник в течение 120 секунд уменьшил амплитуду колебаний в 4 раза. Определить величину логарифмического декремента, если длина нити подвеса составляет $l = 2,28$ м.

1. Запишем уравнение затухающих колебаний

$$A_1 = A_0 \exp\left(-\theta \frac{t}{T}\right). \quad (1)$$

2. Определим период незатухающих колебаний маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \cong 3 \text{ с}. \quad (2)$$

3. Перепишем уравнение (1) с учётом заданных значений величин и найденного периода

$$\frac{A_0}{A_1} = \exp\left(\theta \frac{120}{3}\right); \quad 40\theta = \ln 4; \quad \theta = \frac{\ln 4}{40} \cong 0,035. \quad (3)$$

Пример № 8. Математический маятник длиной колеблется в среде с коэффициентом затухания $\delta = 0,045$. Определить время τ , в течение которого амплитуда колебаний уменьшится в 10 раз.

1. Уравнение колебаний математического маятника можно записать, представив отклонение грузика в угловых величинах

$$\varphi(t) = \varphi_0 \exp(-\delta t) \sin \omega t, \quad (1)$$

где ω – частота затухающих колебаний.

2. Запишем уравнение (1) применительно к амплитудным значениям отклонения

$$\varphi_1 = \varphi_0 \exp(-\delta t); \quad \varphi_2 = \varphi_0 \exp[-\delta(t + \tau)]. \quad (2)$$

3. Определим, используя уравнения (2) отношение амплитуд

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \exp(\delta \tau); \quad \ln 10 = \delta \tau; \quad \tau = \frac{\ln 10}{\delta} \cong 51 \text{ с}. \quad (3)$$

Пример № 9. Математический маятник длиной $l = 1,09$ м колеблется в вязкой среде с коэффициентом затухания $\delta = 0,3 \text{ с}^{-1}$. Во сколько раз должен возрасти коэффициент затухания, чтобы гармонические колебания оказались невозможными?

1. Запишем уравнение периода затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}, \quad (1)$$

из которого следует, что предельное значение коэффициента затухания соответствует $\delta_{\max} = \omega_0$, или

$$\delta_{\max} = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \cong 3 \text{ с}^{-1}. \quad (2)$$

2. Коэффициент затухания должен увеличиться в ζ - раз

$$\zeta = \frac{\delta_{\max}}{\delta} = 10. \quad (3)$$

Пример № 10. Амплитуда затухающих колебаний за время $\tau_1 = 100$ с уменьшилась в $n_1 = 20$ раз. Во сколько раз амплитуда уменьшится за время $\tau_2 = 200$ с?

1. Запишем уравнение для амплитуд затухающих колебаний

$$A(t) = A_0 \exp(-\delta t). \quad (1)$$

2. В данном случае

$$\frac{A_0}{A(\tau_1)} = n_1; \quad \ln n_1 = \theta \tau_1. \quad (2)$$

3. Запишем уравнение, аналогичное (2) для момента времени $t = \tau_2$

$$\ln n_2 = \theta \tau_2, \quad (3)$$

4. Решая совместно уравнения (1) и (2) относительно величины n_2 , получим

$$n_2 = \frac{A_0}{A(\tau_2)}; \quad A(\tau_2) = A_0 \exp\left(-\frac{\tau_2}{\tau_1} \ln n_1\right) = A_0 n_1^{-\frac{\tau_2}{\tau_1}}, \quad (4)$$

откуда

$$n_2 = n_1^{\frac{\tau_2}{\tau_1}} = 20^{\frac{200}{100}} = 20^2 = 400. \quad (5)$$

Пример № 11. Колебания некой точки происходят в соответствии с уравнением $x(t) = 100 \exp(-0,01t) \cos 8\pi t$, мм. Определить амплитуду после того, как будут выполнены $N = 100$ полных колебаний.

1. Из заданного уравнения движения следует что: циклическая частота колебаний составляет $\omega = 3\pi$ рад/с; коэффициент затухания – $\delta = 0,01 \text{ с}^{-1}$; начальная амплитуда колебаний – 100 см.

2. Определим период колебаний и логарифмический декремент

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,67 \text{ с}, \quad \theta = \delta T = 6,7 \cdot 10^{-3}. \quad (1)$$

3. Амплитуда после истечения заданного числа колебаний определится на основании заданного уравнения так

$$A_N = A_0 \exp(\theta N) = 100 \exp(-1) = 36,78 \text{ мм}. \quad (2)$$

Пример № 12. Математический маятник длиной $l = 2$ м, колеблющийся в среде с потерями, за время $\tau = 10$ мин потерял 50 % своей энергии. Определить логарифмический декремент маятника.

1. В первом приближении можно считать, что энергия затухающих колебаний пропорциональна квадрату амплитуды

$$\left. \begin{aligned} E_1 &\cong A_0^2 \exp(-2\delta t_1); \\ E_2 &\cong A_0^2 \exp[-2\delta(t_1 + \tau)] \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

2. По условию задачи

$$\frac{E_2}{E_1} = 0,5. \quad (2)$$

3. Совместим условие (2) в системой уравнений (1)

$$\frac{E_2}{E_1} = \exp(-2\delta\tau) = 0,5; \Rightarrow -2\delta\tau = \ln 0,5; \quad (3)$$

$$\delta = -\frac{\ln 0,5}{2\tau} = -\frac{-0,693}{1200} \cong 5,8 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}. \quad (4)$$

4. Период колебаний маятника, ввиду малости коэффициента затухания можно приближённо определить уравнением

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 6,28\sqrt{\frac{2}{9,81}} \cong 2,83 \text{ с}. \quad (5)$$

5. Логарифмический декремент колебаний определится как

$$\theta = \delta T = 1,6 \cdot 10^{-3}.$$

(6)

Пример № 13. Математический маятник длиной $l = 2 \text{ м}$ колеблется в среде с логарифмическим декрементом $\theta = 0,01$, так что энергия колебаний уменьшилась в $\zeta = 10$ раз. Какое время t прошло при этом с момента начала колебаний?

1. Запишем уравнение амплитуд затухающего колебания и определим относительную амплитуду

$$A_1 = A_0 \exp\left(-\theta \frac{t}{T}\right); \Rightarrow \frac{A_0}{A_1} = \exp\left(\frac{\theta t}{T}\right); \quad (1)$$

2. Подставим в уравнение (2) соотношение для периода колебаний

$$\xi = \exp\left(\frac{\theta t}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\ell}}\right); \quad (2)$$

3. Для того чтобы связать величины ξ и ζ необходимо проанализировать уравнение энергии колебательного движения

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(\omega A)^2}{2} = \frac{m2\pi^2 A^2}{T^2}; \quad (3)$$

$$\frac{E_0}{E_1} = \left(\frac{A_0}{A_1}\right)^2; \Rightarrow \zeta = \exp\left(\frac{\theta t}{\pi} \sqrt{\frac{g}{\ell}}\right); \quad (4)$$

$$\ln \zeta = \frac{\theta t}{\pi} \sqrt{\frac{g}{\ell}}; \quad t = \frac{\pi}{\theta} \sqrt{\frac{\ell}{g}} \ln \zeta = \frac{3,14}{0,01} \sqrt{\frac{2}{9,81}} \cdot 2,3 \cong 326 \text{ с} = 5,4 \text{ мин}. \quad (5)$$

Пример № 14. Определите число полных колебаний N , в течение которых энергия системы уменьшится в два раза. Логарифмический декремент колебаний $\theta = 0,01$.

1. Для решения задачи воспользуемся уравнением (2) задачи 2.1.2

$$N_1 = \frac{1}{\theta} \ln \frac{A_0}{A_1} = \frac{1}{\theta} \ln \sqrt{\frac{E_0}{E_1}} = \frac{1}{\theta} \ln \sqrt{2} = \frac{1}{0,01} \ln 1,41 \cong 35. \quad (1)$$

Пример № 15. Найти период затухающих колебаний математического маятника если период его собственных колебаний составляет $T_0 = 1$ с, а логарифмический декремент равен $\theta = 0,628$

1. Определим циклическую частоту собственных колебаний математического маятника

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 6,28 \frac{\text{рад}}{\text{с}}. \quad (1)$$

2. Определим коэффициент затухания

$$\theta = \delta T; \quad \delta = \theta/T = 0,628 \text{ с}^{-1}. \quad (2)$$

3. Найдём период затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \cong \frac{6,28}{\sqrt{39,4 - 0,39}} \cong 1,0054 \text{ с}. \quad (3)$$

Пример № 16. Тело массой $m = 5$ кг совершает гармонические затухающие колебания. За первые 50 с колебаний тело теряет 60% своей первоначальной энергии. Определите коэффициент сопротивления среды.

1. Определим коэффициент затухания δ из следующих соображений

$$\frac{A_0}{A_1} = \exp(\delta\tau); \quad \frac{E_0}{E_1} = \left(\frac{A_0}{A_1}\right)^2 = \exp(-2\delta\tau); \quad \ln 0,4 = -2\delta\tau, \quad (1)$$

$$\delta = \frac{\ln 0,6}{2\tau} = 9,16 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}. \quad (2)$$

2. Найдём коэффициент сопротивления среды, в которой колеблется тело

$$\delta = r/2m; \quad r = 2\delta m = 0,0916 \text{ кг/с}. \quad (3)$$

Пример № 17. Некое тело массой $m = 1$ кг находится в вязкой среде с коэффициентом сопротивления $r = 0,05$ кг/с. Тело соединено с двумя одинаковыми недеформированными пружинами жёсткости $k = 50$ Н/м. Определить логарифмический декремент при возникновении малых колебаний, период колебаний и коэффициент затухания.

1. Определим коэффициент затухания, воспользовавшись уравнением (3) предыдущей задачи

$$\delta = r/2m = 0,05/2 = 0,025 \text{ с}^{-1}. \quad (1)$$



2. Найдём циклическую частоту и период свободных и затухающих колебаний системы с учётом того, что пружины соединены параллельно

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}} = 10 \frac{\text{рад}}{\text{с}}; \quad \nu_0 = \frac{\omega}{2\pi} = 1,59 \text{ Гц}. \quad (2)$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{6,28}{\sqrt{100 - 6,25 \cdot 10^{-4}}} \cong 0,628 \text{ с}. \quad (3)$$

3. Логарифмический декремент колебаний

$$\theta = \delta T = 0,0157. \quad (4)$$

3. Вынужденные колебания в линейных системах

3.1. Действие гармонической внешней силы

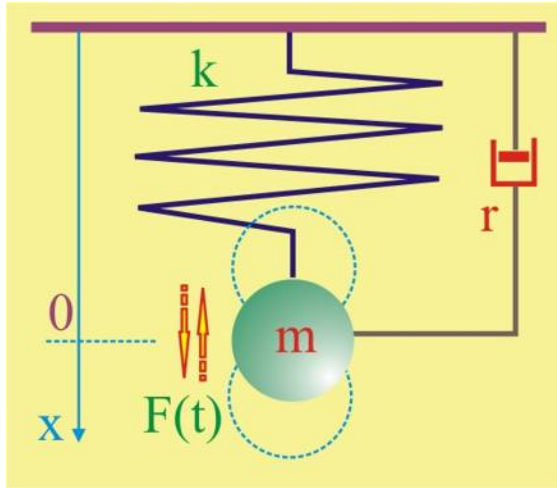


Рис. 3.1. Вынужденные колебания

Рассмотренные в предыдущих разделах колебания возникали при создании определённых начальных условий – смещения и скорости. Возникающие при этом движения протекали без участия внешних сил, а если силы, обусловленные сопротивлением, возникали, то колебательные процессы затухали. На практике часто требуется колебания поддерживать, что возможно при сообщении колебательной системе энергии от внешнего источника. Такие колебания классифицируются как вынужденные колебания. Рассмотрим колебательную систему в виде массы, соединённой с вертикально расположенной пружиной (рис. 3.1). Помимо силы сопротивления к массе приложена внешняя периодическая сила

$F(t)$. Уравнение движения в этом случае запишется следующим образом

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F(t). \quad (3.1)$$

Рассмотрим случай, когда внешняя возбуждающая сила изменяется по гармоническому закону с частотой Ω , например, по закону косинуса

$$F = F_0 \cos \Omega t. \quad (3.2)$$

Уравнение (3.1) перепишется в виде

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t. \quad (3.3)$$

Введём следующие обозначения

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \beta = \frac{r}{2m}, \quad f_0 = \frac{F_0}{m}, \quad (3.4)$$

что позволяет уравнение (3.3) переписать в виде

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t. \quad (3.5)$$

Неоднородное дифференциальное уравнение (3.5) имеет решение в виде суммы общего решения однородного уравнения x_1 и частного решения x_2 неоднородного уравнения, причём

$$x_1 = e^{-\beta t} \left(C_1 e^{t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} + C_2 e^{-t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \right), \quad (3.6)$$

$$x_2 = x_0 \cos(\Omega t - \varphi), \quad (3.7)$$

$$x = x_1 + x_2 = e^{-\beta t} \left(C_1 e^{t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} + C_2 e^{-t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \right) + x_0 \cos(\Omega t - \varphi). \quad (3.8)$$

Первый член уравнения (3.8) характеризует свободные затухающие колебания. Постоянные интегрирования C_1 и C_2 , как обычно, определяются путём подстановки начальных условий $x(0)$ и $\dot{x}(0)$, имеющих место при $t = 0$. Второй член этого уравнения описывает стационарные вынужденные колебания, происходящие с частотой вынуждающей внешней силы Ω с амплитудой, определяемой уравнением

$$x_0 = \frac{F_0}{\Omega \sqrt{r^2 + \left(\frac{k}{\Omega} - \Omega m\right)^2}} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2\beta^2}}. \quad (3.9)$$

Сдвиг фазы колебаний относительно внешней силы равен

$$\varphi = \arctg \frac{r}{\frac{k}{\Omega} - \Omega m} = \arctg \frac{2\Omega\beta}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (3.10)$$

Для случая малого затухания, т.е. при $\beta \rightarrow 0$ уравнение (3.9) возможно упростить

$$x_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \frac{f_0}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}; \quad (3.11)$$

Очевидно, что при $\omega_0 = \Omega$, $A \rightarrow \infty$, но это случай довольно далёк от реальности, затухание при колебаниях всегда имеет место быть. Вместе с тем уравнение (3.11) позволяет установить некоторые характерные особенности поведения амплитуды вынужденных колебаний в зависимости от соотношения частот возмущающей силы и собственных колебаний.

Целесообразно выделить три характерных диапазона частот (рис. 3.2).

1. Область низких частот: $\Omega \ll \omega_0$: в этом случае сдвиг фаз близок к нулю, а амплитуда вынужденных колебаний составит

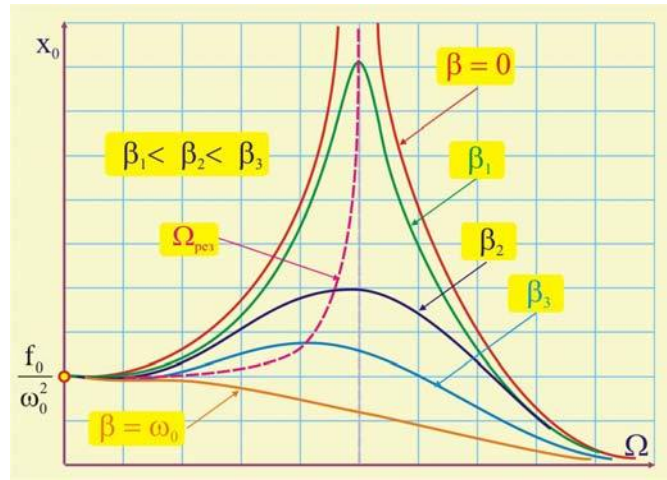


Рис. 3.2. Частотные характеристики

$$x_0 \cong x_{0(\text{Стат})} = \frac{f_0}{\omega_0^2}, \quad (3.12)$$

где $x_{0(\text{Стат})}$ – статическое смещение под действием постоянной силы, равной амплитудному значению возмущающей силы, т.е. $F = F_0$.

2. Область высоких частот: $\Omega \gg \omega_0$. Начальная фаза в этом случае $\alpha \rightarrow -\pi$. Колебания происходят в противофазе с вынуждающей силой. Амплитуда с ростом частоты убывает по закону

$$x_0 \cong x_{0(\text{Стат})} \cdot \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2. \quad (3.13)$$

3. Область резонанса: $\Omega \cong \omega_0$. В отсутствие сопротивления амплитуда вынужденных колебаний неограниченно возрастает. В реальных системах увеличение амплитуды будет ограничиваться диссипативными потерями.

Частоту вынужденных колебаний, при которой наблюдается явление резонанса, называют **резонансной частотой**

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}; \quad (3.14)$$

при $\beta \ll \omega_0$, $\Omega_{\text{рез}} \cong \omega_0$.

Зависимость (3.10) называется фазовой характеристикой колебаний. Такие характеристики при различных значениях затухания представлены в виде графиков на рис. 3.3. По мере уменьшения силы сопротивления кривые стремятся к предельной зависимости, претерпевающей разрыв в точке $\Omega_{\text{рез}} \cong \omega_0$, т.е. при резонансе. В этой точке при любых значениях ко-

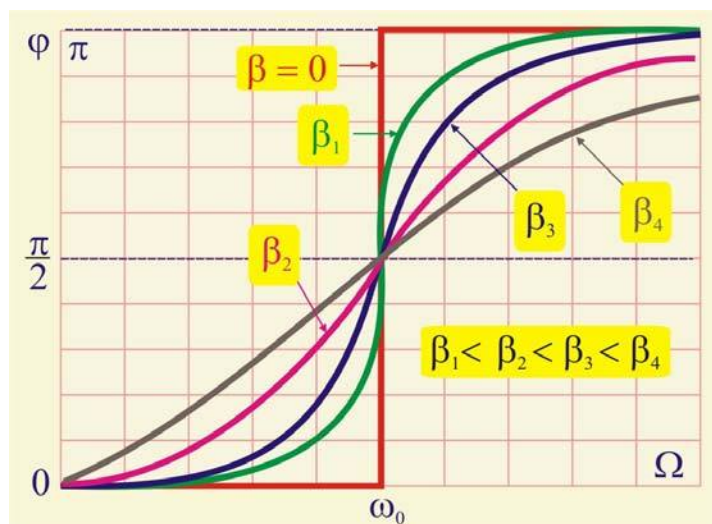


Рис. 3.3. Фазовые характеристики

эфициента затухания сдвиг фазы составляет $\varphi = \pi/2$. При малых значениях затухания в области частот $\Omega < \omega_0$ вынужденные колебания почти совпадают по фазе с внешней силой, а при $\Omega > \omega_0$ находится с ней в противофазе. Если частота Ω изменяется плавно, то фаза вынужденных колебаний меняется в области резонанса на обратную частоту, тем резче, чем меньше затухание в системе.

Процесс вырождения собственных колебаний и установления вынужденных колебаний протекает по-разному, в зависимости от соотношения между частотами

собственных и внешних колебаний. На рис. 3.4. приведены качественные зависимости от времени собственных колебаний (пунктирная кривая) и вынужденных колебаний (сплошная кривая) для разного соотношения частот.

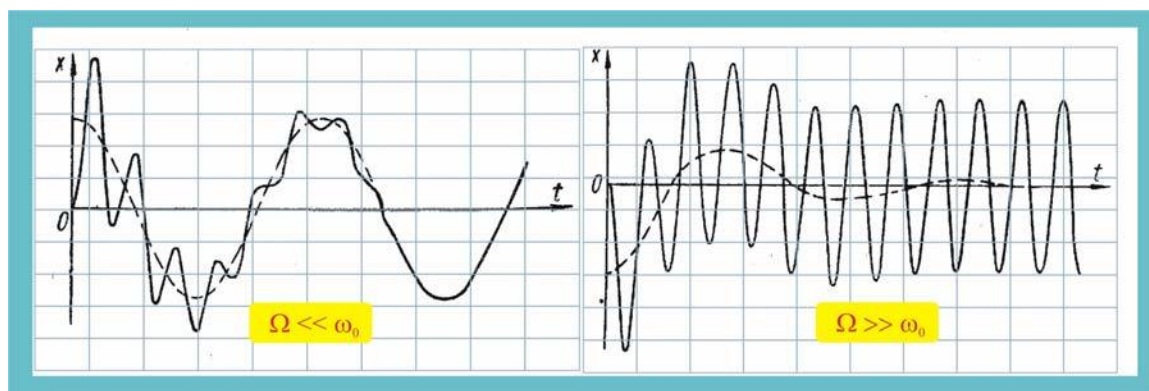


Рис. 3.4. Процесс установления вынужденных колебаний [2]

Если величины Ω и ω близки друг к другу, то процесс установления сопровождается чередующимися нарастаниями и спадами типа биений, которые тем глубже, чем меньше силы затухания и тем реже, чем ближе Ω и ω_0 . При резонансе, когда $\omega = \Omega$ (рис. 3.5) вынужденные колебания устанавливаются без биений тем медленнее, чем меньше затухание, т.е. $\beta_1 > \beta_2 > \beta_3$.

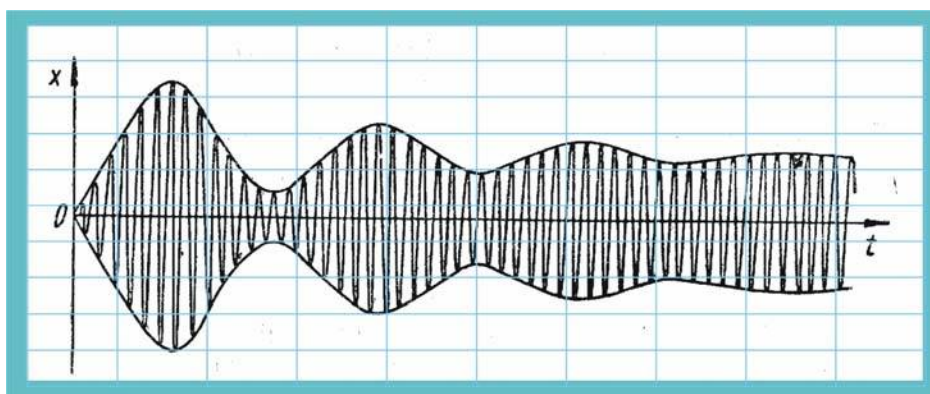


Рис. 3.5. Процесс установления вынужденных колебаний при $\omega_0 = \Omega$ [2]

Явление резонанса в одинаковой степени типично как для механических, так и для электрических и электромеханических колебательных систем и поэтому играет важную роль в самых разнообразных отделах физики и техники.

Характер резонанса зависит от свойств как самой колебательной системы, в которой происходит явление, так и от свойств внешней возмущающей силы, действующей на систему. Особенно сложный характер явление резонанса имеет в системах с распределёнными параметрами. Например, в струне, резонанс сохраняет свои типичные свойства, однако имеются и отличительные особенности. Система обладает множеством степеней свободы, т.е. целым набором собственных частот. Резонанс может наступать всякий раз, когда одна из гармоник внешней силы совпадает с одной из собственных частот.

Существует масса способов исследования резонансных свойств колебательных систем, но самым, пожалуй, распространённым является электродинамический, когда механические колебания в довольно широкой полосе частот возбуждаются специальным преобразователем (рис. 3.6). Электродинамический преобразователь использует взаимодействие катушки с током и мощного постоянного магнита. Катушка питается переменным током, с частотой которого колеблется исследуемая масса. Такие системы получили особо широкое распространение в судостроении, авиастроении и других отраслях машиностроения, где имеют место высокоинтенсивные источники вибраций. Явление резонанса имеет огромное влияние на прочностные характеристики практически всех известных конструкций машиностроения и транспорта. По статистике около 80% аварий и поломок в системе среднего машиностроения происходит именно из-за, недопустимо высоких амплитуд колебаний.

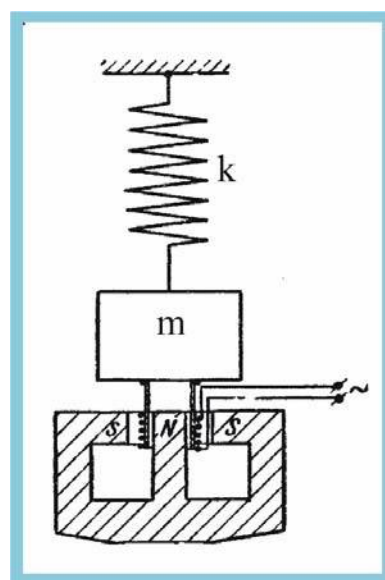


Рис. 3.6. Электродинамический преобразователь [2]

3.2. Уравнение вынужденных колебаний в обобщённых координатах

Пусть на колебательную систему действует некая система внешних сил, которые являются известными функциями времени [4]

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i(t), \quad (3.15)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$ – порядковый номер элемента колебательной системы, к которой приложена возбуждающая сила. В случае системы с одной степенью свободы возможная обобщённая работа возбуждающих сил

$$\delta A = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q}, \quad (3.16)$$

может быть записана в следующем виде

$$Q = Q(t) = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q}, \quad (3.17)$$

где $\vec{r}_i$ – радиус-вектор данной точки колебательной системы, q – обобщённая координата.

Соответствующее рассматриваемому случаю уравнение Лагранжа представится следующим образом

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = Q(t). \quad (3.18)$$

Запишем далее уравнения кинетической T и потенциальной энергии Π

$$T = \frac{a\dot{q}^2}{2}, \quad \Pi = \frac{cq^2}{2}, \quad (3.19)$$

где a – обобщённая масса, c – обобщённый коэффициент жёсткости. При подстановке уравнений (3.19) в уравнение Лагранжа, получим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний в обобщённых координатах

$$a\ddot{q} + cq = Q(t), \quad (3.20)$$

которое можно переписать в более удобном виде

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = \frac{Q(t)}{a}, \quad (3.21)$$

где $\omega_0^2 = c/a$ – циклическая частота собственных колебаний.

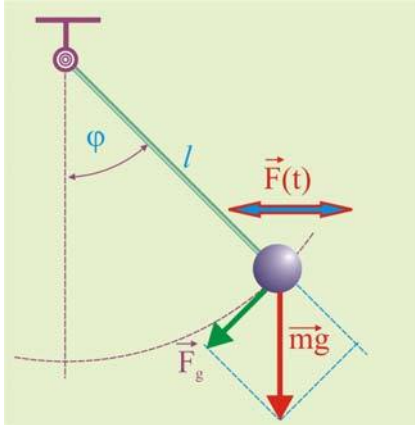


Рис. 3.7. Горизонтальная возбуждающая сила

Рассмотрим действие горизонтальной силы $\vec{F}(t)$ на математический маятник (рис. 3.7). В качестве обобщённой координаты в данном случае целесообразно принять угол отклонения маятника от вертикали φ . Энергетические соотношения для этой системы представятся следующим образом

$$T = \frac{m(\ell\dot{\varphi})^2}{2}, \quad \Pi = \frac{mg\ell\varphi^2}{2}, \quad Q = F(t)\ell. \quad (3.22)$$

Уравнение вынужденных колебаний (3.21) переписывается в виде

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\varphi = \frac{F(t)}{m\ell}. \quad (3.23)$$

Рассмотрим действие на колебательную систему гармонической возбуждающей силы (рис. 3.8) вида

$$Q = H\sin\Omega t, \quad (3.24)$$

где H – амплитуда вынуждающей силы, Ω – частота внешнего воздействия. Дифференциальное уравнение движения применительно к рассматриваемой системе можно записать следующим образом

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = \frac{H}{a}\sin\Omega t. \quad (3.25)$$

Для случая $\Omega \neq \omega_0$ и нулевых начальных условиях: $q(0) = 0$, $\dot{q}(0) = 0$ решение уравнения (3.25) представляется соотношением

$$q = \frac{H}{a(\omega_0^2 - \Omega^2)} \left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_0} \sin\omega_0 t \right). \quad (3.26)$$

Уравнение (3.26) показывает, что результирующее колебание будет представляться в виде разности вынужденных колебаний с частотой внешней силы Ω и собственных колебаний на частоте ω_0 . Собственные колебания в реальных системах будут вследствие действия сил сопротивления затухать (рис.3.4). По прошествии некоторого промежутка времени колебания станут моногармоническими, при этом

$$q = \frac{H}{a(\omega_0^2 - \Omega^2)} \sin\Omega t. \quad (3.27)$$

Запишем амплитуду вынужденных колебаний в виде

$$A = \frac{H}{a|\omega_0^2 - \Omega^2|} = \frac{H}{|c - a\Omega^2|}, \quad (3.28)$$

что позволяет амплитуду представить следующим образом

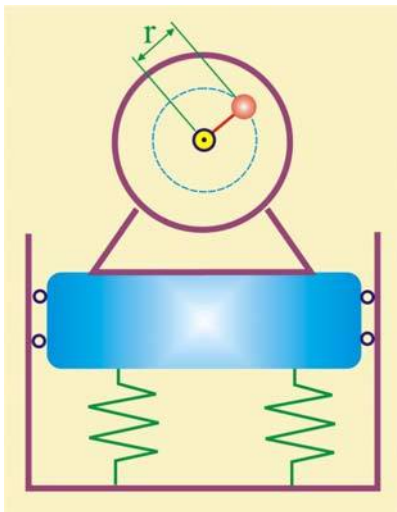


Рис. 3.8. Гармоническое возбуждение

$$A = \mu q_{st}, \quad (3.29)$$

где

$$\mu = \frac{1}{\left| 1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \right|}, \quad (3.30)$$

называется **коэффициентом динамичности**, который показывает во сколько раз амплитуда установившихся вынужденных колебаний больше перемещения $q_{st} = H/k$, вызываемого статически приложенной силой H . На рис. 3.9 приведена зависимость коэффициента динамичности от соотношения частот.

С ростом частоты внешней периодической силы значение коэффициента динамичности увеличивается и при $\Omega/\omega_0 \rightarrow 0$ устремляется к бесконечности. Дальнейшее увеличение Ω сопровождается уменьшением значения коэффициента динамичности, при $\Omega/\omega_0 > \sqrt{2}$ становится меньше единицы, т.е. динамический эффект вынуждающей силы меньше статического воздействия. Этим обстоятельством пользуются на практике для уменьшения влияния вынужденных колебаний на прочностные характеристики вращающихся элементов машин и механизмов с целью предотвращения потери работоспособности.

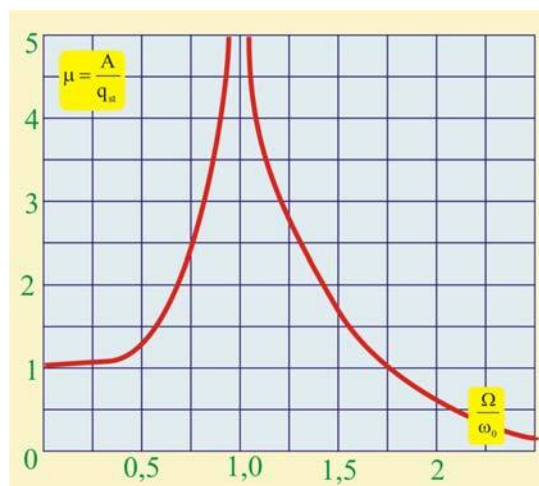


Рис. 3.9. Зависимость коэффициента динамичности от соотношения частот

Когда $\Omega = \omega_0$ решение (3.26) перестаёт быть справедливым. Уравнение движения для области резонанса записывается в виде следующего дифференциального уравнения

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = \frac{H}{a} \sin \omega_0 t, \quad (3.31)$$

которое имеет следующее решение

$$q = -\frac{H}{2k} (\omega_0 t \cos \omega_0 t - \sin \omega_0 t). \quad (3.32)$$

Особенностью этого решения является наличие члена $\omega_0 t \cos \omega_0 t$, который содержит время в виде множителя косинуса, что указывает на неограниченное возрастание амплитуды с течением времени. Как было показано ранее (рис. 3.2), учёт затухания изменяет резонансную характеристику, бесконечное увеличение амплитуды вынужденных колебаний при резонансе не наблюдается.

3.3. Кинематическое возбуждение колебаний

Дифференциальное уравнение (3.25) может быть применено к возбуждению вынужденных колебаний кинематическим воздействием на систему, когда колебания возникают вследствие воздействия на движение отдельных точек системы. Так, например, если точку подвеса математического маятника перемещать возвратно поступательно (рис.3.7), то это вызовет колебания маятника. Если точка подвеса колеблется по закону $x = x(t)$, то уравнения потенциальной и кинетической энергии запишутся следующим образом

$$K = \frac{m(\dot{x} + \ell \dot{\varphi})^2}{2}, \quad \Pi = \frac{mg\ell \varphi^2}{2}, \quad Q = 0, \quad (3.33)$$

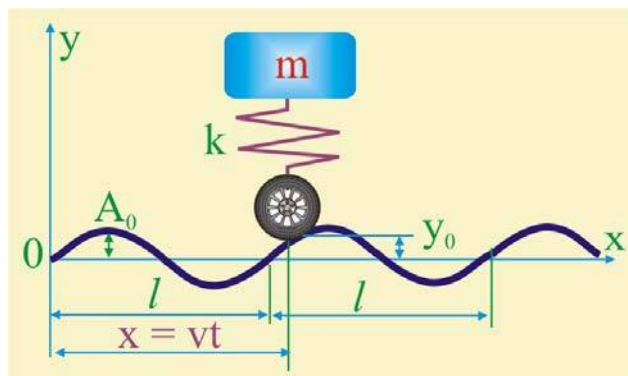
где m – масса грузика маятника, x – координата смещения точки подвеса в горизонтальном

направлении, φ – угол отклонения нити подвеса от вертикали, l – длина нити подвеса. Уравнение Лагранжа в этом случае запишется в виде

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell} \varphi = -\frac{\ddot{x}}{\ell}. \quad (3.34)$$

Полученное уравнение совпадает по внешнему виду с уравнением (3.23), составленным для случая силового возбуждения, если ввести в рассмотрение эквивалентную возбуждающую силу вида

$$Q(t) = -m\ddot{x}. \quad (3.35)$$



3.10. Перемещение по синусоидальному профилю

Рассмотрим в качестве примера кинематического возбуждения вынужденных колебаний движение с постоянной горизонтальной скоростью $\bar{v}$ подпружиненного колеса по синусоидальному профилю дороги (рис. 3.10)

$$y_0 = A_0 \sin \frac{\pi x}{\ell}. \quad (3.36)$$

Масса m , способная колебаться только вертикально, соединена с колесом упругим элементом с коэффициентом жёсткости величиной k . Требуется определить наибольшее допустимое значение

коэффициента жёсткости подвески (применительно к автомобильному колесу) при которой амплитуда абсолютных колебаний массы (кузова автомобиля) не превосходила бы величину $0,05 A_0$ [4].

Подставим в уравнение (3.36) значение горизонтального перемещения подвески исходя из условия $x = vt$

$$y_0 = A_0 \sin \frac{\pi vt}{\ell}. \quad (3.37)$$

Обозначим вертикальное перемещение эквивалентной массы относительно положения статического равновесия через y , в этом случае дифференциальное уравнение движения примет вид

$$-k(y - y_0) = m\ddot{y}, \quad (3.38)$$

или

$$m\ddot{y} + ky = ky_0. \quad (3.39)$$

На основании последнего уравнения можно записать эквивалентную возбуждающую силу следующим образом

$$F(t) = kA_0 \sin \frac{\pi vt}{\ell}, \quad (3.40)$$

где kA_0 – амплитуда эквивалентной возбуждающей силы. Амплитуда абсолютных колебаний определится из уравнения (3.28)

$$\frac{A_0}{\left|1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right|} = \frac{A_0}{\left|1 - \frac{\pi^2 v^2 m}{k\ell^2}\right|}, \quad (3.41)$$

причём по условию задачи $A < 0,05 A_0$, т.е.

$$\frac{1}{\frac{m\pi^2 v^2}{k\ell^2} - 1} < 0,05, \quad (3.42)$$

откуда

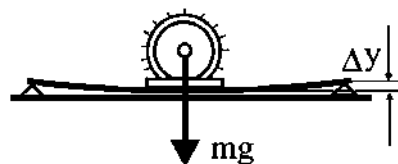
$$k < \frac{0,47mv^2}{\ell}. \quad (3.43)$$

3.4. Примеры вынужденных колебаний

Пример № 1. Упругая балка, на которой установлен двигатель, погнулась под его весом на $\Delta y = 1 \cdot 10^{-3}$ м. Определить частоту вращения ротора электродвигателя n_0 при которой может возникнуть опасность резонанса.

1. Статический прогиб обусловлен силой тяжести электродвигателя, которая равна по модулю и противоположна по направлению реакции связи, вызванной упругостью балки

$$mg = k\Delta y. \quad (1)$$



2. Масса, соединённая с упругим элементом обладает собственной циклической частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (2)$$

3. Совмещая уравнения (1) и (2), получим, по сути, значение частоты собственных незатухающих колебаний системы электродвигатель – упругая балка

$$\frac{k}{m} = \frac{\Delta y}{g}; \quad \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta y}}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta y}}; \quad (3)$$

$$\omega_0 = 2\pi n_0; \Rightarrow n_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\Delta y}} \cong \frac{1}{6,28} \sqrt{\frac{10}{10^{-3}}} \cong 16 \frac{\text{об}}{\text{с}}. \quad (4)$$

Пример №2. Маневровый тепловоз массой $m = 1,6 \cdot 10^5$ кг имеет четыре рессоры жесткость каждой, из которых равна $k = 500$ кН/м. При какой скорости равномерного движения тепловоз будет наиболее сильно раскачиваться в направлении вертикальной оси, если расстояние между стыками рельс $l = 12,8$ м.

1. Раскачивание тепловоза вдоль вертикальной оси будет происходить вследствие толчков, получаемых колёсными парами на стыках рельс. Явление резонанса колебательной системы, состоящей из массы тепловоза m и четырёх упругих элементов жесткостью k , будет иметь место при совпадении частоты собственных колебаний системы с частотой следования импульсов на стыках рельсов.

2. Частота собственных колебаний тепловоза

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4k}{m}}, \quad (1)$$

$$\omega = 2\pi\nu; \Rightarrow \nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4k}{m}}. \quad (2)$$

3. Частота следования импульсов, обусловленных стыками

$$\nu = \frac{v}{l}. \quad (3)$$

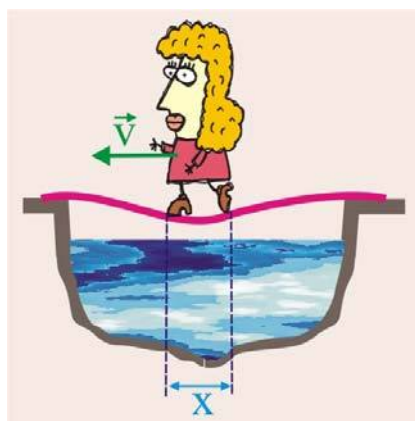
4. Приравняем уравнения (2) и (3) исходя из условия совпадения собственной частоты и частоты возбуждающей силы



$$v_0 = v; \quad \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4k}{m}} = \frac{v}{\ell}; \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\ell}{2\pi} \sqrt{\frac{4k}{m}}, \quad (4)$$

$$v = \frac{12,8}{6,28} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^6}{1 \cdot 10^5}} \cong 9,1 \frac{\text{м}}{\text{с}} \left(\approx 33 \frac{\text{км}}{\text{час}} \right). \quad (5)$$

Пример № 3. Через ручей переброшена длинная упругая доска. Когда женщина стоит посередине такого мостика, доска прогибается в средней части на расстояние $\Delta y = 0,1$ м. Когда же она переходит мостик со скоростью $v = 3,6$ км/час, то доска начинает так раскачиваться в вертикальном направлении, что возникает вероятность падения дамы в воду. Определить длину шага.



шления ребёнка по доске

1. Когда девочка стоит посередине доски, то сила её веса уравнивается силой, обусловленной упругостью доски

$$mg = k\Delta y, \quad (1)$$

где k – коэффициент упругости доски, m – масса девочки, Δy – статический прогиб доски.

2. Из уравнения (1) можно определить частоту собственных колебаний системы «девочка – доска»

$$\frac{k}{m} = \frac{g}{\Delta y}; \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta y}}; \quad v_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\Delta y}}. \quad (2)$$

3. С другой стороны, частоту раскачивания доски можно выразить через длину шага x и скорость перемещения

$$v = \frac{v}{x}. \quad (3)$$

4. Возрастание амплитуды колебаний будет наблюдаться при совпадении частот

$$v_0 = v; \quad \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\Delta y}} = \frac{v}{x}; \quad (4)$$

$$x = 2\pi v \sqrt{\frac{\Delta y}{g}} = 6,28 \cdot 1 \sqrt{\frac{0,1}{9,81}} \cong 0,634 \text{ м.}$$

Пример № 4. На осциллятор массы m без затухания с собственной частотой ω_0 действует периодическая вынуждающая сила $F(t) = F_0 \cos \omega t$. При каких начальных условиях будут протекать только вынужденные колебания? Найти закон изменения смещения $x(t)$.

1. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний в общем виде можно представить следующим образом

$$\ddot{x} + \frac{r}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t; \quad \ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t; \quad (1)$$

$$x(t) = A^* \cos \omega t; \quad A^* = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (2)$$

Так как осциллятор без затухания, то

$$\beta = 0; \quad A^* = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (3)$$

где ω_0 – циклическая частота собственных колебаний осциллятора, ω – циклическая частота возмущающей силы, A^* – амплитуда вынужденных колебаний, $f_0 = F_0/m$ – приведённая амплитуда внешней силы.

2. Для определения начального смещения x_0 подставим в уравнение вынужденных колебаний $t=0$

$$x_0 = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega \cdot 0) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (4)$$

3. Продифференцируем по времени уравнение колебаний (2)

$$\dot{x}(t) = A^* \omega \sin \omega t; \quad \dot{x}_0 = A^* \omega \sin(\omega \cdot 0) = 0. \quad (5)$$

4. Уравнение колебаний в этом случае примет вид

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t. \quad (6)$$

Пример № 5. Определить через какой промежуток времени установятся вынужденные колебания с системе с добротностью $Q = 10^6$ при частоте собственных колебаний $\omega_0 = 5$ крад/с при воздействии внешней возбуждающей периодической силы.

1. Добротность колебательной системы Q прямо пропорциональна циклической частоте собственных колебаний ω_0 и обратно пропорциональна удвоенному коэффициенту затухания β

$$Q = \omega_0 / 2\beta. \quad (1)$$

2. Время релаксации системы обратно пропорционально коэффициенту затухания

$$\tau = \frac{1}{\beta}; \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{\omega_0 \tau}{2}; \quad \tau = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 10^6}{5 \cdot 10^3} = 400 \text{ с}. \quad (2)$$

Пример № 6. Определить разность фаз φ между смещением и вынуждающей силой на резонансе смещения, если собственная частота колебаний равна $\omega_0 = 50$ рад/с, коэффициент затухания $\delta = 5,2 \text{ с}^{-1}$.

1. Разность фаз в режиме резонанса между смещением и вынуждающей силой определяется уравнением

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (1)$$

2. Резонансная частота может быть найдена с помощью уравнения

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \quad (2)$$

3. Подставим в уравнение (1) значение резонансной частоты

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}{\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}{\delta}. \quad (3)$$

Внесём далее коэффициент затухания δ под корень

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\delta}\right)^2 - 2}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\delta}\right)^2 - 2} \cong 84^\circ. \quad (4)$$

Пример № 7. Определить, на сколько герц резонансная частота отличается от частоты собственных колебаний системы $\nu_0 = 1$ кГц, характеризуемой коэффициентом затухания $\delta = 400 \text{ с}^{-1}$.

1. Циклическая частота резонансных колебаний системы определяется уравнением

$$\omega_R = \sqrt{4\pi^2 v_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{3,943 \cdot 10^7 - 3,2 \cdot 10^5} = 6,254 \cdot 10^3 \text{ рад/с} . \quad (1)$$

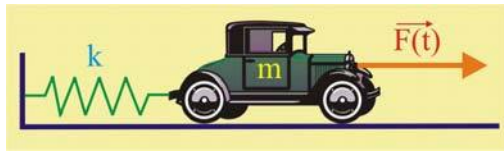
2. Частота резонансных колебаний

$$v_R = \frac{\omega_R}{2\pi} \cong 996 \text{ Гц} . \quad (2)$$

3. Искомая разность частот

$$\Delta v = v_0 - v_R \cong 4,1 \text{ Гц} . \quad (3)$$

Пример № 8. Автомобиль массой $m = 1000 \text{ кг}$ проходит испытания на устойчивость к переменным нагрузкам, для чего через задний буксировочный крюк он соединён с упругим элементом жесткостью $k = 0,7 \text{ МН/м}$. К автомобилю прикладывается гармоническая сила $F(t) = 10^5 \sin 15t$. Определить, пренебрегая сопротивлением воздуха и силами трения уравнение движения автомобиля.



1. В данном случае исследуемый движущийся объект имеет одну степень свободы, по этому для описания достаточно получить уравнение движения относительно одной, горизонтальной оси ox с началом отсчёта в положении автомобиля при недеформированном упругом элементе.

2. Начальные условия задачи при таком выборе системы отсчёта будут выглядеть следующим образом

$$\text{при } t = 0 \quad x = 0; \quad \dot{x} = 0 . \quad (1)$$

3. На автомобиль применительно к выбранной оси действуют две силы: сила, вызванная наличием упругого элемента $F_k = -kx$ и внешняя гармоническая сила $F(t) = F_0 \sin \omega t$. Уравнение II закона Ньютона запишется так

$$m\ddot{x} = F(t)_x + F_{kx} , \quad (2)$$

$$\ddot{x} = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t - \frac{k}{m} x , \quad (3)$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f \sin \Omega t , \quad (4)$$

где ω – циклическая частота

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \cong 26,5 \frac{\text{рад}}{\text{с}}; \quad v = \frac{\omega}{2\pi} \cong 4,2 \text{ Гц}; \quad (5)$$

величина приведённой возбуждающей силы

$$f = \frac{F_0}{m} = 100 \frac{\text{М}}{\text{с}^2} . \quad (6)$$

4. Уравнение (4) является дифференциальным уравнением второй степени с постоянными коэффициентами. Решение уравнения складывается из суммы решений, которые описывают собственные колебания системы и её колебания под действием периодической внешней силы

$$x = x_1 + x_2 , \quad (7)$$

где x_1 – общее решение, x_2 – частное решение. Характеристическое уравнение запишется следующим образом

$$r^2 + f^2 = 0; \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \pm fi . \quad (8)$$

5. Уравнение (8) даёт возможность искать общее решение в виде

$$x_1 = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t . \quad (9)$$

6. Для определения вынужденных колебаний, т.е. частного решения x_2 необходимо найти соотношение между циклическими частотами свободных и вынужденных колебаний. Так как $\omega < \Omega$, то имеют место вынужденные колебания малой частоты, при этом решение целесообразно искать в виде

$$x_2 = A \sin \Omega t + B \cos \Omega t , \quad (10)$$

где A и B – коэффициенты подлежащие определению.

7. Подставим уравнение (10) в исходное уравнение (4)

$$\dot{x}_2 = A\Omega \cos \Omega t - B\Omega \sin \Omega t, \quad (11)$$

$$\ddot{x}_2 = -A\Omega^2 \sin \Omega t - B\Omega^2 \cos \Omega t, \quad (12)$$

$$-A\Omega^2 \sin \Omega t - B\Omega^2 \cos \Omega t + \omega^2(A \sin \Omega t + B \cos \Omega t) = f \sin \Omega t, \quad (13)$$

$$-A\Omega^2 \sin \Omega t - B\Omega^2 \cos \Omega t + A\omega^2 \sin \Omega t + B\omega^2 \cos \Omega t = f \sin \Omega t. \quad (14)$$

8. Приравняем коэффициенты, стоящие в левой и правой частях уравнения (14) при соответствующих тригонометрических коэффициентах

$$-A\Omega^2 + A\omega^2 = f; \Rightarrow A = \frac{f}{\omega^2 - \Omega^2}, \quad (15)$$

$$-B\Omega^2 + B\omega^2 = 0; \Rightarrow B = 0. \quad (16)$$

9. Таким образом, частное решение уравнения (9) имеет вид

$$x_2 = \frac{f}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \Omega t. \quad (17)$$

10. Совместим далее уравнения (7), (9) и (17)

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{f}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \Omega t. \quad (18)$$

11. Для определения постоянных C_1 и C_2 продифференцируем по времени уравнение (18)

$$\dot{x} = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t + \frac{f\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \cos \Omega t. \quad (19)$$

12. Подставим в уравнение (18) и (19) начальные условия задачи: $t = 0, x = 0, \dot{x} = 0$

$$0 = C_1 \cos 0t + C_2 \sin 0t + \frac{f}{\omega^2 - \Omega^2} \sin 0t, \quad (20)$$

$$0 = -C_1 \omega \sin 0t + C_2 \omega \cos 0t + \frac{f\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \cos 0t, \quad (21)$$

$$C_1 = 0; \quad C_2 = -\frac{\Omega}{\omega} \frac{f}{\omega^2 - \Omega^2}. \quad (22)$$

13. Уравнение движения автомобиля, таким образом, запишется следующим образом

$$x(t) = -\frac{\Omega}{\omega} \frac{f}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \omega t + \frac{f}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \Omega t. \quad (23)$$

14. Подставим в уравнение заданные по условию задачи величины в решение (23)

$$x(t) = -\frac{15}{26,5} \frac{100}{475} \sin 26,5t + \frac{100}{475} \sin 15t. \quad (24)$$

$$x(t) = -0,12 \sin 26,5t + 0,2 \sin 15t. \quad (25)$$

15. Первое слагаемое уравнения (25) определяет собственные колебания автомобиля с амплитудой $A_0 = 0,12$ м, второе слагаемое описывает вынужденные колебания под действием периодической силы $F(t)$ с амплитудой $A_1 = 0,2$ м.

Пример № 9. Описанные в предыдущей задаче испытания автомобиля проводятся при частичном включении тормозной системы, обеспечивающей силу сопротивления движению, пропорциональную скорости в первой степени $R = \zeta v$, где $\zeta = 2,5 \cdot 10^5$ кг/с. Получить уравнение движения.

1. Второй закон Ньютона в проекции на ось x (см. предыдущую задачу) представится следующим образом

$$m\ddot{x} = F(t)_x + F_{kx} + R_x, \quad (1)$$

$$\ddot{x} = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t - \frac{k}{m} x - \frac{\zeta}{m} \dot{x}, \quad (2)$$

где ψ – разность фаз между возбуждающей силой и силой сопротивления, пропорциональной скорости

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = f \sin \Omega t. \quad (4)$$

3. Используя условия предыдущей задачи определим постоянные коэффициенты дифференциального уравнения (3)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 26,5 \text{ с}^{-1}; \quad \delta = \frac{\zeta}{2m} = 125 \text{ с}^{-1}; \quad f = \frac{F_0}{m} = 100 \text{ с}^{-1}. \quad (5)$$

4. В данном случае движение автомобиля будет происходить при малом затухании, потому что $\omega > \delta$ и $\omega > \Omega$, т.е. решение дифференциального уравнения (4) ищется в виде

$$x = x_1 + x_2, \quad (6)$$

где x_1 – общее решение соответствующего однородного уравнения, x_2 – частное решение неоднородного уравнения, причём

$$x_1 = A \exp(-\delta t) \sin\left(\left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2}\right)t + \varphi_0\right), \quad (7)$$

$$x_2 = a \sin(\Omega t + \varphi - \varepsilon), \quad (8)$$

$$a = \frac{f}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}, \quad (9)$$

$$\varepsilon = \arctg \frac{2\delta\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}, \quad (10)$$

$$A(t) = \frac{f}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} \sin(\Omega t + \varphi - \varepsilon).$$

(11)

5. При $\omega > \Omega$ решение уравнения движения представляется в виде

$$x(t) = \exp(-\delta t) \left(C_1 \cos \sqrt{\omega^2 - \Omega^2} t + C_2 \sin \sqrt{\omega^2 - \Omega^2} t \right) + A(t). \quad (12)$$

6. Проведём необходимые вычисления

$$\sqrt{\omega^2 - \Omega^2} \cong \sqrt{702 - 225} \cong 22 \text{ с}^{-1}, \quad (13)$$

$$a = \frac{f}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} = \frac{100}{\sqrt{484 + 1,4 \cdot 10^7}} \cong 2,7 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad (14)$$

$$\varepsilon = \arctg \frac{2\delta\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \cong 1,36 \text{ рад}. \quad (15)$$

7. С учётом полученных величин, решение (12) переписывается в виде

$$x(t) = \exp(-125t) (C_1 \cos 22t + C_2 \sin 22t) + 2,7 \cdot 10^{-2} \sin(15t - 1,36). \quad (16)$$

8. Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 найдём производную по времени уравнения (16), т.е. получим уравнение скорости

$$\dot{x}(t) = -125 \exp(-125t) (C_1 \cos 22t + C_2 \sin 22t) + 22 \exp(-125t) (-C_1 \sin 22t + C_2 \cos 22t) + 0,4 \cos(15t - 1,36). \quad (17)$$

9. Подставим в уравнение (16) начальные условия, аналогичные предыдущей задаче: $t = 0$, $x = 0$ и определим значение C_1

$$0 = C_1 - 2,7 \cdot 10^{-2} \sin(1,36), \quad C_1 \cong 2,64 \cdot 10^{-2}. \quad (18)$$

10. Для вычисления C_2 в уравнение (17) подставим: $t = 0$, $\dot{x} = 0$

$$0 = -125C_1 + 22C_2 + 0,4 \cos 1,36, \quad (19)$$

$$C_2 = \frac{125C_1 - 0,4 \cos 1,36}{22} \cong 0,146. \quad (20)$$

11. Подставим полученные значения в уравнение (16)

$$x(t) = \exp(-125t) (2,7 \cdot 10^{-2} \cos 22t + 0,146 \sin 22t) + 2,7 \cdot 10^{-2} \sin(15t - 1,36). \quad (21)$$

12. Преобразуем полученное решение к следующему

$$x(t) = \exp(-125t) (2,7 \cdot 10^{-2} \cos \omega t + 0,146 \sin \omega t) + 2,7 \cdot 10^{-2} \sin(\Omega t - 1,36). \quad (22)$$

Наличие перед круглой скобкой экспоненциального множителя с отрицательным показателем степени, говорит о том, что собственные колебания, протекающие с частотой ω , достаточно быстро исчезнут и автомобиль будет двигаться, совершая вынужденные колебания с циклической частотой Ω .

Пример № 10. Период собственных колебаний пружинного маятника равен $T_0 = 0,55$ с. При погружении маятника в вязкую жидкость период стал равным $T = 0,56$ с. Найти резонансную частоту колебаний.

1. Определим циклическую частоту собственных колебаний маятника

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 11,42 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_0^2 = \frac{4\pi^2}{T_0^2}. \quad (1)$$

2. Запишем уравнение периода затухающих колебаний из которого выразим коэффициент затухания δ

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}; \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad (2)$$

$$\frac{4\pi^2 T^2}{T_0^2} - T^2 \delta^2 = 4\pi^2; \quad \frac{4\pi^2 T^2}{T_0^2} - 4\pi^2 = T^2 \delta^2, \quad (3)$$

$$\delta^2 = \frac{4\pi^2}{T_0^2} - \frac{4\pi^2}{T^2}. \quad (4)$$

3. Уравнение резонансной частоты колебаний

$$\nu_R = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4\pi^2}{T_0^2} - 2\left(\frac{4\pi^2}{T_0^2} - \frac{4\pi^2}{T^2}\right)}, \quad (5)$$

$$\nu_R = \sqrt{\frac{2}{T^2} - \frac{1}{T_0^2}} = \sqrt{\frac{2}{0,314} - \frac{1}{0,3}} \cong 1,742 \text{ с}^{-1}. \quad (6)$$

Пример № 11. К пружине жёсткостью $k = 10$ Н/м подвешено тело массой $m = 0,1$ кг. Тело совершает вынужденные колебания в среде, обладающей сопротивлением $r = 2 \cdot 10^{-2}$ кг/с. Найти коэффициент затухания δ и величину амплитуды резонансных колебаний, если амплитуда возмущающей силы равна $F_0 = 0,01$ Н.

1. На тело действуют три силы: сила тяжести, сила сопротивления, сила упругости и возбуждающая сила. Уравнение второго закона Ньютона в данном случае содержит необходимые для решения постоянные коэффициенты

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \sin \Omega t, \quad (1)$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \Omega t, \quad (2)$$

где $\delta = r/2m = 0,1 \text{ с}^{-1}$ – коэффициент затухания; $\omega_0^2 = k/m = 100 \text{ с}^{-2}$ – квадрат собственной циклической частоты, $f_0 = F_0/m = 0,1 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$.

2. Оценим влияние силы сопротивления на изменение частоты колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{100 - 0,01} \cong 10 \text{ с}^{-1}.$$

(3)

3. Найдём амплитуду вынужденных колебаний

$$A = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} = \frac{0,1}{\sqrt{4 \cdot 10^{-2} \cdot 100}} \cong 5 \cdot 10^{-2} \text{ м.} \quad (4)$$

Пример № 12. Колебательная система совершает вынужденные колебания в среде с коэффициентом сопротивления $r = 10^{-3} \text{ кг/с}$. Считая затухание малым определить амплитудное значение возмущающей силы, если на резонансе амплитуда колебаний составила $A_R = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, собственная частота колебаний системы составляет $\nu_0 = 10 \text{ Гц}$.

1. Амплитуда резонансных колебаний определяется уравнением

$$A_R = \frac{f}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}. \quad (1)$$

2. Ввиду малости затухания, уравнение (1) можно переписать следующим образом

$$A_R = \frac{f}{2\delta\omega_0} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\frac{2r}{2m} 2\pi\nu_0} = \frac{F_0}{2\pi r \nu_0}, \quad (2)$$

откуда амплитудное значение возбуждающей силы определяется как

$$F_0 = 2\pi r \nu_0 A_R = 6,28 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cong 3,14 \cdot 10^{-4} \text{ Н.} \quad (3)$$

Пример № 13. Частота свободных колебаний системы – $\omega_0 = 100 \text{ с}^{-1}$, резонансная частота $\omega_R = 99 \text{ с}^{-1}$. Найти добротность этой колебательной системы.

1. Добротность колебательной системы определяется уравнением

$$\theta = \frac{\omega_0}{2\delta}. \quad (1)$$

2. Коэффициент затухания определим из следующих соображений

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}; \quad \delta = \sqrt{\frac{\omega_0^2 - \omega_R^2}{2}}. \quad (2)$$

3. Совместим уравнения (1) и (2)

$$\theta = \frac{\omega_0}{2\sqrt{\frac{\omega_0^2 - \omega_R^2}{2}}} = \frac{100}{2\sqrt{\frac{10^4 - 9801}{2}}} = 5. \quad (3)$$

Пример № 14. К телу массой $m = 0,1 \text{ кг}$ колеблющемуся в вязкой среде с начальной амплитудой $A_{\max} = 7 \text{ мм}$ внезапно начинает действовать внешняя периодическая сила. Тело начинает совершать вынужденные колебания

$$x(t) = 5 \cdot 10^{-3} \sin\left(10\pi t - \frac{3}{4}\pi\right).$$

Записать уравнение собственных колебаний тела, если коэффициент затухания равен $\delta = 1 \text{ с}^{-1}$.

1. Поскольку результирующее колебание получилось периодическим, то можно полагать, что внешняя сила тоже имеет периодические свойства. Другими словами, на тело действуют три силы: сопротивления (будем считать её пропорциональной скорости) $F_s = -r\dot{x}$; упругости $F_k = -kx$ и внешняя возбуждающая сила $F(t) = F_0 \cos \Omega t$. Дифференциальное уравнение движения представится следующим образом

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \Omega t. \quad (1)$$

2. Собственным колебаниям соответствует решение однородной части уравнения (1)

$$x(t) = A_0 \exp(-\delta t) \sin \omega_0 t. \quad (2)$$

3. Разность фаз между свободными и вынужденными колебаниями, заданная по условию задачи даёт возможность определить циклическую частоту собственных колебаний следующим образом

$$\operatorname{tg} \frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \operatorname{tg} \left(-\frac{3}{4} \pi \right) = 1, \quad (3)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\Omega^2 + 2\delta\Omega}; \quad \omega_0 = 10,5\pi. \quad (4)$$

4. С учётом значения ω_0 уравнение собственных колебаний представится следующим образом

$$x(t) = 7 \cdot 10^{-3} \exp(-1,6t) \sin 10,5\pi t. \quad (5)$$

Пример № 15. Тело массой $m = 2$ кг соединено с вертикальной пружиной жёсткостью $k = 5$ кН/м. Получить зависимость амплитуды колебаний от частоты возбуждающей гармонической силы при прохождении частоты резонанса. Известно, что амплитудное значение внешней силы составляет $F_0 = 9,8$ Н, коэффициент затухания собственных колебаний $-\delta = 0,75 \text{ с}^{-1}$.

1. Период собственных колебаний тела, соединённого с пружиной можно представить двумя уравнениями, из которых следует циклическая частота

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}; \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}; \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{1}{\omega_0}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \cong 50 \text{ с}^{-1}. \quad (1)$$

2. Определим величину приведённой внешней силы

$$f = \frac{F_0}{m} = \frac{9,8}{4} = 4,9 \text{ мс}^{-2}. \quad (2)$$

3. Амплитуда вынужденных колебаний

$$A = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}}. \quad (3)$$

4. Для построения зависимости $A = f(\Omega)$ зададимся следующими значениями циклической частоты возмущающей силы

4.1. $\Omega = \omega_0$ (состояние резонанса)

$$A_R = \frac{f}{\sqrt{4\delta^2 \omega_0^2}} = \frac{4,9}{\sqrt{4 \cdot 0,56 \cdot 2500}} = 6,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

4.2. $\Omega = 0,95\omega_0$

$$A_{0,95} = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - 0,95\omega_0^2)^2 + 4\delta^2 (0,95\omega_0)^2}} = 1,9 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

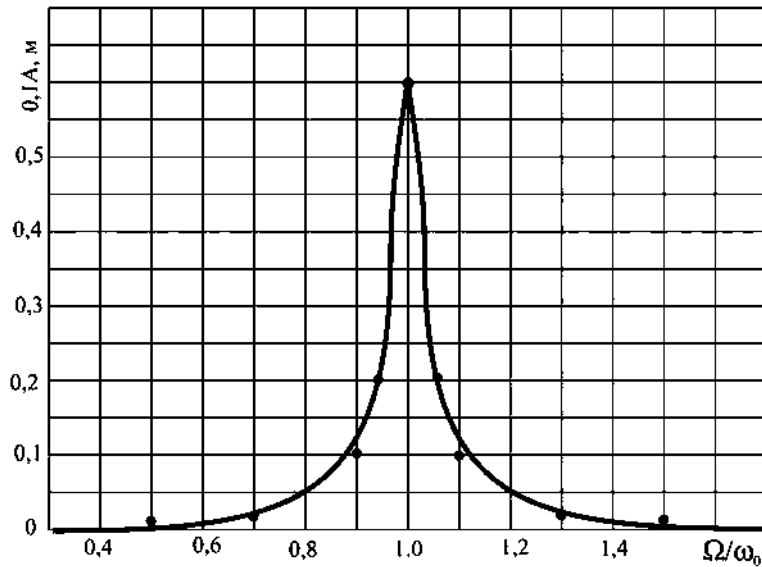
4.3. $\Omega = 0,9\omega_0$

$$A_{0,9} = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - 0,9\omega_0^2)^2 + 4\delta^2 (0,9\omega_0)^2}} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м} \quad 4.4 \quad \Omega = 0,7\omega_0$$

$$A_{0,7} = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - 0,7\omega_0^2)^2 + 4\delta^2 (0,7\omega_0)^2}} = 3,8 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

4.5. $\Omega = 0,5\omega_0$

$$A_{0,5} = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - 0,5\omega_0^2)^2 + 4\delta^2 (0,5\omega_0)^2}} = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$



Пример № 16. Колебательная система совершает затухающие колебания с частотой $\nu = 1$ кГц. Определите частоту ν_0 собственных колебаний, если частота резонанса равна $\nu_R = 998$ Гц.

1. Запишем уравнения для частоты затухающих и резонансных колебаний, образуем систему и разрешим её относительно искомой величины

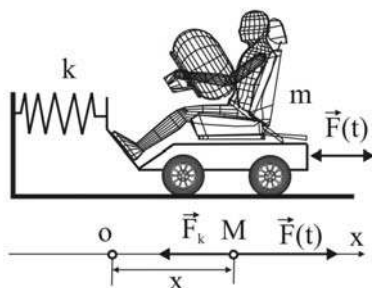
$$\left. \begin{aligned} \nu^2 &= \nu_0^2 - \delta^2; \\ \nu_R^2 &= \nu_0^2 - 2\delta^2. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\nu_0 = \sqrt{2\nu^2 - \nu_R^2} = \sqrt{2 \cdot 10^6 - 996 \cdot 10^5} = 1002 \text{ Гц}. \quad (2)$$

Пример № 17. Установка для исследования индивидуальных средств безопасности пассажиров автотранспорта совместно с манекеном обладает массой $m = 510$ кг. К установке прикладывают горизонтальную возбуждающую гармоническую силу

$$F(t) = F_0 \sin \Omega t,$$

где $F_0 = 4 \cdot 10^4$ Н – амплитуда возмущающей силы, $\Omega = 60 \text{ с}^{-1}$ – циклическая частота возмущающей силы. Установка соединена с вертикальной стеной упругим элементом жёсткости $k = 1,7 \cdot 10^6$ Н/м. Определить уравнение движения установки.



1. Дифференциальное уравнение движения в проекции на горизонтальную ось в данном случае представится следующим образом

$$m\ddot{x} = -kx + F_0 \sin \Omega t, \quad (1)$$

2. Поделим уравнение (1) на m

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t, \quad (2)$$

3. Введём стандартные обозначения и вычислим циклическую частоту собственных колебаний системы

$$\frac{k}{m} = \omega^2 = 3364 \text{ с}^{-2}; \quad f = \frac{F_0}{m} = 78 \frac{\text{Н}}{\text{кг}}; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 58 \text{ с}^{-1}. \quad (3)$$

4. Перепишем уравнение (2) с учётом обозначений (3)

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f \sin \Omega t. \quad (4)$$

5. Сравнение величин ω и Ω показывает, что колебания происходят в области резонанса, но тем не менее $\omega < \Omega$

6. Уравнение (4) совпадает с уравнением (4) задачи 4.1.6, поэтому воспользуемся результатом интегрирования и запишем решение в виде

$$x(t) = -\frac{\Omega}{\omega} \frac{f}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \omega t + \frac{f}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \Omega t. \quad (5)$$

7. Ввиду того, что $\omega \cong \Omega$ будем иметь следующие соотношения

$$\frac{\omega}{\Omega} \cong 1; \quad \omega + \Omega \cong 2\omega \cong 2\Omega. \quad (6)$$

8. Перепишем уравнение (5) следующим образом

$$x \cong \frac{f}{(\omega - \Omega)(\omega + \Omega)} (\sin \Omega t - \sin \omega t), \quad (7)$$

или

$$x \cong \frac{f}{2\omega(\omega - \Omega)} (\sin \Omega t - \sin \omega t). \quad (8)$$

9. Преобразуем выражение, стоящее в скобках

$$(\sin \Omega t - \sin \omega t) = 2 \sin \frac{\Omega - \omega}{2} t \cos \frac{\Omega + \omega}{2} t \cong 2 \sin \frac{\Omega - \omega}{2} t \cos \Omega t. \quad (9)$$

10. С учётом уравнения (9) уравнение (8) можно представить так

$$x = a(t) \cos \Omega t, \quad (10)$$

где

$$a(t) = \frac{f}{\omega(\omega - \Omega)} \sin \frac{\Omega - \omega}{2} t.$$

(11)

11. При $\omega \cong \Omega$ величина $a(t)$ является медленно изменяющейся во времени с циклической частотой

$$\omega_a = \frac{\Omega - \omega}{2} = 1 \frac{\text{рад}}{\text{с}}, \quad (\nu_a \cong 0,16 \text{ Гц}), \quad (12)$$

и периодом $T_a = \frac{4\pi}{|\Omega - \omega|} = 6,28 \text{ с}$. Другими словами, будет иметь место процесс биений, т.е.

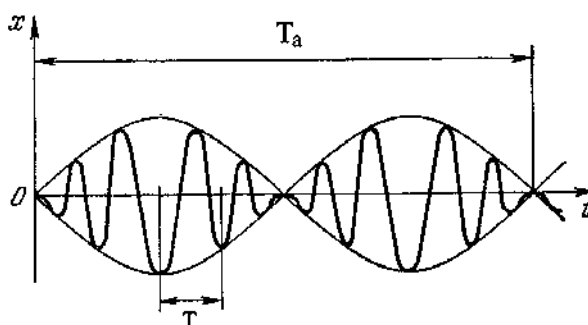
гармонических колебаний с периодом $T = 2\pi/\Omega$, амплитуда которых изменяется по закону синуса с малой циклической частотой, определяемой уравнением (12). Вынужденные колебания протекают с периодом $T = 2\pi/\Omega = 0,1 \text{ с}$.

12. Вычислим величину $a(t)$

$$a(t) = \frac{78}{58 \cdot 2} \sin 1t = -0,67 \sin 1t. \quad (13)$$

13. Уравнение (10), описывающее движение исследуемой установки можно в окончательном виде записать следующим образом

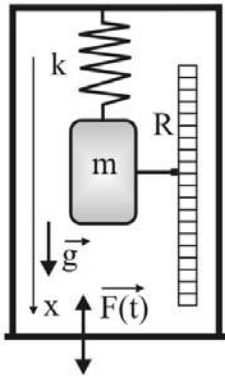
$$x = -0,67 \sin 1t \cos 60t. \quad (14)$$



Пример № 18. Простейшая конструкция прибора для измерения параметров вибраций, которая, кстати, применяется и в сейсмографах, представляет собой массу, присоединённую к вертикальной пружине. Перемещение массы вызывает изменение одной из электрических величин: сопротивления, ёмкости, индуктивности, ЭДС индукции и т.п., которые включаются в схемы регистрации.

Пусть виброметр представляет собой пружину жёсткостью $k = 1 \text{ кН/м}$ с присоединённой массой $m = 10 \text{ кг}$. Прибор для калировки поместили на рабочий стол, совершающий

колебания в соответствие с уравнением: $\xi = a \sin \Omega t$, где $a = 5$ мм – амплитуда колебаний рабочего стола, $\Omega = 16 \pi \text{ с}^{-1}$ – частота колебаний стола вибростенда. Записать уравнение колебаний скользящего контакта относительно сопротивления R .



1. Предположим, что в начальный момент времени масса находится в покое в положении статического равновесия. Ось x , вдоль которой происходит движение, направлена вертикально вниз, т.е. совпадает с направлением вектора ускорения свободного падения. Начальные условия задачи в этом случае можно записать следующим образом:

$$\text{при } t = 0 \quad x = x_0 = 0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0 = 0. \quad (1)$$

2. В неподвижном состоянии основания вибростенда упругий элемент имеет удлинение равное $\Delta_{st} + x$. При смещении основания вибростенда полное удлинение пружины составит

$$\Delta_x = \Delta_{st} + x - \xi, \quad (2)$$

где ξ – смещение корпуса прибора совместно с рабочим столом вибростенда.

3. К массе приложены две силы: сила тяжести mg , направленная вертикально вниз и сила упругости пружины, направленная, в связи с удлинением, вертикально вверх

$$F_k = -k\Delta_x = -k(\Delta_{st} + x - \xi). \quad (3)$$

4. Дифференциальное уравнение движения будет иметь традиционный вид второго закона Ньютона

$$m\ddot{x} = mg - k\Delta_x, \quad (4)$$

$$m\ddot{x} = mg - k\Delta_{st} - kx + k\xi. \quad (5)$$

5. В положении статического равновесия $x = \ddot{x} = \xi = 0$, то можно считать, что $mg - k\Delta_{st} = 0$, при этом дифференциальное уравнение движения примет вид

$$m\ddot{x} = -kx + k\xi. \quad (6)$$

$$m\ddot{x} + kx = ka \sin \Omega t, \quad (7)$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f \sin \Omega t, \quad (8)$$

где $\omega = \sqrt{k/m} = 10 \text{ с}^{-1}$ – циклическая частота собственных колебаний, $f = ka/m = 0,5 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ – значение приведённой внешней силы.

6. Решение уравнения (8) представляет собой сумму решений однородного уравнения и частного решения

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{f}{\omega^2 - \Omega^2} \sin(\Omega t + \delta), \quad (9)$$

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{f}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \Omega t. \quad (10)$$

7. Для определения постоянных интегрирования вычислим производную по времени уравнения (10)

$$\dot{x}(t) = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t + \frac{f\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}. \quad (11)$$

8. Подставляя в уравнения (10) и (11) начальные условия из соотношений (1), получим

$$C_1 = 0; \quad C_2 = -\frac{\Omega}{\omega} \frac{f}{\omega^2 - \Omega^2}. \quad (12)$$

9. Уравнение движения контакта, соединённого с массой представится с учётом значений постоянных интегрирования следующим образом

$$x(t) = -\frac{\Omega}{\omega} \frac{f}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \omega t + \frac{f}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \Omega t. \quad (13)$$

Подставим в уравнение (13) заданные значения величин

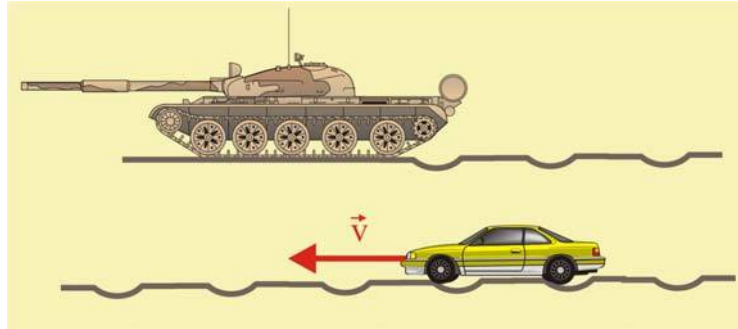
$$x(t) = 10^{-3} \sin 10t - 2 \cdot 10^{-4} \sin \pi t. \quad (14)$$

10. С чѐтом силы сопротивления, которая пропорциональна скорости движения свободные колебания, определяемые первым слагаемым уравнений (13) и (14) быстро затухнут, масса будет совершать только вынужденные колебания

$$x_2(t) = \frac{f}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \Omega t, \quad (15)$$

$$x_2(t) = 2 \cdot 10^{-4} \sin \pi t. \quad (16)$$

Пример № 19. Танк, проехав по мокрой грунтовой дороге, оставил два ряда углублений, расположенных на расстоянии $l = 8$ м друг от друга. Через некоторое время по дороге проехал легковой автомобиль массой $M = 1,3$ т, который попал в резонанс стал испытывать ощутимые вертикальные колебания. С какой скоростью двигался автомобиль, если под действием массы четырёх пассажиров $m = 300$ кг подвеска автомобиля «проседает» в состоянии покоя на $\Delta x = 2$ см.



1. По величине статической реакции подвески автомобиля определим коэффициент её жесткости

$$k = \frac{Mg}{\Delta x} = \frac{1,3 \cdot 10^3 \cdot 9,81}{2 \cdot 10^{-3}} \cong 1,25 \cdot 10^4 \frac{\text{Н}}{\text{м}}. \quad (1)$$

2. Частота собственных колебаний автомобиля

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M}} = \frac{1}{6,28} \sqrt{\frac{1,25 \cdot 10^4}{1,3 \cdot 10^3}} \cong 0,5 \text{ Гц}. \quad (2)$$

3. Скорость движения автомобиля, соответствующая резонансным колебаниям

$$v = \ell \nu_0 = 8 \cdot 0,5 = 4 \text{ м/с} = 14,4 \text{ км/час}. \quad (3)$$

4. Автоколебания

4.1. Вводные замечания

Автоколебательные процессы широко распространены как в технических системах, так и в живых организмах [7]. Генераторы электрических колебаний, духовые и струнные музыкальные инструменты, часы, поршневые двигатели, дыхание и работа сердца – вот неполный перечень автоколебательных систем (рис.4.1)



Рис. 4.1. Примеры автоколебательных систем

Основной особенностью автоколебательных систем является их способность преобразовывать движения постоянного направления в колебательное движение, причём движение понимается не только в механическом смысле. Следует, однако, иметь в виду, что не всякое преобразование движения можно относить к автоколебательному процессу. Так, например, кривошипно-шатунный механизм, преобразующий возвратно-поступательное движение поршней во вращательное движение коленчатого вала не является автоколебательной системой, потому что возвратно-поступательное движение и равномерное вращение вала связаны жёсткой кинематической связью, каждому положению кривошипа соответствует вполне и однозначно определённое положение шатуна. Эта система обратима, т.е. в ней возможно обратное преобразование, вращение коленвала может быть трансформировано в колебательное движение шатуна, что собственно и происходит в поршневых двигателях, получивших широкое распространение для преобразования внутренней энергии топлива в механическую работу. Аналогичными свойствами обладает и электрический генератор, который в принципе может быть превращён в электродвигатель, для этого достаточно привести во вращение ротор от внешнего источника энергии.

Рассмотрим основные признаки автоколебательной системы на примере простейшего электромагнитного прерывателя, состоящего из катушки L , намотанной на стальной сердечник, батареи постоянного тока ε , переключателя k и контактора p с якорем. При включении

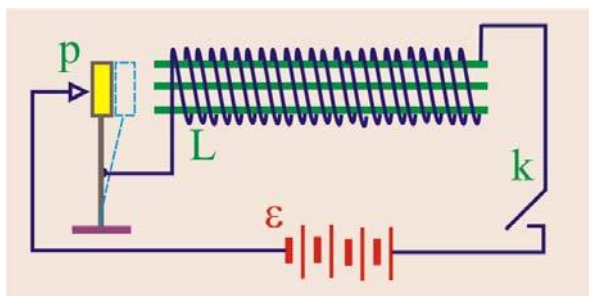


Рис. 4.2. Электромагнитный прерыватель

схемы переключателем в цепи потечёт ток, катушка, намотанная на сердечник превратится в электромагнит и при соответствующем выборе полюсов, переместит якорь вправо, электрическая цепь разомкнётся, притяжение электромагнита исчезнет и цепь снова станет замкнутой. Таким образом, якорь будет совершать колебательное движение, которое по всем признакам можно признать автоколебательным.

Можно выделить следующие составные части, характерные для автоколебательной системы:

1. **Внешний источник энергии** в виде батареи постоянного тока, например аккумулятора.
2. **Клапан** в виде контакта, орган, осуществляющий коммутацию поступающей в систему энергии.
3. **Колебательная система** – в рассматриваемом случае якорь.

На рис.4.3 приведена типичная схема взаимодействия отдельных необходимых и достаточных элементов системы, чтобы возникли и поддерживались автоколебания.

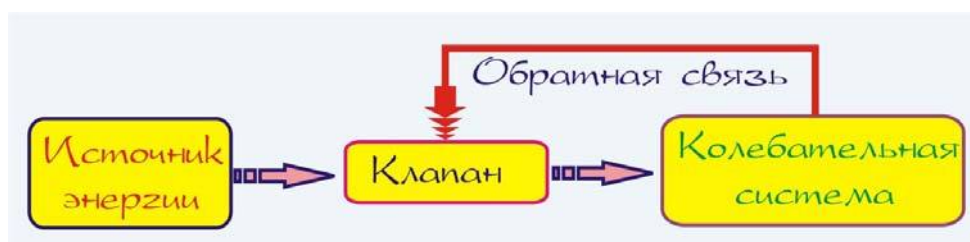


Рис. 4.3. Взаимодействие элементов в автоколебательной системе

Дозированное поступление внешней энергии в колебательную систему обеспечивается клапаном. С одной стороны клапан управляет движением, а с другой – движение системы управляет работой клапана, т.е. между клапаном и колебательной системой существует обратная связь. Таким образом, автоколебательной системой называется устройство, создающее незатухающие колебания. В состав устройства входит источник энергии, клапан, колебательная система и обратная связь.

Установившиеся автоколебания в системе, т.е. когда амплитуда A остаётся постоянной по величине в течение продолжительного времени, возможны только в том случае, когда порции, периодически поступающей энергии будут компенсировать потери. Если энергию, поступающую в течение одного периода колебаний от внешнего источника обозначить через E_+ , а энергию потерь за тот же период E_- , то стационарность амплитуды будет обеспечиваться при пересечении зависимостей $E_+ = f(A)$ и $E_- = f(A)$, которые на качественном уровне изображены на рис. 4.4. Точка пересечения в начале системы координат соответствует положению статического равновесия колебательной системы, но это состояние неустойчиво, достаточно рассмотреть случай малой, но неравной нулю амплитуде колебаний. Это говорит о том, что условие самовозбуждения автоколебаний возможно только в системе с неустойчивым состоянием в покое. Как видно из хода кривых, энергия потерь и энергия от внешнего источника совпадают по абсолютной величине только при значении амплитуды колебаний A_0 .

Обсуждаемые кривые могут для некоторых систем пересекаться в нескольких точках. На рис.4.5 таких пересечений три, т.е. система обладает тремя состояниями равновесия, два из которых устойчивы при значениях абсциссы 0

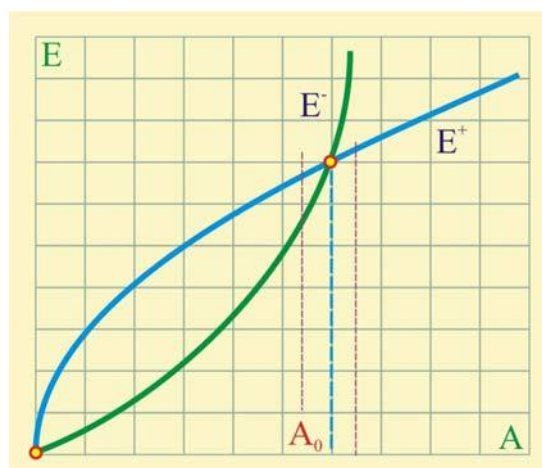


Рис. 4.4. Энергетический баланс

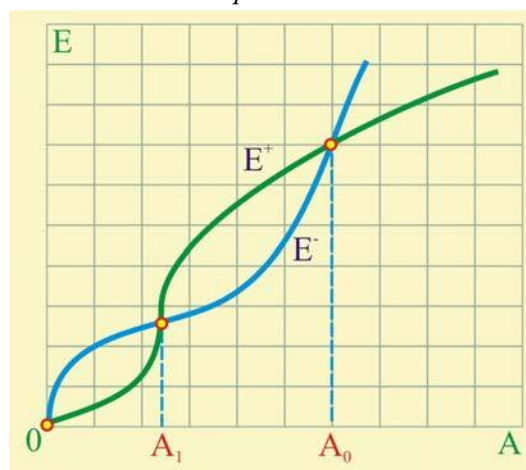


Рис. 4.5. Жёсткое самовозбуждение

и A_0 , третье состояние с абсциссой A_1 – неустойчиво. Если система предоставлена самой себе, то она будет неопределённо долго находиться в покое, т.е. самовозбуждение отсутствует. Если в системе путём внешнего воздействия возбудить колебания с амплитудой, превосходящей величину A_1 , то система самовозбудится и раскачается самостоятельно до амплитуды A_0 . Такая система, как говорят, обладает **жёстким самовозбуждением**. Энергетические характеристики, приведенные на рис. 4.4 соответствуют случаю **мягкого самовозбуждения**, когда для раскачивания системы достаточно сколь угодно малого внешнего воздействия.

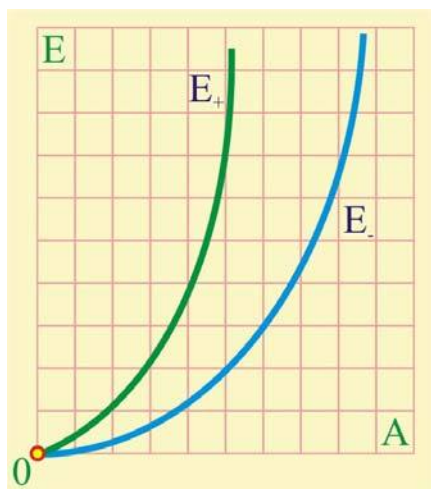


Рис. 4.6. Линейная система

Системы, способные совершать автоколебания являются нелинейными. Если бы зависимости внешней энергии и энергии потерь от амплитуды были бы линейными, то графически их необходимо представлять параболами, это когда энергия пропорциональна квадрату амплитуды. В этом случае графики, приведенные на рис. 4.4 и 4.5 представляли бы собой две параболы, проходящие через начало координат и нигде не пересекающиеся далее. Одна из парабол в этом случае должна располагаться над другой (рис. 4.6). Такие системы могут либо вообще не самовозбуждаться, либо при возбуждении, колебания будут возрастать неограниченно и состояния стационарности амплитуды наблюдаться не будет. Таким образом, любая автоколебательная система должна содержать нелинейный элемент, причём нелинейность может быть присуща как клапану, так и цепи обратной связи, а также внешней нагрузке или источнику энергии.

Как было показано ранее, колебательные процессы графически можно изображать несколькими способами, в виде зависимости смещения или скорости от времени или зависимости одного из видов циркулирующей энергии от времени. В случае автоколебательных систем наиболее целесообразной для рассмотрения является зависимость в переменных сила – перемещение, в электрических системах, электрическое разность потенциалов – заряд. И в первом и во втором случае произведение выбранных переменных будет представлять собой работу, механическую или работу по перемещению зарядов, причём численно работа будет представляться величиной площади, ограничиваемой кривыми. Напомним, что работа, являясь энергетической характеристикой процесса, измеряется в джоулях. Аналогичные диаграммы получались при рассмотрении в молекулярной физике и термодинамике зависимости давления от объёма $p = f(V)$, там $\delta A = p dV$. В качестве переменной ординаты логично выбрать внешнюю силу, действию которой на колебательную систему в соответствии с теоремой об изменении кинетической энергии обеспечивает энергетический приток

$$A_{1 \rightarrow 2} = K_2 - K_1 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \quad (4.1)$$

Будем далее считать, что сила имеет положительный знак, если её направление совпадает с направлением перемещения. На рис. 4.7 представлены некоторые возможные варианты зависимостей внешней силы от перемещения

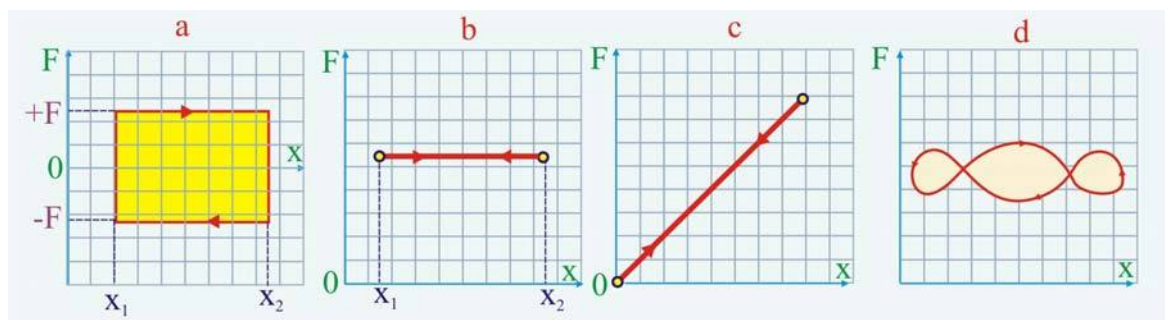


Рис. 4.7. Зависимость внешней силы от перемещения

Диаграмма а изображает работу при возвратно поступательном движении при наличии постоянной силы трения, не зависящей от скорости. Процесс периодического поднятия и опускания некоторого груза в поле силы тяжести характеризуется диаграммой б, в этом случае сила постоянна по величине и направлению, она преодолевает постоянную силу тяжести, работа в этом процессе будет равна нулю. Затрачиваемая работа при поднятии массы будет возвращаться источнику энергии при опускании. При периодическом растяжении пружины (график с) работа за один цикл так же будет равна нулю, в этом случае без учёта потерь будет иметь место преобразование кинетической энергии в потенциальную энергию и наоборот. Таким образом, при однозначной зависимости силы от смещения никакой работы совершаться не может. Для совершения внешней силы работы, как минимум обсуждаемая зависимость должна быть двухзначной. Однозначная зависимость силы от перемещения системы предполагает, что каждому смещению, вне зависимости от знака, соответствует определённое и единственное значение силы. При двухзначной зависимости одинаковому смещению соответствует два значения силы, одно положительное, второе – отрицательное. На практике могут встречаться многозначные зависимости силы от смещения (диаграмма д), когда диаграмма образует несколько замкнутых контуров.

Так, например, для автоколебательной системы изображённой на рис. 4.2, которая часто используется в электрических звонках, графики зависимости смещения якоря и внешней силы от времени будут иметь вид, приведенный на рис. 4.8.

Довольно долго это устройство не относили к разряду автоколебательных. Дело в том, что если предположить для простоты, что смещение якоря меняется по синусоидальному закону, то диаграмма сила – перемещение не образует фигуру, обладающую площадью. При подобных рассуждениях упускалось решающее для этого случая обстоятельство. Дело в том, что в катушке при замыкании и размыкании контакта сила тока возрастает и убывает по экспоненциальному закону

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{L}{R}t} \right), \quad (4.2)$$

где ε – электродвижущая сила, R – активное сопротивление цепи, L – индуктивность катушки, t – время. Из-за не мгновенного нарастания и исчезновения силы возникает её запаздывание относительно смещения, т.е. двухзначность, о которой говорилось ранее, безусловна, причём здесь двухзначность не носит статического характера, а возникает только при колебаниях вследствие сдвига по фазе между силой и смещением, т.е. двухзначность имеет динамический характер. По сути здесь идёт речь о сложении двух взаимно перпендикулярных колебаний. Напомним, что если складываются два одночастотных гармонических колебания, то их сумма представляется в осях $y = f(x)$ в виде окружности или эллипса, в зависимости от соотношения их амплитуд.

Аналогичные по физическому смыслу процессы протекают при работе поршневых двигателей, в частности – паровых машин, наиболее простых аналогов современных устройств. Автоколебания совершаются, так же и в пневматических ударных

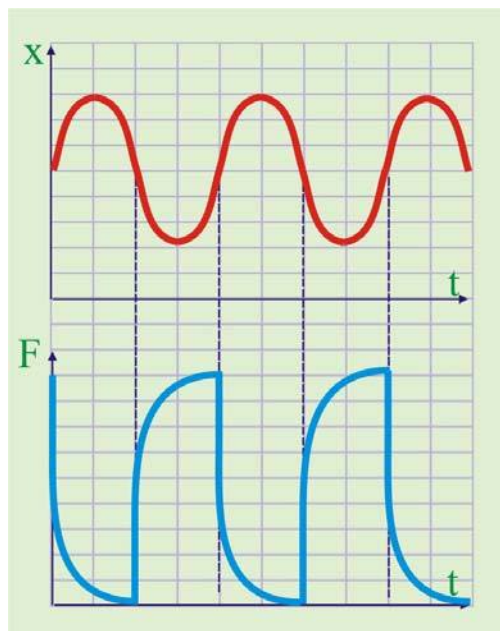


Рис. 4.8. Зависимость смещения и силы от времени

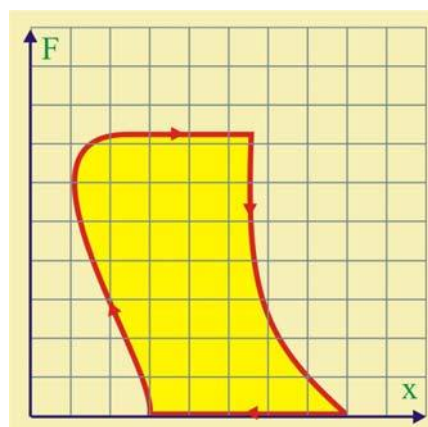


Рис. 4.9. Зависимость силы от смещения

инструментах, отбойных молотках, трамбовках, устройства для очистки поверхностей.

4.2. Баланс энергии и фазовый портрет автоколебаний

Для более подробного количественного рассмотрения энергетического баланса автоколебаний целесообразно рассмотреть поведение отдельных видов энергии, циркулирующей в системе. Наряду с потенциальной и кинетической энергии принципиальное значение имеет поведение энергии, обусловленной энергией, расходуемой на преодоление сил демпфирования E_D [3]. Дело в том, что при автоколебаниях общее количество энергии, переходящей из одной формы в другую зависит как от вводимой в систему энергии E_+ , так и от энергии, расходуемой на преодоление сил сопротивления E_- . В случае, когда $\Delta E_- - \Delta E_+ > 0$ энергия системы в течение каждого периода колебаний уменьшается, что приводит к затуханию колебаний, если $\Delta E_- - \Delta E_+ < 0$, то амплитуда колебаний с каждым периодом увеличивается, система раскачивается. Величины ΔE_- и E_+ являются функциями амплитуды. Так, например, при пропорциональности силы сопротивления скорости в первой степени ($F \approx -\dot{x}$) и гармоничности рассматриваемых колебаний $x = A \cos \omega t$, изменение энергии, затрачиваемой на преодоление сил сопротивления можно представить следующим образом

$$\Delta E_- = - \int_0^T F \dot{x} dt = \beta \int_0^T \dot{x}^2 dt = \beta A^2 \omega \int_0^{2\pi} \sin^2 \omega t d(\omega t) = \beta A^2 \pi \omega, \quad (4.3)$$

где β – коэффициент затухания, A – амплитуда колебаний, ω – циклическая частота, T – период колебаний. Уравнение (4.3) показывает, что ΔE_- увеличивается пропорционально квадрату амплитуды.

Вид функции подводимой к системе энергии $\Delta E_+(A)$ определяется механизмом возбуждения. Рассмотрим энергетическую диаграмму, приведенную на рис. 4.4 и сопоставим ей фазовый портрет колебаний рис. 4.10.

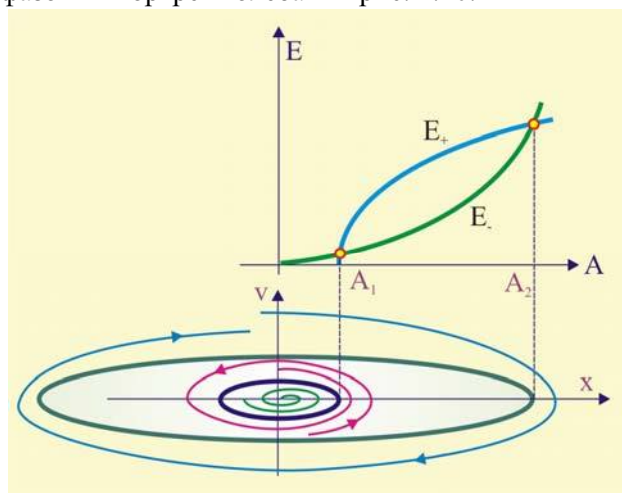


Рис. 4.10. Фазовый портрет с двумя предельными циклами

На фазовой диаграмме имеется два предельных цикла, которые изображены эллипсами. Вне большего эллипса амплитуда во времени возрастает, внутри малого эллипса колебания являются затухающими. Фазовая плоскость между эллипсами соответствует автоколебательному режиму системы с жёстким возбуждением. Таким образом фазовую плоскость автоколебаний можно разделить на области возрастающих и убывающих колебаний, ограниченных предельными циклами, поэтому периодическое движение возможно только при определенных соотношениях амплитуд, соответствующих точкам пересечения предельных циклов с осью абсцисс.

Рассмотрим далее несколько примеров, широко распространенных автоколебательных систем, которые, несмотря на кажущиеся внешние различия имеют родственные свойства физических процессов, протекающих при возникновении колебаний.

4.3. Колебания пластинки в воздушном потоке

Далее пойдёт речь об автоколебаниях в системах с воздушным возбуждением, к которым относятся, баяны, гармони, аккордеоны, концертино, фисгармонии и язычковые органы. Моделью активного элемента всех перечисленных инструментов может служить жёсткая тонкая пластинка, расположенная в горизонтальном воздушном потоке, набегающем с постоянной скоростью v вдоль средней плоскости пластинки в невозмущённом состоянии равновесия (рис. 4.11).

В горизонтальном положении пластины аэродинамические силы, обусловленные взаимодействием с набегающим потоком равны нулю, проявляется только весьма незначительная сила внутреннего трения воздуха о поверхность пластины (эффект вязкости воздуха) [4].

При отклонении пластины от положения равновесия на некоторый угол φ начинают проявляться две аэродинамические силы:

подъёмная сила

$$F_y = C_y \frac{\rho v^2}{2} l \varphi, \quad (4.4)$$

и **сила лобового сопротивления**

$$F_x = C_x \frac{\rho v^2}{2} l \varphi, \quad (4.5)$$

где C_y , C_x – постоянные аэродинамические коэффициенты, характерные для данной геометрии обтекаемого тела и структуры потока, ρ – плотность воздуха, l – размер пластинки в направлении скорости набегающего потока, b – расстояние от точки крепления пластины до центра приложения аэродинамических сил, которое, в первом приближении для прямоугольной пластины можно считать независимым от угла её отклонения. При ламинарном режиме обтекания пластины её стационарное положение будет сохраняться. При определённой скорости потока в головной части пластинки произойдёт турбулизация пограничного слоя, которая будет характеризоваться возникновением перемещением и отрывом вихрей. При отрыве вихрей, которые обладают определённым количеством движения (импульсом) на пластинку будут действовать силы (в соответствии с законом сохранения импульса), которые при определённых условиях могут нарушить условия равновесия, т.е. отклонить пластину на бесконечно малый угол $d\varphi$, отклонение пластины на угол $d\varphi$ будет сопровождаться нарушением баланса между силой лобового сопротивления и подъёмной силой. Момент сил, возникающих при отклонении пластины на малый угол относительно оси шарнира, определится как

$$M(F) = -k l^2 d\varphi + F_x b d\varphi + F_y b, \quad (4.5)$$

где k – коэффициент жёсткости пружины, сообщающей положению пластины упругие свойства. Подставим в уравнение моментов значение силы лобового сопротивления и подъёмной силы

$$M(F) = -k l^2 d\varphi + C_x \frac{\rho v^2}{2} b l d\varphi^2 + C_y \frac{\rho v^2}{2} b l d\varphi. \quad (4.6)$$

В отклонённом состоянии сила лобового сопротивления будет существенно меньше подъёмной силы, поэтому ей можно пренебречь

$$M(F) \cong -k l^2 d\varphi^2 + C_y \frac{\rho v^2}{2} b l \varphi, \quad (4.7)$$

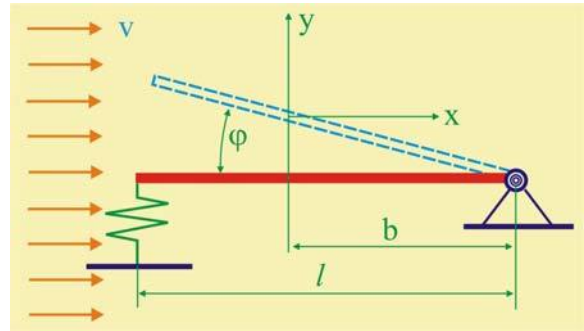


Рис. 4.11. Пластина в набегающем потоке

$$M(F) \cong -k\ell + C_Y \frac{\rho v^2}{2} b. \quad (4.8)$$

Поскольку пластина относительно шарнира будет при колебаниях совершать вращательное движение, то при составлении уравнения движения вместо массы необходимо пользоваться моментом инерции относительно шарнира, а вместо сил, их моментами относительно оси, проходящей через этот центр перпендикулярно плоскости чертежа

$$J\ddot{\phi} + \left(k\ell - C_Y \frac{\rho v^2}{2} b \right) \ell d\phi = 0. \quad (4.9)$$

Условие устойчивости пластины с учётом последнего уравнения можно представить следующим образом

$$\left(k\ell - C_Y \frac{\rho v^2}{2} b \right) > 0,$$

(4.10)

откуда можно определить значение критической скорости

$$v_{cr} = \sqrt{\frac{2k\ell}{C_Y \rho b}}. \quad (4.11)$$

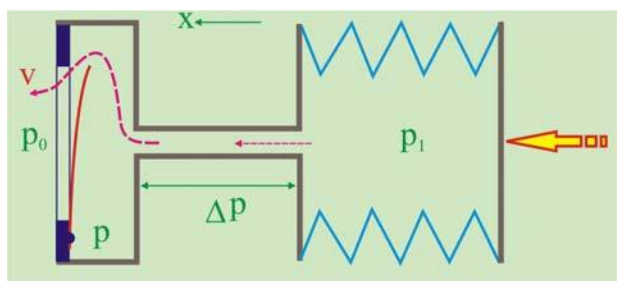


Рис. 4.12. Модель колебательной системы баяна

В музыкальных инструментах колеблющееся тело представляет собой тонкую металлическую пластинку, прикрепленную одним концом к планке с прямоугольным вырезом, в который пластинка – язычок должен входить с небольшим зазором. Свободный конец язычка в начальном статическом положении несколько отогнут. В баянах (рис. 4.12), аккордеонах, губных гармониках имеется целый ряд язычков, имеющих различные

частоты собственных колебаний. В баяне, аккордеоне и гармошке каждая планка с язычком имеет сообщение с мехом через специальный канал, именуемый входной камерой или резонатором. Планки располагаются таким образом, что давление p_1 создаваемое мехом, действует на каждую пластинку, пригибая язычок к проёму в планке. При изменении знака давления язычок не возбуждается. Такая конструкция подвижных элементов позволяет использовать в музыкальных инструментах два ряда планок, один из которых возбуждается при сжатии меха, а второй – при его растяжении. В рассматриваемой звучащей конструкции будут развиваться несколько отличных от атмосферного p_0 давлений. Давление в мехе p_1 , перепад давлений в камере при колебаниях Δp и рабочий перепад давлений, действующих на язычок p . Действие конструкции определяется объёмной скоростью воздуха v , стремящегося ввиду разности давлений в проём между планкой и кромками язычка выйти наружу [7].

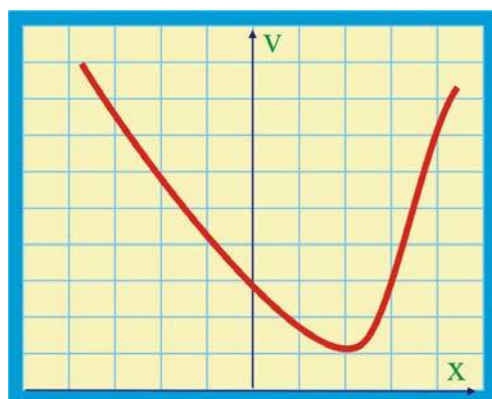


Рис. 4.13. Зависимость скорости воздуха от смещения язычка

Зависимость величины объёмной скорости воздуха от положения язычка в статическом режиме (при неподвижном положении язычка без колебаний) приведена на рис. 4.13, это основная характеристика рассматриваемой автоколебательной системы. Как видно, объёмная скорость становится минимальной при максимальном перекрытии языком площади прямоугольного отверстия в планке. При возникновении колебаний язычка начинает «работать» обратная связь, которая проявляется в виде взаимосвязи объёмной скорости воздуха с давлением внутри устройства. Закон изменения объёмной скорости от времени будет нелинейным, вследствие вида зависимости $v = f(x)$. В нелиней-

ности зависимости объёмной скорости от времени можно убедиться, представив обсуждаемую величину как функцию времени (рис. 4.14). Нелинейность скорости во времени объясняет то, что звуки всех языковых музыкальных инструментов богаты обертонами. Нелинейная зависимость скорости порождает нелинейную зависимость от времени рабочей разности давлений: изменение скорости приводит к изменению динамической составляющей давления

$$p_i \cong \frac{\rho v_i(t)}{2}. \quad (4.12)$$

Кроме того, объём воздуха, заключённого в рабочем пространстве обладает определёнными упругими свойствами, что следует непосредственно из уравнения Клапейрона – Менделеева

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \quad p = \frac{m}{V} \frac{RT}{\mu}, \quad p = \frac{\rho RT}{\mu}, \quad (4.13)$$

где V – объём воздуха, μ – молярная масса воздуха, R – универсальная газовая постоянная, T – абсолютная температура. Кроме того, в режиме переменных давлений воздух обладает инерционностью. При положительном ускорении воздуха рабочая разность давлений уменьшается, при отрицательном ускорении, наоборот – увеличивается. При малых амплитудах колебания язычка объёмная скорость воздуха меняется практически синусоидально (линейно ниспадающий участок зависимости скорости от смещения язычка), когда же величина скорости достигнет участка излома (язычок проходит сквозь планку), скорость принимает резко несинусоидальный характер. Такая картина приводит к тому, что при малых амплитудах величина энергии, передаваемой системе E_+ растёт пропорционально квадрату амплитуды, при возрастании амплитуды такая зависимость изменяется, показатель степени становится меньше квадрата, в то время как энергия, теряемая на сопротивление E_- остаётся неизменно пропорциональной квадрату амплитуды. Таким именно образом язычок достигает режима самовозбуждения по «мягкой» схеме. Зависимость E_+ и E_- от амплитуды и фазовый портрет колебаний имеют такой же характер, как изображено на рис.4.10.

Следует отметить, что режим самовозбуждения зависит от разности давлений $p_1 - p_0$. Под действием этой разности давлений язычок дополнительно прогибается в сторону проёма, что приводит к смещению точки излома скорости. Если рабочая точка попадает на точку излома (рис. 4.14), то возбуждение колебаний не происходит. На практике в аккордеоне это происходит при резком растяжении или сжатии мехов. Решающую роль для возбуждения автоколебаний играет конструкция рамки, без неё самовозбуждение при таких геометрических размерах язычка стало бы невозможным. Интересно, что теория автоколебаний активных элементов языковых воздушных музыкальных инструментов была опубликована Б.П. Константиновым только в 1939 г., хотя музыкальные инструменты такого типа используются музыкантами уже не одну сотню лет. Известно что однорядная саратовская гармонь была изобретена мастером Ф. Бушманом в 1822 г., а до этого с незапамятных времён использовали рожки, так же снабжёнными язычками и специальными резонаторами. И всё это без соответствующего теоретического обоснования, методом проб и ошибок.

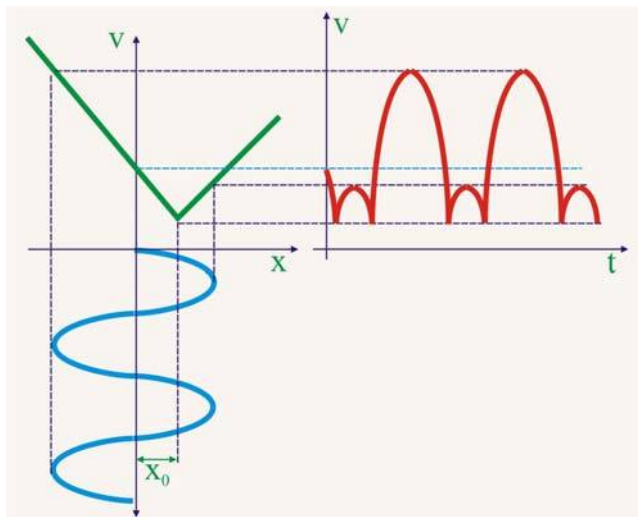


Рис. 4.14. Зависимость объёмной скорости воздуха от времени

4.4. Часы

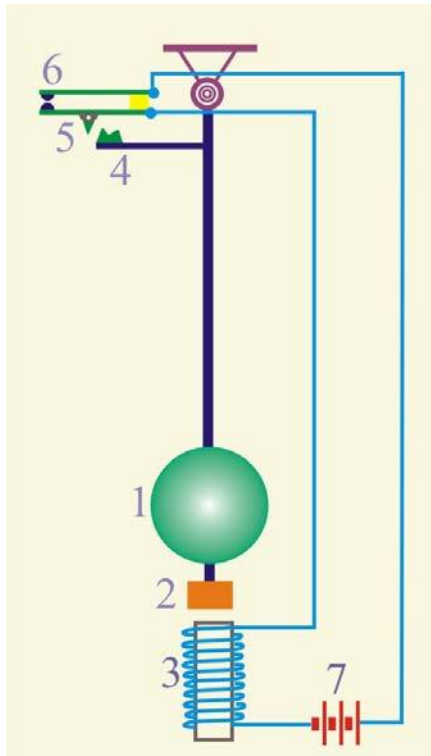


Рис. 4.15. Электромеханические часы

В быту большое распространение получала автоколебательная система, на основании которой построено большинство, так называемых, **электромеханических часов**, упрощённая схема которых приведена на рис. 4.15. Маятник часов 1 соединён со стальным якорем 2, располагающимся вблизи электромагнита 3. В верхней своей части маятник имеет палец 4, содержащий толкатель седловидной формы. В электрическую часть конструкции помимо электромагнита входит источник его питания 7 и подпружиненная группа контактов 6. На нижней пластине свободно подвешена собачка 5.

Как известно, колебания маятника являются затухающими, но в данном случае компенсация потерь на трение и сопротивление компенсируется порционным введением энергии от внешнего источника. Когда при движении стержня маятника влево собачка попадает в седло, контакты замыкаются, по цепи начинает течь ток, и маятник посредством электромагнита получает ускоряющий импульс. Движение маятника влево приводит к размыканию контакта, исчезновению тока в цепи и прекращению действия электромагнита. Таким образом, компенсируются потери на затухание и колебания носят установившийся характер. Следует отметить, что контактная группа отрегулирована таким образом, что замыкание контактов происходит в тот момент, ко-

гда стержень из положения с заданной амплитудой начинает движение вправо. Если амплитуда колебаний будет больше требуемой, то контакты не замыкаются; в этом случае палец 4 продвигается дальше влево, и собачка 5 соскальзывает по тыльной стороне толкателя, не заскакивая в седло. Система не получает порцию энергии, потери не компенсируются и амплитуда уменьшается, достигая требуемой величины, при которой в крайнем положении оси симметрии собачки и седла совпадают.

Применительно к рассматриваемой системе можно выделить все составные части автоколебательной системы (рис. 4.3): внешним источником энергии является батарея, в качестве колебательной системы выступает маятник, клапаном является управляемая группа контактов, обратная связь выстраивается при управлении работой (клапана) внешнего источника энергии маятником. Естественно, если изначально амплитуда колебаний мала, то автоколебания возникнуть не могут, потому что до замыкания контактов дело не доходит, колебания со временем затухают и часики прекращают свой ход. В этой связи для возбуждения автоколебательного процесса маятник необходимо отклонить вправо на угол, заведомо превышающий требуемую оптимальную амплитуду. Сделан несколько затухающих периодов, маятник достигнет амплитуды отклонения, при которой собачка станет замыкать контактную группу. Другими словами, налицо **автоколебательная система с жёсткой характеристикой самовозбуждения**. Следует отметить, что на практике работа, производимая одним электрическим импульсом, в десятки раз превышает величину потерь за период, поэтому после каждого импульса маятник совершает не одно, а несколько затухающих колебаний.

Устройство, описанное выше, в историческом плане не было первым. Задолго до появления первых конструкций электромеханических устройств использовались чисто механические маятниковые часы, конструкция которых была впервые предложена Галилео Галилеем

(1564 – 1642). В 1636 г. Галилей писал [8]: «У меня есть такой измеритель времени, что если бы сделать 4 или 6 таких приборов и запустить их, то мы бы обнаружили (в подтверждение их точности), что измеряемое и показываемое время не только из часу в час, но и из дня в день, из месяца в месяц не отличалось бы на различных приборах даже на секунду, настолько одинаково бы они шли».

На рис. 4.16 приведен рисунок, поясняющий устройство механизма Галилея. Чертёж сделан сыном Галилея Винченцо Вивiani. Очевидно, что часы Галилея использовали открытый им изохронизм колебаний маятника, т.е. независимость периода колебаний математического маятника от массы груза

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}. \quad (4.14)$$

Однако патент на часы получил Христиан Гюйгенс, который утверждал, что о проекте Галилея ничего не знал. Сомнительная история, потому что отец Гюйгенса вёл переговоры с Галилеем от имени администрации Нидерландов о финансировании реализации проекта. Часы Галилея в качестве внешнего источника использовали потенциальную энергию опускающейся гири, которая преобразовывалась в кинетическую энергию вращающихся зубчатых колёс. Дозирование энергии, поступающей колебательной системе в часах Галилея управлялось крючковым спуском оригинальной конструкции.

В последствии спуск Галилея был усовершенствован с учётом свойств новых конструкционных материалов. На рис. 4.17 показано устройство современного спускового анкерного механизма Грэхема. Зубчатое колесо 1 получает вращательный момент от гиревого или пружинного привода. Анкер (якорь) 2, жёстко связанный с маятником качается на оси и имеет в своём составе палетты 3 и 4. Благодаря форме палетт маятнику сообщается энергия два раза за один период его качания при прохождении им положения статического равновесия. Когда зубец колеса попадает на скошенный торец палетты, в плоскость импульса, – то, проскальзывая по ней под действием вращающего момента, подталкивает якорь, а следовательно и маятник. В это время вторая полета опускается и стопорит очередной зубец колеса, пока якорь снова не возвратится в среднее положение. Рис. 4.17 соответствует моменту времени, когда, двигаясь вправо, маятник только что прошёл среднее положение и получил импульс в том же направлении, т.к. зубец 5 проскользнул по скосу палетты 3, при этом палетта 4 уже опустилась и удерживает зубец 6, который сообщит импульс противоположного направления посредством полеты 4 при движении маятника справа налево.

В современных наручных часах регулятором подачи энергии в систему вместо маятника используется баланс (рис. 4.18) представляющий массивное кольцо, соединённое со спиральной пружиной. Колебания баланса передаются вилке спускового механизма, которая посредством палетт через косозубое колёсико и систему передач соединено с силовой пружиной, потенциальная энергия которой этим механизмом преобразуется в автоколебательное движение.

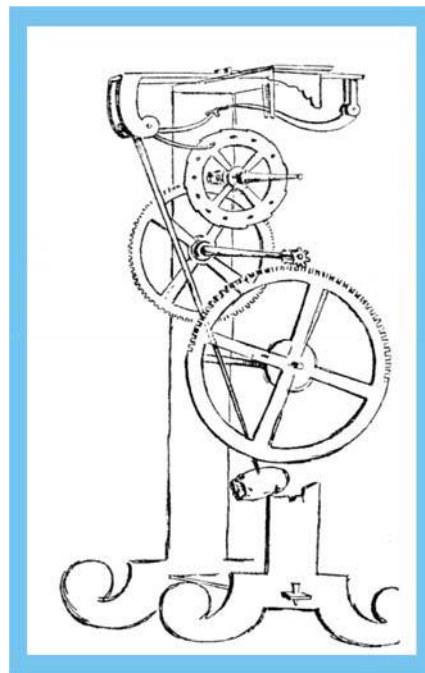


Рис. 4.1 Часы Галилея

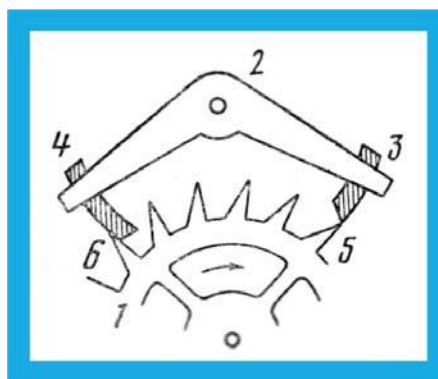


Рис. 4.17. Анкерный ход Грэхема [7]

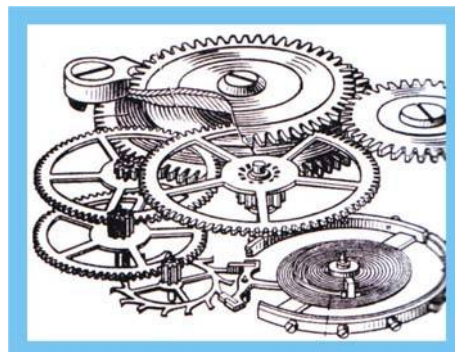


Рис. 4.18. Часы с балансом

4.5. Автоколебания в гидравлических системах

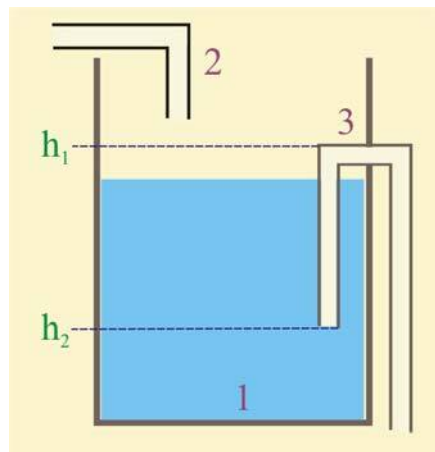


Рис. 4.19. Сосуд Тантала

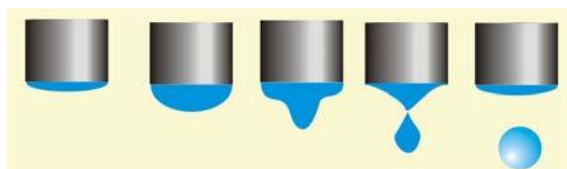


Рис. 4.20. Образование капель

Одной из простых автоколебательных гидравлических систем является сосуд Тантала (рис. 4.19). Ёмкость 1 наполняется питающей трубой 2. Сосуд снабжён сифоном 3. Когда уровень жидкости достигает уровня h_1 , сифон освобождает ёмкость, доводя уровень жидкости до уровня h_2 , при этом действие сифона прекращается т.к. вода из него уходит. Уровень жидкости снова начинает повышаться и процесс повторяется. Налицо периодическое изменение уровня жидкости по автоколебательной схеме.

Пожалуй, самая простая гидравлическая система представляет собой неплотно закрытый водопроводный кран, неприятный эффект периодического действия которого многие испытывали на себе, особенно когда капли с невыносимой многими последовательностью,

срываются ночью и в пустую раковину или ванну. Образующиеся из неплотно завёрнутого крана капли находятся под действием трёх сил: **силы поверхностного натяжения, силы внутреннего трения и силы тяжести**. С поступлением в каплю воды (рис. 4.20) её масса растёт до тех пор, пока сила тяжести не превзойдёт сумму сил поверхностного натяжения и внутреннего трения (сцепление отдельных частичек воды друг с другом). В этот момент времени капля отрывается, приобретает сферическую форму и под действием силы тяжести с ускорением отправляется вниз, а в это время на срезе крана начинает «созревать» новое событие. Генерация капель происходит не только из неисправных кранов. В помещениях с высокой температурой и большой влажностью, например в предбанниках, на потолке образуются вследствие конденсации капли, которые со временем увеличиваются и отрываются от потолка, на их месте начинает развиваться новая капля. При постоянстве температуры и влажности период отрыва капель сохраняется достаточно постоянным.

4.6. Автоколебания в трубах

Издавна отмечено, что в трубах могут возбуждаться достаточно мощные автоколебания воздушного столба, которые широко использовались и используются поныне в музыкальных инструментах. Автоколебания в трубах характерны тем, что элементом, задающим колебания, является сама труба, представляющая собой систему с распределёнными параметрами. В трубах по их длине с конечной скоростью распространяются упругие волны акустического диапазона [7].

Если рассматривать трубу **в установившемся режиме**, то она представляет собой отрезок волновой системы с определёнными условиями на её торцах. Если волна возбуждается в одном торце, то вследствие отражения от второго торца в результате интерференции по длине трубы **устанавливается стоячая волна**. При определённых соотношениях геометрии трубы и условий возбуждения **могут наблюдаться резонансные явления**. В отличие от систем с сосредоточенными параметрами трубы обладают целой последовательностью резонансных

частот, часто образующих более или менее гармонический ряд. Другими словами, **труба может возбуждаться на основном тоне и обертонах**. Трубы могут возбуждаться на частотах, для которых по длине трубы укладывается целое число полуволин или чётное число четвертей волн. Трубы с одним закрытым концом характеризуются тем, что на границе заглушки образуется узел смещения (максимум колебательной скорости частиц среды) и пучность давления, при этом по длине трубы укладывается нечётное число четвертей длин волн. Основной тон у закрытой с одного торца трубы в два раза ниже, чем у открытого варианта.

Звуковые волны в трубах можно возбуждать **в не установившемся режиме**, т.е. при распространении акустических импульсов, длина которых существенно меньше длины трубы, то, посланные из одного торца, импульсы после отражения от противоположного торца будут возвращаться обратно. Так, например, если по трубе распространяется импульс сжатия, то от открытого конца он вернётся в место излучения так же в виде импульса сжатия, если же противолежащий торец закрыт, то в точку излучения придёт уже импульс разрежения.

Частота возникающих в трубах автоколебаний практически должна совпадать либо с основной частотой, либо с одним из обертонов. Получить произвольную частоту автоколебаний в трубах невозможно, возможно лишь «перескочить» с одного обертона на другой. В некоторых музыкальных инструментах, например в тромбоне, изменение частоты производится путём изменения длины трубы, для этого предназначена выдвижная кулиса. Имеющиеся в духовых инструментах клапаны позволяют получать звукоряд в пределах примерно одной октавы.

Духовые музыкальные инструменты делятся на язычковые (кларнет, гобой, саксофон и др.) и мундштуковые (труба, тромбон и др.). В мундштуковых духовых инструментах возбудителем автоколебаний являются губы музыканта, вдавливаемые в чашечку мундштука. Губы в этом случае «работают» по аналогии с голосовыми связками. В органах в области высоких частот используются трубы с язычковым возбуждением. Рассмотренные ранее язычковые автоколебательные системы предполагали, что частота автоколебаний задаётся частотой собственных колебаний язычка, примыкающие же элементы конструкции в лучшем случае исполняли роль «усилителей» эффекта. В случае с трубами, возбуждаемыми язычком труба является задающим элементом, собственная же частота язычка представляется второстепенной. Как правило, собственная частота язычка выбирается ниже основной (резонансной) частоте трубы.

Рассмотрим особенности возбуждения язычковых труб на примере неуставившегося режима. Предположим, что в начальный момент времени язычок отогнут, как показано на рисунке 4.21 (левая часть), при этом объём сжатого воздуха (объём с давлением выше атмосферного) врывается в трубу и создаёт импульс сжатия, который прижимает язычок, который, действуя как клапан, закрывает вход, прекращая поступление в трубу сжатого воздуха. Импульс сжатия распространяется по трубе и отразившись от второго открытого конца трубы возвращается обратно уже в виде импульса разрежения, который тоже отражается теперь уже от закрытого конца и превращается в импульс сжатия. Давление в трубе при этом становится практически равным атмосферному, язычок снова отгибается, открывая вход сжатому воздуху. Продолжительность цикла равна учетверённому времени пробега импульса длины трубы, что, собственно и определяет частоту основного тона. Таким образом, язычок в данном случае можно рассматривать как клапан, управляемый колебательной системой, т.е. самой трубой. Именно в этом проявляется механизм обратной связи. При установлении автоколебаний амплитуда не возрастает т.к. потери на сопротивление и излучение волн компенсируется энергией источ-

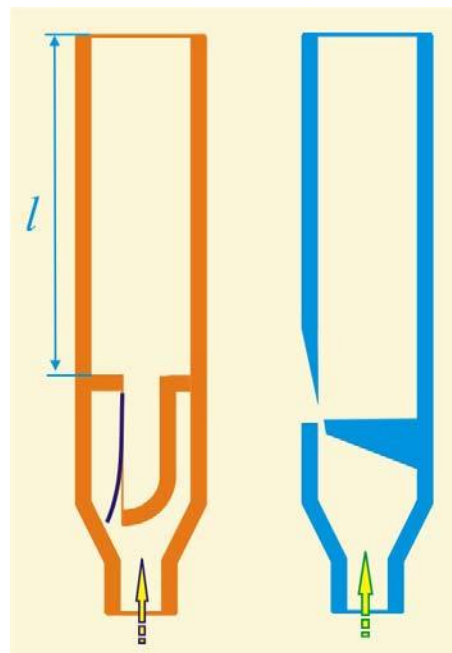


Рис. 4.21. Автоколебания в трубах

ника сжатого воздуха. При возрастании давления в импульсе увеличивается мощность колебаний и энергетический баланс восстанавливается.

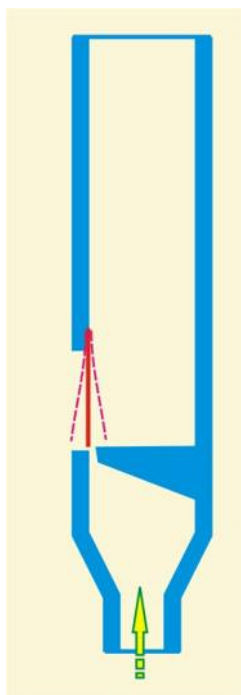


Рис. 4.22. Подвижный язычок в щели

Классическая органная труба не имеет язычка (правая часть рис. 4.21), импульс сжатия поступает в камеру, выходное отверстие которой оформлено в виде узкой щели. Воздушный поток, проходя щель, обтекает в виде малой по площади струи клиновидную скошенную часть стенки трубы. Вследствие установления стоячих волн струя поочерёдно отклоняется то наружу через щель, то внутрь камеры. В этом случае, истекающая из щели струя рассматривается как клапан, как и в предыдущем случае, управляемый трубой. Обратной связью является давление перед и за щелью, под действием которого струя изменяет своё направление. Работа устройств последнего типа никак бы не изменилась, если бы вместо щели со скошенной кромкой использовался бы настоящий клапан в виде язычка (рис. 4.22).

Описанные выше эффекты помимо музыкальных инструментов нашли применение при создании воздушных сирен, которые представляют собой два диска: неподвижного статора и вращающегося ротора, снабжённых одинаковым числом косо прорезанных отверстий, которые играют роль лопаток турбины [7]. С другой стороны относительное перемещение отверстий обеспечивает периодическое прерывание воздушного потока, протекающего через устройство. Сирена становится проницаемой для воздуха при совпадении осей отверстий в статоре и роторе. Другими словами, на выходе сирены образуется модулированная воздушная струя. Частота модуляции пропорциональна количеству отверстий статора и ротора и угловой скорости их вращения. Сирену можно рассматривать как клапан, управляемый вращательным движением ротора (рис. 4.23)

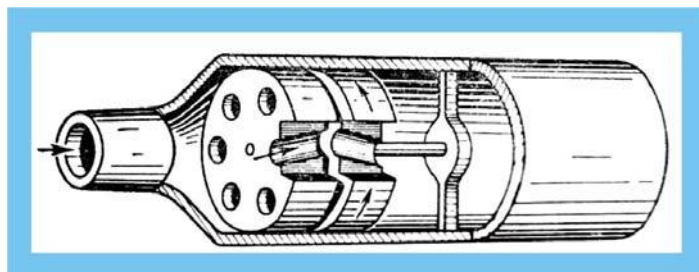


Рис. 4.23. Схема воздушной сирены [7]

Автоколебания возникают вследствие взаимодействия собственно сирены с сопряжённой с ней трубой. Рассмотрим случай, когда в начальный момент времени в трубу попадает импульс сжатия, который, пройдя по длине трубы, отражается от открытого конца и возвращается в виде импульса разряжения.

Возможны два случая. Если за время пробега импульса в прямом и обратном направлении ротор проворачивается на угол, соответствующий шагу отверстий, то разряжение в трубе способствует созданию дополнительного вращающего момента ротора. Если к моменту прохождения импульса в оба конца он встречает перекрытые отверстия, отражается от закрытого конца и возвращается после нового отражения от открытого конца уже в виде импульса сжатия к моменту открытия отверстий. Давление в трубе будет повышенным, поэтому создаются условия для торможения вращения. Естественно в процессе торможения и ускорения ротора найдётся такая частота вращения, при которой труба не будет оказывать на ротор никакого влияния. Такой режим будет соответствовать установившейся скорости «стабилизированной» реакцией трубы. Таким образом, если ротор начнёт вращаться с меньшей угловой скоростью, то труба его «подгонит»; если же ротор разгонится, то произойдёт обратное, труба за счёт создания на выходе статора области повышенного давления «притормозит» его вращение. Так проявляется механизм обратной связи в этой исключительно автоколебательной системе.

4.7. Автоколебания, связанные с образованием вихрей

С древнейших времён известно, что ветер может рождать звуки. Так, например, если в деревянной рамке натянуть, настроенные в унисон струны, то будучи расположенная перпендикулярно ветру, она начинает издавать тихие, но мелодичные звуки. Это, так называемая эолова арфа, которая услаждала слух ещё в Древней Греции и Древнем Риме. Однако внятное объяснение этого акустического эффекта появилось только в 1878 г. в результате специальных исследований, проведенных Струхалем и в 1912 г. Карманом [7].

На основании экспериментов (рис. 4.24) обнаружилось, что например, при обтекании ускоряющимся потоком цилиндра в поперечном направлении у поверхности в критических точках возникает отрыв пограничного слоя, который в кормовой части образует два цилиндрических вихря, которые периодически отрываются и уносятся набегающим потоком, образуется, так называемая, дорожка Кармана (рис. 4.25). Карман [10], на основании обработки собственных фотографий обтекания цилиндра обнаружил, что система вихрей становится устойчивой при условии

$$\operatorname{sh}\left(\frac{\pi h}{\ell}\right)=1, \Rightarrow \frac{h}{\ell}=0,281, \quad (4.15)$$

Более поздние исследования показали, что более точной является формула Гарнера [10]

$$\sin\left(\frac{\pi C}{\ell}\right)=\operatorname{sh}\left(\frac{\pi h}{\ell}\right), \quad (4.16)$$

где величина C/ℓ характеризует взаимное расположение отдельных вихрей. Устойчивое положение дорожки отвечает поочерёдному отрыву вихрей то с одной, то с другой стороны обтекаемого цилиндра. Вихри представляют собой некоторый объём сплошной среды, вращающейся вокруг мгновенной оси, что приводит к установлению в этом объёме распределения скоростей и давлений, отличных от основного потока. Колебания обтекаемых тел происходит преимущественно в плоскости, перпендикулярной направлению набегающего потока, при этом твёрдые тела (струны, стержни, пластины, сферы) возбуждаются на в диапазоне собственных частот. Первое обстоятельство объясняется довольно просто. Отрывающийся вихрь уносит с собой некоторый импульс, причём в соответствие с законом сохранения им-

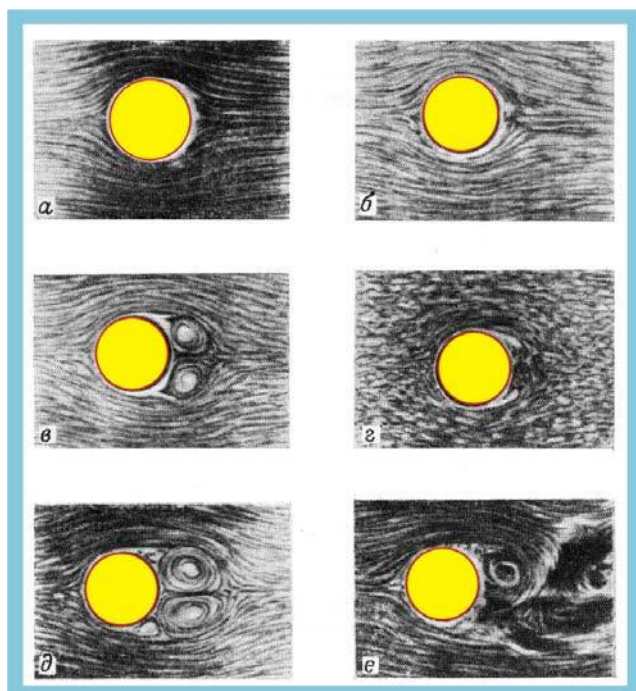


Рис. 4. 24. Схема образования вихрей [9]

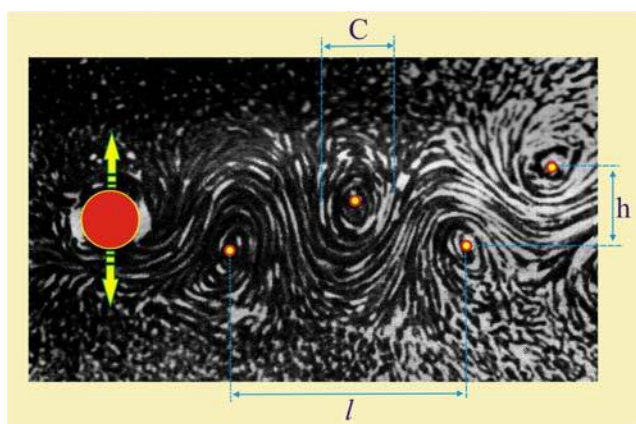


Рис. 4.25. Дорожка Кармана [10]

пульса, обтекаемое тело получает импульс противоположного направления. Так как вихри срываются периодически, то и воздействие на обтекаемое тело тоже будет периодическим.

4.8. Флаттер

Когда самолёты летали тихо, о катастрофическом явлении трепетания их крыльев никто даже не подозревал. Когда скорость перевалила за 250 – 300 км/ч., в воздухе начали происходить совершенно невиданные аварии, поставившие, по началу, в тупик конструкторов и испытателей авиационной техники практически всех успешно летающих стран. Вот, что писал о развитии авиации в тридцатых годах прошлого века один из известных специалистов в области испытания военной авиационной техники [11]:

«С появлением новых скоростных самолётов в авиации едва ли не всех передовых стран мира прокатилась волна таинственных необъяснимых катастроф.

Случайные очевидцы, наблюдавшие эти катастрофы с земли, видели почти всегда одну и ту же картину: самолёт летел совершенно нормально, ничего не внушало ни малейших опасений, как вдруг внезапно какая-то неведомая сила, будто взрывом, разрушала машину – и вот уже падают на землю изуродованные обломки: крылья, оперение, фюзеляж ...

Все очевидцы, не сговариваясь между собой, применяли выражение – взрыв, так как не представляли себе других возможных причин столь молниеносного и полного разрушения. Однако осмотр упавших обломков не подтверждал этой версии: никаких следов взрыва – копоты или ожогов – не оказывалось.

Самым надёжным источником информации – докладом экипажа потерпевшего аварию самолёта – воспользоваться, как правило, – увы! – не удавалось. Те же, насчитываемые буквально единицами лётчики, которым удалось выбраться из стремительно летящих вниз, беспорядочно вертящихся обломков фюзеляжа и воспользовавшихся парашютом, ничего сколько-нибудь существенного к рассказам наземных очевидцев не могли. Очень уж неожиданно и быстро развивались события: всего за несколько секунд до катастрофы ничего не предвещало её, а затем сразу – удар, треск, грохот, и самолёт разваливается на куски!

Новому грозному явлению было дано название «флаттер» (от английского flutter – трепетать), но ещё, если не ошибаюсь, Мольер сказал, что больному не делается легче от того, что он знает, как называется его болезнь по латыни.

Одна за другой приходили тревожные вести о таинственной гибели французских, английских, американских скоростных самолётов.

Не миновала сия горькая чаша и нас»

Как видно из приведенного откровения, учёные и инженеры столкнулись с каким-то совершенно новым явлением и поначалу никак не могли его внятно объяснить. Лишь после многочисленных и глубоких теоретических исследований и модельных и натурных экспериментов удалось установить, что флаттер – это проявление аэродинамической неустойчивости, когда возмущённое движение представляет собой колебания различных частей самолёта со стремительно нарастающей амплитудой. Оказалось, что система устойчивая при малых скоростях полёта становилась неустойчивой после того, как скорость достигала некоторого критического значения.

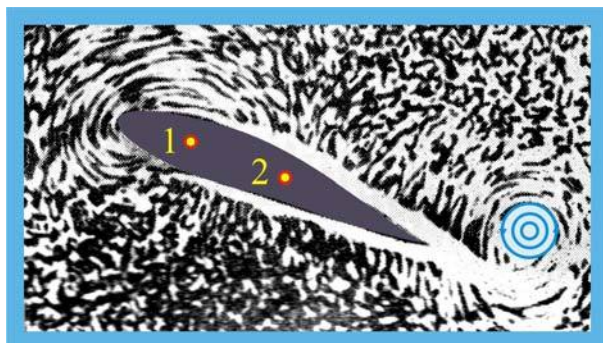


Рис. 4.26. Отрыв вихря от крыла [10]

кормовой части вихрей. Это, так называемая **динамическая задача аэроупругости**. Вторая теория флаттера строится на предположении, что при определённых скоростях набегающего потока оно теряет устойчивость и начинает совершать нарастающие изгибно-крутильные колебания. В принципе, оба подхода едины в причинах наступления разрушений, отличаются только причины к этому приводящие.

При обтекании крыла вследствие циркуляции скорости и турбулизации пограничного слоя с его кромок срываются вихри (рис. 4.26), обеспечивая эффект возбуждения колебаний, механизм возникновения которых аналогичен рассмотренному ранее.

Крыло в первом приближении можно рассматривать в виде балки с одним заделанным концом. Такая балка может совершать колебания двух основных видов: изгибные и крутильные, т.е. система крыло – фюзеляж обладает двумя степенями свободы, а о колебания крыла относятся к задачам о связанных колебаниях. С точки зрения действующих сил, крыло обладает двумя характерными, несовпадающими в данном сечении, точками их приложения: центром жёсткости 1 (рис.4.26) и центром тяжести 2. Центром жёсткости называется точка приложения главного вектора упругих сил, возникающих при деформации крыла. Несоответствие центров тяжести и жёсткости приводит к возникновению моментов действующих сил: силы тяжести, подъемной силы, силы сопротивления и аэродинамических сил, связанных с отрывом вихрей.

Природу, так называемого, «классического» флаттера можно выяснить на примере упрощённой модели в виде упруго закреплённой пластины (рис. 4.27) с двумя степенями свободы. В качестве независимых координат целесообразно выбрать угол атаки пластинки φ и её вертикальное перемещение y [11]. Уравнения движения, таким образом, рассматриваются в виде

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \varphi(t), \\ y &= y(t). \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

Определив содержание уравнений движения, можно оценить пределы их устойчивости, т.е. оценить возможность возникновения флаттера. Будем считать: пластинка в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа имеет протяжённость l ; коэффициенты жёсткости опор c_1 и c_2 известны и отнесены к единице длины пластины в указанном выше направлении; m – масса единицы площади пластинки.

При горизонтальном перемещении пластинки в среде с плотностью ρ при скорости набегающего потока v на неё действует подъёмная сила F_y

Механизм флаттера имеет ярко выраженную аэродинамическую природу. Энергия, необходимая для возбуждения автоколебаний, поступает в систему от встречного потока воздуха.

В современном представлении существует два основных, наиболее разработанных, подхода к объяснению причин появления флаттера. Один из них основывается на предположении, что разрушения, в частности, крыла происходят вследствие возникновения автоколебаний при периодическом сходе с его

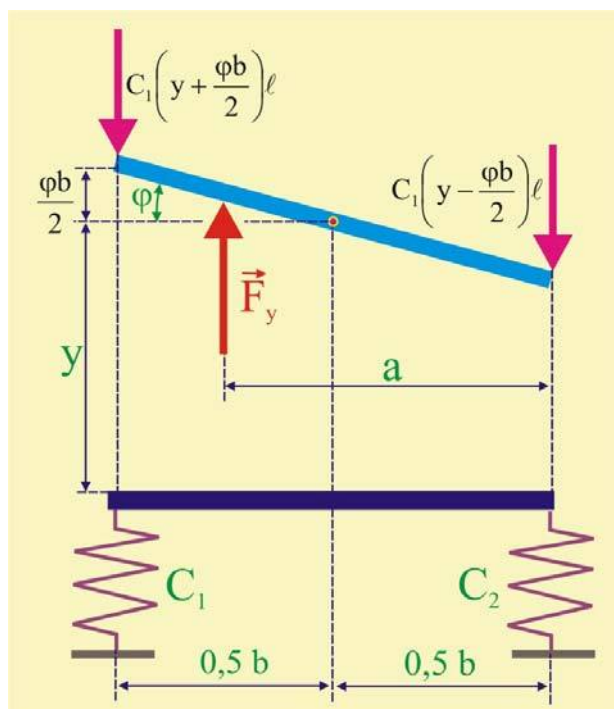


Рис. 4.27. Пластина с двумя степенями свободы

$$F_y = \frac{dc_y}{d\alpha} \varphi \frac{\rho v^2}{2} b \ell, \quad (4.18)$$

которая приложена на расстоянии a от правого края пластинки. Кроме того, при анализе необходимо учесть реакции опор, заменив связи их реакциями

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= -\left(y + \frac{b}{2}\varphi\right)c_1\ell; \\ R_2 &= -\left(y - \frac{b}{2}\varphi\right)c_2\ell. \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

Если реакции привести к единому центру, например к центру тяжести, то придём к главному вектору и главному моменту этой системы сил

$$R = R_1 + R_2 = -(c_1 + c_2)\ell y - \frac{b}{2}(c_1 - c_2)\ell\varphi, \quad (4.20)$$

$$M(R_1, R_2) = -\left(y + \frac{b}{2}\varphi\right)c_1\ell \frac{b}{2} + \left(y - \frac{b}{2}\varphi\right)c_2\ell \frac{b}{2}. \quad (4.21)$$

Дифференциальные уравнения движения с учётом полученных соотношений примут вид:

– уравнение, описывающее перемещение центра тяжести пластинки

$$F_y + R = mb\ell\ddot{y}; \quad (4.22)$$

– уравнение, описывающее поворот пластинки

$$F_y\left(a - \frac{b}{2}\right) + M(R_1, R_2) = \frac{mb^3\ell}{12}\ddot{\varphi}. \quad (4.23)$$

Подставим в полученные уравнения значения реакций опор из уравнений (4.19), значение подъёмной силы (4.18) и момента реакций связи (4.21)

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y} + a_{11}y + a_{12}\varphi &= 0, \\ \ddot{\varphi} + a_{21}y + a_{22}\varphi &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

где

$$(4.25) \quad \left. \begin{aligned} a_{11} &= \frac{c_1 + c_2}{mb}, \quad a_{22} = \frac{3(c_1 + c_2)}{mb} + \frac{dc_y}{d\alpha} \frac{\rho v^2}{2} \frac{b - 2a}{mb^2}, \\ a_{12} &= \frac{c_1 - c_2}{2m} - \frac{dc_y}{d\alpha} \frac{\rho v^2}{2} \frac{1}{m}, \quad a_{21} = \frac{6(c_1 - c_2)}{mb^2}, \end{aligned} \right\}$$

где $dc_y/d\alpha$ – угловой коэффициент прямой, характеризующий изменение коэффициента c_y .

Решение однородной системы уравнений (4.24) представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} y &= Ae^{i\omega t}, \\ \varphi &= Be^{i\omega t}, \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

где ω – угловая скорость пластины, A и B – коэффициенты.

Подставим далее решения (4.26) в уравнения системы (4.24)

$$\left. \begin{aligned} A(-\omega^2 + a_{11}) + Ba_{12} &= 0, \\ Aa_{21} + B(-\omega^2 + a_{22}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

При возможных перемещениях пластинки коэффициенты A и B не могут одновременно быть равными нулю, из чего следует, что определитель системы уравнений (4.27) можно приравнять к нулю

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -\omega^2 + a_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad (4.28)$$

или, раскрывая определитель, имеем

$$\omega^4 - \omega^2(a_{11} + a_{22}) + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0. \quad (4.29)$$

Разрешим полученное алгебраическое уравнение относительно квадрата угловой скорости

$$\omega^2 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_{11} + a_{22}}{2}\right)^2 - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}. \quad (4.30)$$

Чтобы рассматриваемая модель была устойчива необходимо, чтобы все четыре корня уравнения ω были вещественными, для чего и оба значения ω^2 тоже должны быть вещественными. Из уравнения (4.30) условие вещественности ω^2 записывается следующим образом

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \leq \left(\frac{a_{11} + a_{22}}{2}\right)^2. \quad (4.31)$$

Квадрат угловой скорости будет положительным при условии

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \geq 0. \quad (4.32)$$

Диапазон устойчивости пластинки, таким образом, будет иметь место при расположении разности $(a_{11}a_{12} - a_{12}a_{21})$ в интервале

$$0, \left(\frac{a_{11} + a_{22}}{2}\right)^2. \quad (4.33)$$

Критические ситуации будут возникать на границах интервала (4.33)

$$\left. \begin{aligned} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} &= 0, \\ (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

Совместим первое уравнение системы (4.34) с равенствами (4.25), что даст основание определить линейное значение критической скорости в виде

$$v_{cr} = \sqrt{\frac{2c_1c_2}{\rho \frac{dc_y}{d\alpha} [c_2\beta - c_1(1-\beta)]}}, \quad (4.35)$$

где $\beta = a/b$. Критическому значению скорости, т.е. $v = v_{cr}$ соответствуют два значения квадрата угловой скорости

$$\left. \begin{aligned} \omega_1^2 &= 0, \\ \omega_2^2 &= a_{11} + a_{22}. \end{aligned} \right\}. \quad (4.36)$$

Неустойчивость определяется значением $\omega^2 = 0$, этому условию соответствует постоянное отклонение пластины от состояния исходного равновесия. Если в уравнении (4.35) положить $c_2 \rightarrow \infty$ т.е. жёстко закрепить один конец пластины (рис.4.11), значения критической скорости рассчитанной по уравнениям (4.11) и (4.35) совпадут.

При увеличении скорости обтекания пластинки благодаря проявлению аэродинамических сил, включая периодические нагрузки, связанные со сходом вихрей, эффективная жёсткость крыла может уменьшиться настолько, что **обратится в ноль**, такая ситуация в аэромеханике называется **дивергенцией**. Необходимо отметить, что впервые понятие «дивергенция» было введено знаменитым Чарльзом Дарвином, для характеристики расхождений признаков организмов и растений в процессе их эволюции. В математике понятие дивергенции, как известно, характеризует величину изменения потока векторного поля в данной точке. Критическая скорость полёта, при этом, в аэромеханике называется **скоростью дивергенции**.

Дивергенция крыла может наступить только при условии

$$c_2 > c_1 \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right), \quad (4.37)$$

в противном случае выражение (4.35) оказывается мнимым. Если скорость становится больше критической скорости дивергенции, то разность правой части уравнения (4.32) будет отрицательной, при этом ω будет принимать мнимые значения. Система при этом станет монотонно возвращаться в состояние равновесия.

Подставим далее во второе уравнение системы (4.34) значение входящих в неё величин из системы уравнений (4.24) и получим ещё одно уравнение критической скорости

$$v_{cr} = \frac{2}{2\beta - 1} \sqrt{\frac{c_* - \sqrt{(c_* - c_1 c_2 + c_2^2)(2\beta - 1)^2}}{3\rho \frac{dc_y}{d\alpha}}}, \quad (4.38)$$

$$c_* = c_1 \beta - c_2(1 - \beta). \quad (4.39)$$

Увеличение скорости обтекания пластины сверх значения, определяемого уравнением (4.38), подкоренное выражение уравнения (4.30) становится отрицательным, ω^2 – комплексным числом, а движение пластины приобретает характер нарастающих по амплитуде колебаний. Другими словами, уравнение (4.38) определяет критическую скорость флаттера.

Для возникновения флаттера по этой схеме жёсткость правой опоры была бы достаточно малой в сравнении с жёсткостью левой опоры – в противном случае в соответствии с урав-

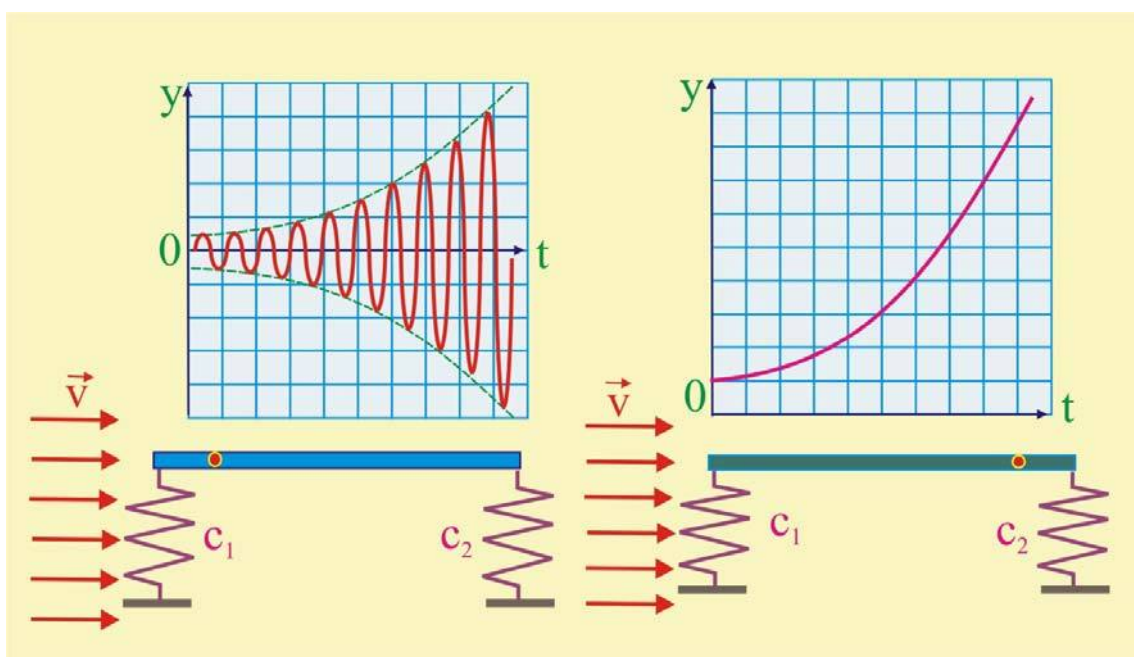


Рис. 4.28. Типы аэроупругой устойчивости в зависимости от положения оси жёсткости
 нием (4.38) вещественные значения критической скорости отсутствуют.

На рис. 4.28 зависимостями $y = y(t)$ проиллюстрированы оба варианта неустойчивости; точкой на профиле пластины обозначено положение её центра жёсткости. Под центром жёсткости подразумевается точка, приложение к которой вертикальной силы, вызывает исключительно вертикальное перемещение пластины. Если пластина нагружается парой сил, обладающих моментом, то вращение протекает вокруг оси, проходящую через эту точку. В реальных крыльях для предотвращения флаттера центры тяжести сечений находились впереди центров жёсткости

На рис. 4.29 приведена фотография «собранный» после флаттера нервюры самолётного крыла. По характеру разрушений видно, что перед тем как распасться на фрагменты крыло вовершало изгибно-крутильные колебания.

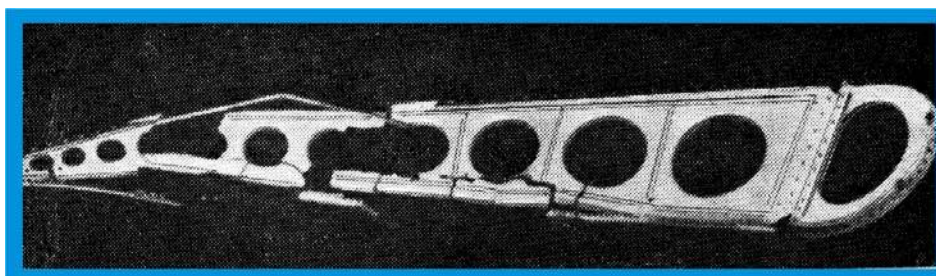


Рис. 4.29. Разрушение нервюры крыла при флаттере [12]

Для предотвращения флаттера оптимизируют распределение массы по длине крыла и жёсткость отдельных элементов конструкции. Кроме того, стараются увеличить отношение жёсткость/масса отдельных элементов и крыла в целом с целью смещения собственных частот в более высокую область. Достаточно эффективным способом предотвращения флаттера является демпфирование системы, т.е. увеличение коэффициентов трения и внутреннего сопротивления там, где аэродинамические требования позволяют это сделать.

Кроме «классического» флаттера в технике наблюдается, так называемый, панельный флаттер, когда устойчивость при обтекании потоками воздуха или жидкости теряют конструкции в виде панелей, например висячие мостовые пролёты и перекрытия.

4.9. Срывной флаттер

История висячего мостостроения насчитывает несколько обрушений их пролётов под действием ветровых нагрузок. Так, например, в 1852 г. рухнул мост Ларош-Бернар, имевший пролёт около 196 м. [11], не поняв причин разрушения, мост восстановили, и он снова рухнул в 1871 г. Спустя всего два года обрушился 336 м. мост в Огайо. Один из очевидцев так описал эту катастрофу: «В течение нескольких минут мы следили с тревогой за колебаниями, подобными качке корабля в шторм. Один раз мост поднялся почти на высоту пилонов и затем опустился; при этом вдоль всего пролёта произошло скручивание, и одна половина проезжей части почти перевернулась. Затем огромная конструкция с головокружительной высоты устремилась в реку с ужасным треском и грохотом». Обрушение висячих мостов далее произошли в 1864 г. и 1889 г. Общим для всех катастроф было то, что все они протекали при сильном ветре и перед обрушением пролёты мостов интенсивно раскачивались. Естественно, что такое поведение строительных конструкций озадачило инженеров, которые были склонны видеть причины разрушений в несовершенстве прочностных характеристик. Висячие мосты строить не перестали, они были весьма эффективны, когда надо было перекрывать большие расстояния.

Летом 1940 г. было закончено строительство Такомского моста с пролётом между опорами 854 м. и шириной всего 11,9 м (рис. 4.30). Полотно моста висело на двух стальных канатах, диаметром 46 см. каждый, со стрелой провеса 70,7 м.

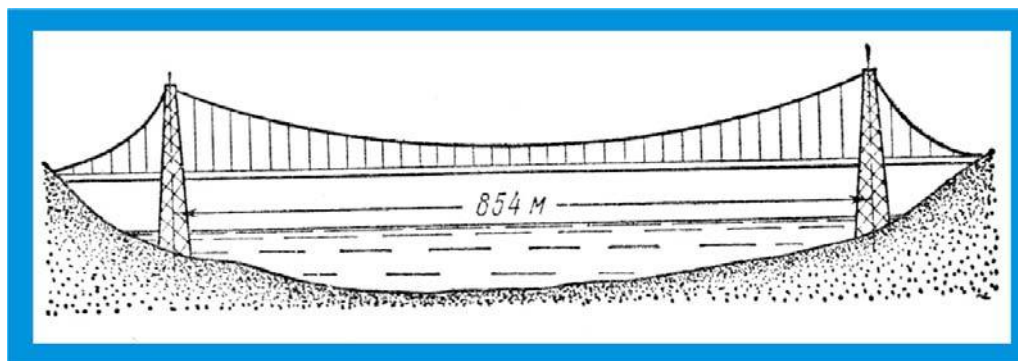


Рис. 4.30. Схема Такомского моста [11]

Методами сопротивления материалов и мостостроительными законодательствами было установлено, что мост вполне надёжен. Но это была статика. Сразу после окончания строительства обнаружилась чувствительность пространственного положения пролёта к перемен-

ным ветровым нагрузкам, которые над реками представляются явлениями обычными. Усиление ветра вызывало колебания с амплитудой до полутора метров. Озадачились. Разработали целую систему «действенных» мер в виде введением дополнительного ограничения степеней свободы отдельных элементов конструкции и установкой дополнительных гидравлических демпферов на пилонах (конструкции, подобные автомобильным амортизаторам).

Несмотря на принятые меры, 7 ноября 1940 г. с самого утра, с 8 часов, обнаружили незначительные вертикальные изгибные многоузловые колебания пролёта на частоте 0,6 Гц, при этом ветер имел скорость 17 м/с. Кроме того, наблюдение за мостом, включая непрерывную киносъёмку и фотографирование, обнаружили, что при усилении ветра в 10 часов до 18,7 м/с начали проявляться одноузловые изгибно-крутильные колебания с частотой порядка 0,2 Гц со значительными амплитудами. Когда амплитуда закручивания достигала максимума, проезжая часть моста имела наклон к горизонту 45^0 . Такое истязание конструкции продолжалось около часа, затем при очередном порыве ветра большой участок проезжей части полотна отломился и упал в реку.

Крушение Такомоского моста стало знаменитым, потому что произошло в день его официального открытия при стечении почтенной публики и средств массовой информации, в частности киносъёмщиков, которые плёнки не пожалели и запечатлели все особенности поведения конструкции в течение более чем двух часов. Эта плёнка, разумеется, была бесценным материалом для учёных и конструкторов. Сразу после просмотра фрагментов скорбного фильма Т. Карман, обнаруживший периодическую вихревую структуру за поперечно обтекаемыми телами (рис. 4.25) опубликовал через две недели после катастрофы результаты своих расчетов критической скорости дивергенции применительно к Такомоскому мосту. Теоретическое значение скорости дивергенции оказалась равной 22,2 м/с. Стало ясно, что причинами разрушения стали аэродинамические эффекты. Было установлено, что циклическая частота срыва вихрей для цилиндрических элементов конструкции подчиняется уравнению

$$\omega_v = \frac{0,22v}{2\pi D} c^{-1}, \quad (4.40)$$

где v – скорость потока в м/с, D – диаметр цилиндра в м., коэффициент 0,22 представляет собой число Струхала для данного типа обтекаемой конструкции. Закон изменения вертикальной периодической силы, вызванной сходом вихрей можно принять в виде

$$F_v = c_k \frac{\rho v^2}{2} S \sin \omega_v t, \quad (4.41)$$

где S – площадь проекции обтекаемого тела на плоскость, перпендикулярную направлению потока, c_k – коэффициент формы, для цилиндра равный единице. Чем более плохообтекаемо тело, тем величина c_k – больше. Таким образом, было установлено, что причиной катастрофы Такомоского моста стал срывной флаттер.

Срывной флаттер был причиной разрушений не только висячих мостов. Описан случай, когда высокая заводская труба высотой 90 м. при скорости ветра 80 км/час практически мгновенно раскачалась и рухнула. У некоторых дымовых труб флаттер не приводил к раскачиванию ствола: ось трубы сохраняла своё вертикальное положение, а оболочка «дышала», изменяя форму своего поперечного сечения [12]. Зрелище, как утверждают очевидцы, не для слабонервных. Способ предотвращения автоколебаний труб оказался на удивление простым. На поверхности трубы располагали спиральные стержневые насадки, которые изменяли условия отрыва вихрей, предотвращая тем самым срывной флаттер.

Не обошёл срывной флаттер «своим вниманием» конструкции, перемещающиеся в воде. Известны случаи интенсивных колебаний перископов подводных лодок даже при относительно малой скорости их движения около 8 км/час. Экипажи отмечали, что вначале наблюдалось размытие изображения, а затем, при увеличении скорости движения перископ приходил в негодность.

Срывной панельный флаттер был причиной разрушения лопаток высокоскоростных турбин турбореактивных авиационных двигателей, когда при высоких скоростях движения возникали высокоинтенсивные колебания лопаток.

Периодическое отделение вихрей с кормовой части обтекаемого тела порождает наряду с вертикальной составляющей периодической силы и горизонтальную составляющую, дейст-

вующую на тело в направлении потока. Отклонение конструкции от статического положения приведёт к возникновению крутящего момента, зависящего от времени. Переменные во времени величины, по сути, являются параметрическими и при определённых условиях могут усиливать колебательные процессы путём организации наряду с колебаниями изгиба в вертикальной плоскости, колебаний кручения. Исследователями отмечаются случаи, когда срывной флаттер по схеме параметрического резонанса, о котором будет сказано ниже, возникал при чисто крутильных колебаний, без вертикальных периодических прогибов.

5. Параметрические колебания

5.1. Введение

Рассмотренные ранее случаи возникновения и протекания колебаний были характерны тем, что проявляющиеся в процессе движения силы, можно было отнести к одной из трёх категорий. Во-первых, встречались, так называемые, позиционные силы, величина которых зависит от положения тела, на которое они действуют. К позиционным силам относится большинство восстанавливающих сил, которые зависят, по большому счёту, только от обобщённых координат q_j . Диссипативные силы, как правило, являются однозначными функциями обобщённой скорости $\dot{q}_j$, вынуждающие силы, в большинстве своём, зависели от времени. Существует, однако, особый класс сил, которые в явном виде зависят от координат и времени одновременно

$$Q_j = Q_j(q_1, q_2, \dots, q_s, t) \quad (j = 1, 2, 3, \dots, s), \quad (5.1)$$

причём эти силы нельзя представить в виде некой суммы величин отдельно зависящих от координат и отдельных величин, зависящих только от времени.

В простейшем случае, для системы с одной степенью свободы для малых отклонений от положения равновесия обобщённая сила такого типа определяется уравнением

$$Q = -kq = k(t)q, \quad (5.2)$$

где $k(t)$ – коэффициент упругости, зависящей от времени. В этом случае дифференциальное уравнение движения представится в виде

$$\tilde{m}\ddot{q} + k(t)q = 0, \quad (5.3)$$

где $\tilde{m}$ – обобщённая масса. Поделим уравнение (5.3) на обобщённую массу

$$\ddot{q} + \frac{k(t)}{\tilde{m}}q = \ddot{q} + \psi(t)q = 0, \quad (5.4)$$

где $\psi(t)$ – переменный коэффициент. Решение уравнения (5.4) существенно отличается от аналогичного уравнения свободных колебаний с постоянным коэффициентом упругости. Достаточно часто на практике встречаются случаи периодического изменения параметра

$$\psi(t + T) = \psi(t). \quad (5.5)$$

Колебания, возникающие в присутствии изменяющихся во времени параметров называются **параметрическими**. Параметрические колебания, как правило, либо происходят с фиксированными амплитудами, либо амплитуды увеличиваются во времени. Вторая ситуация получила название **параметрического резонанса**. Параметрический резонанс имеет необычные свойства и на много опаснее. Таким образом, параметрические колебания характеризуются тем, что энергия поступает в систему за счёт изменения какого-либо параметра, при условии совершения работы. Эффект параметрического возбуждения колебаний наблюдается только в тех случаях когда изменение параметра имеет определённую частоту и должным образом фазировано относительно движения системы. Простейшим примером параметрической колебательной системы являются качели (рис. 5.1). Для того чтобы увеличить амплитуду колебаний качающегося достаточно «правильно» поднимать и опускать свой центр тя-

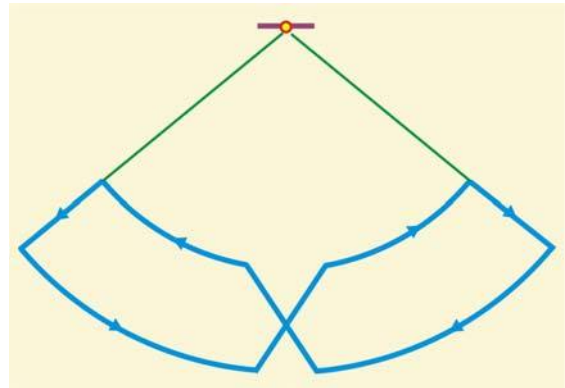


Рис. 5.1. Параметрическое возбуждение

жести, приседая и вставая. Достаточно присесть в крайних положениях и встать, когда приходится нижнее положение статического равновесия. Центр тяжести при этом опишет траекторию, показанную на рисунке. Следует оговориться, что если человек станет приседать и вставать на неподвижных качелях, находящихся в положении статического равновесия, то колебания не возникнут, потому что работы при этом не совершается. Работа, затрачиваемая при подъёме, возвращается системе при опускании. Известно, что работа при перемещении любого тела в поле силы тяжести по замкнутой траектории эквивалентна нулю. Другое дело, если качели немного раскачать, например, оттолкнувшись от тверди земной, а потом уже синхронно присесть и встать. Это даст результат. Распрямляясь на движущихся качелях, человек развивает некоторое усилие, пропорциональное нормальному ускорению (траектория движения качелей представляет собой часть окружности, т.е. явно криволинейная) и совершает соответствующую работу. Поскольку нормальное ускорение зависит от квадрата скорости

$$a_n = \frac{v^2}{r}, \quad (5.6)$$

то максимум ускорения будет иметь место в средней точке траектории, где вся запасённая потенциальная энергия преобразуется в кинетическую энергию. В крайних точках скорость равна нулю (изменяется направление движения), следовательно и $a_n = 0$. С позиций теоретической механики приседание и вставание изменяет положение центра тяжести, а следовательно и величину момента инерции J_z относительно оси вращения, причём

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = 0, \quad (5.7)$$

где ω – угловая скорость. Изменение момента инерции должно неминуемо приводить к изменению угловой скорости, следовательно, и к изменению линейной скорости. В качестве модели колебательной системы можно рассматривать качели с приседающим периодически человеком как физический маятник с изменяющейся длиной подвеса.

Другим классическим примером параметрических колебаний является знаменитый опыт, поставленный профессором Мельде в 1859 г. Натянутая струна одним концом крепилась к неподвижной горизонтальной опоре, а вторым концом к ножке камертона (рис.5.2). При колебаниях камертона струна периодически изменяла своё натяжение в соответствии с собственной частотой колебаний камертона. В струне возникали параметрические колебания, при которых **периодически изменяемым параметром является натяжение струны**.

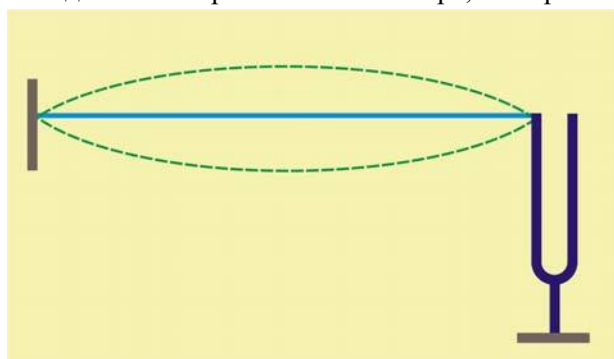


Рис. 5.2. Опыт Мельде

Как случай возбуждения колебаний качелей, так и струны, можно отличить от прочих вариантов гармонических движений. Дело в том, что рассматриваемые колебательные процессы происходят под действием периодических механических

сил, проявляющихся в направлениях, перпендикулярных направлению основного движения. Эти силы непосредственно не могут совершать механической работы, однако их энергетическое проявление, т.е., работа, совершается и вводится в систему, осуществляется посредством изменения параметров системы. Кроме того, немаловажен тот факт, что **частота изменения параметров ровно в два раза выше частоты возбуждаемых колебаний**. Такое соотношение не единственное, отношение частоты параметрических колебаний к частоте изменения параметра может быть равно: 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{2}{5}$ и т.д. Однако на опыте параметрические колебания легче всего возбуждаются при соотношении частот, равном $\frac{1}{2}$ [7].

5.2. Колебания вблизи равновесного положения

Получим дифференциальное уравнение типа (5.4) для следующей простой колебательной системы. Шарнирно закреплённая в центре абсолютная балка опирается на опоры одинаковой жёсткости c (рис. 5.3). На балку действуют горизонтальной периодической силой $F_p(t)$, задаваемой в виде периодической функции времени [4]. При отклонении положения балки от равновесия на малые углы на неё начинает действовать момент сил упругости $-c\varphi l^2$ и момент переменной горизонтальной силы $F(t)\varphi l$. Главный момент, действующий на балку, в данном случае целесообразно принять в качестве обобщённой силы

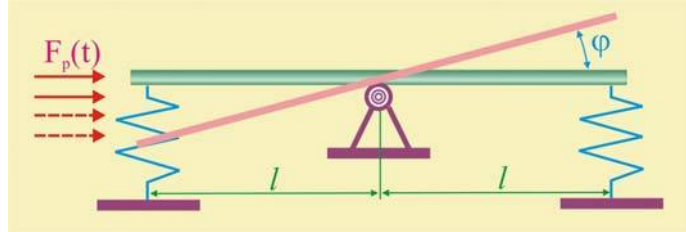


Рис. 5.3. Симметричная жёсткая балка

$$M = -\{c\ell - F(t)\}\varphi\ell, \quad (5.8)$$

которая, как видно из последнего уравнения, одновременно зависит от угла φ и времени t . Дифференциальное уравнение вращательного движения представится в виде

$$-\{c\ell - F(t)\}\varphi\ell = J\ddot{\varphi},$$

(5.9)

где J – момент инерции балки относительно оси вращения, проходящей через точку шарнирного крепления перпендикулярно плоскости чертежа. Уравнение (5.9) преобразуем к виду стандартного уравнения (5.4)

$$\ddot{\varphi} + \frac{c\ell - F_p(t)}{J}\ell\varphi = 0. \quad (5.10)$$

Аналогичное уравнение движения имеет математический маятник с колеблющейся в вертикальном направлении точкой подвеса (рис. 5.4). Если длина маятника l , а масса груза маятника m , то дифференциальное уравнение малых относительных колебаний можно записать в виде

$$(-mg - m\ddot{y})\ell\varphi = m\ell^2\ddot{\varphi}, \quad (5.11)$$

где $-m\ddot{y}$ – переносная сила инерции. Преобразуем записанное уравнение к виду

$$\ddot{\varphi} + \frac{g + \ddot{y}(t)}{\ell}\varphi = 0. \quad (5.12)$$

Уравнения (5.10) и (5.12) сходны по структуре, их решение позволяет судить об устойчивости состояния равновесия. Принято считать, что если, возникшие параметрические колебания постепенно затухают, то системы следует рассматривать как устойчивые. Если же единожды возникшие параметрические колебания развиваются с возрастанием амплитуды в режиме параметрического резонанса, то состояние равновесия неустойчиво и главным при решении уравнений является установления тенденций параметрических колебаний.



Рис. 5.4. Колеблющаяся точка подвеса

5.3. Колебания в окрестностях стационарного режима движения

Помимо устойчивости положения равновесия встречаются интересные случаи неустойчивости стационарных режимов движения. Если охарактеризовать движение некой системы в виде зависимости обобщённой координаты от времени $q = q(t)$, то нарушение стационарности движения определится в виде $q = q(t) + \delta q(t)$, где $\delta q(t)$ – изменение обобщённой координаты в виде изменения обобщённой координаты. Если с течением времени функция $\delta q(t)$ возрастает, то для неё можно получить аналитическую зависимость в виде уравнения. Рассмотрим методику получения и решения уравнений на примере колебательной системы с нелинейной восстанавливающей силой (рис. 1.18). Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний системы с нелинейной восстанавливающей силой записывается обычно в следующем виде [4]

$$\tilde{m}\ddot{q} + F(q) = Q(t), \quad (5.13)$$

где $\tilde{m}$ – обобщённая масса, $F(q)$ – восстанавливающая сила, $Q(t)$ – внешняя возмущающая сила. Далее принимается, что $F(q)$ и $Q(t)$ как заданные функции координат и времени. Уравнение (5.13) имеет неоднозначные решения, которые характеризуют несколько стационарных решений с амплитудами

$$q_1 = q_1(t), \quad q_2 = q_2(t), \quad q_3 = q_3(t), \quad (5.14)$$

которые в рассматриваемой системе реализуются физически. Выделим из набора стационарных решений одно, например, $q_1 = q_1(t)$. Колебания вблизи стационарного режима представятся в виде суммы $q_1 + \delta q_1$, где δq представляет вариацию функции q_1 , т.е. возмущение основного режима движения. Таким образом, по поведению вариации δq можно будет судить об устойчивости стационарного режима. Если выясняется, что при $t \rightarrow \infty$ исследуемая вариация $\delta q \rightarrow 0$, или остаётся ограниченной, то возмущённое движение, в конце концов, вернётся к обычным вынужденным колебаниям со стационарной амплитудой. Обратно же, в случае неограниченного возрастания вариации во времени, данный стационарный режим колебаний является неустойчивым.

Решение $q_1(t)$ должно удовлетворять уравнению (5.13)

$$\tilde{m}\ddot{q}_1 + F(q_1) = Q(t). \quad (5.15)$$

Такому же уравнению должна удовлетворять функция $q_1 + \delta q_1$

$$\tilde{m}\ddot{q}_1 + \tilde{m}\delta\ddot{q}_1 + F(q_1 + \delta q_1) = Q(t). \quad (5.16)$$

Для малых величин изменения δq_1 справедливо приближение

$$F(q_1 + \delta q) \approx F(q_1) + F'(q_1)\delta q_1, \quad (5.17)$$

где $F'(q_1)$ – производная по обобщённой координате q_1 . С учётом (5.17) уравнение (5.16) переписывается в виде

$$\tilde{m}\ddot{q}_1 + \tilde{m}\delta\ddot{q}_1 + F(q_1) + F'(q_1)\delta q_1 = Q(t). \quad (5.18)$$

Вычтем уравнение (5.15) из уравнения (5.18)

$$\tilde{m}\delta\ddot{q}_1 + F'(q_1)\delta q_1 = 0. \quad (5.19)$$

В данном случае величина $F'(q_1)$ является функцией времени, т.к. от времени зависит основная величина q_1 . Примем, что действующие силы заданы уравнениями

$$\left. \begin{aligned} F(q) &= \beta q^3, \\ Q(t) &= H \sin \Omega t. \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

Основные колебания, при этом, будут происходить по закону

$$q_1 = A_1 \sin \Omega t.$$

Производная по координате представится следующим образом

$$F'(q) = 3\beta q_1^2 = 3\beta A_1^2 \sin^2 \Omega t. \quad (5.21)$$

Для вариации координат стационарного режима движения справедливо следующее дифференциальное уравнение

$$\tilde{m}\delta\ddot{q} + (3\beta A_1^2 \sin^2 \Omega t)\delta q = 0, \quad (5.22)$$

которое структурно полностью соответствует соотношению (5.4). Интегрирование уравнений такого типа для произвольного вида функции $\Psi(t)$ возможно стандартными методами только для ограниченного вида функций: когда изменение параметра следует закону прямоугольного синуса или тригонометрического синуса (рис. 5.5)

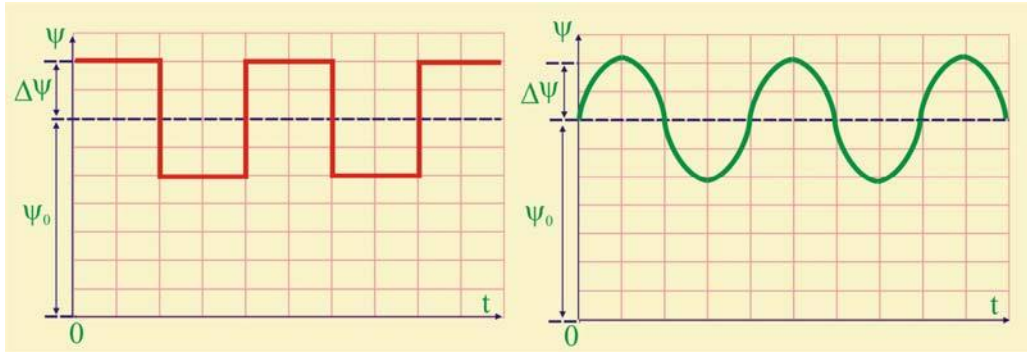


Рис. 5.5. Синусоидальные законы изменения параметра

Рассмотрим в начале случай изменения параметра по закону прямоугольного синуса в отсутствие диссипативных потерь. Пусть

$$\psi = \psi_0 \pm \Delta\psi, \quad (5.23)$$

где Ψ_0 – среднее значение изменяющегося во времени параметра, $\Delta\psi$ – глубина пульсации этого параметра. Уравнение (5.4) применительно к рассматриваемому случаю можно записать следующим образом

$$\ddot{q} + k_0^2(1 \pm \mu)q = 0, \quad (5.24)$$

где $k_0^2 = \psi_0$, $\mu = \Delta\psi/\psi_0$.

Период изменения параметра можно представить как $T = 2\pi/k_0$.

Перепишем уравнение (5.24) в виде двух соотношений, справедливых для двух полупериодов изменения параметра $0 < t < T/2$ и $T/2 < t < T$

$$\ddot{q}_1 + k_0^2(1 + \mu)q_1 = 0, \quad (5.25)$$

$$\ddot{q}_2 + k_0^2(1 - \mu)q_2 = 0. \quad (5.26)$$

Эти уравнения с постоянными коэффициентами имеют решения вида [4]

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= C_1 \sin k_1 t + D_1 \cos k_1 t, \\ q_2 &= C_2 \sin k_2 t + D_2 \cos k_2 t, \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

где $k_1 = k_0 \sqrt{1 + \mu}$, $k_2 = k_0 \sqrt{1 - \mu}$. Постоянные интегрирования, как обычно, определяются из особых условий. Так, например, для момента времени $t = T/2$ можно записать следующие соотношения для обобщённой координаты и скорости

$$q_1\left(\frac{T}{2}\right) = q_2\left(\frac{T}{2}\right), \quad \dot{q}_1\left(\frac{T}{2}\right) = \dot{q}_2\left(\frac{T}{2}\right), \quad (5.28)$$

что, в свою очередь позволяет сформировать следующую систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} C_1 \sin \frac{k_1 T}{2} + D_1 \cos \frac{k_1 T}{2} &= C_2 \sin \frac{k_2 T}{2} + D_2 \cos \frac{k_2 T}{2}, \\ k_1 \left(C_1 \cos \frac{k_1 T}{2} - D_1 \sin \frac{k_1 T}{2} \right) &= k_2 \left(C_2 \cos \frac{k_2 T}{2} - D_2 \sin \frac{k_2 T}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

Из уравнений (5.29) следует, что по истечении рассматриваемого периода обобщённая координата и обобщённая скорость изменяются в λ раз

5.4. Примеры анализа устойчивости колебательных систем

В качестве примера определения областей устойчивости рассмотрим маятник (рис. 5.4) с колеблющейся точкой подвеса. Маятник с массой груза $m = 0,1$ кг и длиной невесомого стержня $l = 0,5$ м совершает вертикальные колебания при периодическом изменении длины подвеса по закону $y_1 = y_0 \sin \Omega t$, где $\Omega = 10$ рад/с, $y_0 = 0,01$ м.

Для составления дифференциальных уравнений движения изобразим силы, действующие на грузик маятника в неподвижной декартовой системе координат (рис. 5.7) $\{xO_1y\}$

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= -N \sin \varphi, \\ m\ddot{y} &= N \cos \varphi - mg. \end{aligned} \right\} \quad (5.37)$$

Выразим из первого уравнения системы (5.37) силу натяжения стержня N

$$N = -\frac{m\ddot{x}}{\sin \varphi}, \quad (5.38)$$

и подставим это значение во второе уравнение системы

$$m\ddot{y} = -\frac{m\ddot{x}}{\sin \varphi} \cos \varphi - mg, \quad (5.39)$$

или

$$m(\ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi) = -mg \sin \varphi. \quad (5.40)$$

Координаты груза маятника можно представить как функции угла отклонения φ и вертикального смещения y_1

$$\left. \begin{aligned} y &= l - l \cos \varphi + y_1, \\ x &= l \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (5.41)$$

Вычислим далее вторые производные по времени уравнений системы (5.41) с учётом того, что $y_1 = y_0 \sin \Omega t$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y} &= l(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) - y_0 \Omega^2 \sin \Omega t; \\ \ddot{x} &= l(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (5.42)$$

Подставим уравнения (5.42) в уравнение (5.40), полагая колебания малыми, для которых возможно считать, что $\cos \varphi \cong 1$, $\sin \varphi \cong \varphi$, $\varphi^2 \cong 0$

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{l} - \frac{y_0 \Omega^2}{l} \sin \Omega t \right) \varphi = 0. \quad (5.43)$$

Полученное уравнение приводится к уравнению Матье

$$\frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} + (a + 2q \cos 2\tau) \varphi = 0, \quad (5.44)$$

если положить

$$a = \frac{4g}{\Omega^2 l}; \quad \tau = \frac{\Omega t}{2}; \quad 2q = \frac{4y_0}{l}. \quad (5.45)$$

Как было показано ранее, в зависимости от значений параметров (5.45) рассматриваемая колебательная система может либо совершать затухающие колебания, не реагируя на изменение длины подвеса, либо вследствие параметрического резонанса достигать больших углов отклонения. На рис. 5.8 приведена диаграмма, полученная Айнсом – Стреттом по которой возможно определить, будет ли при заданных параметрах маятник устойчив. В рассматриваемом случае интересующие нас величины примут следующие значения

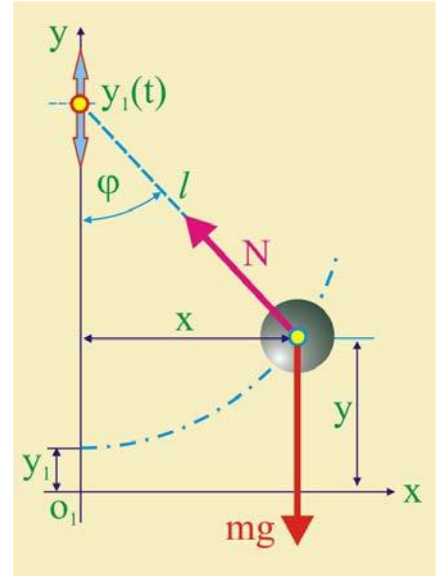


Рис. 5.7. Силы, приложенные к грузу маятника

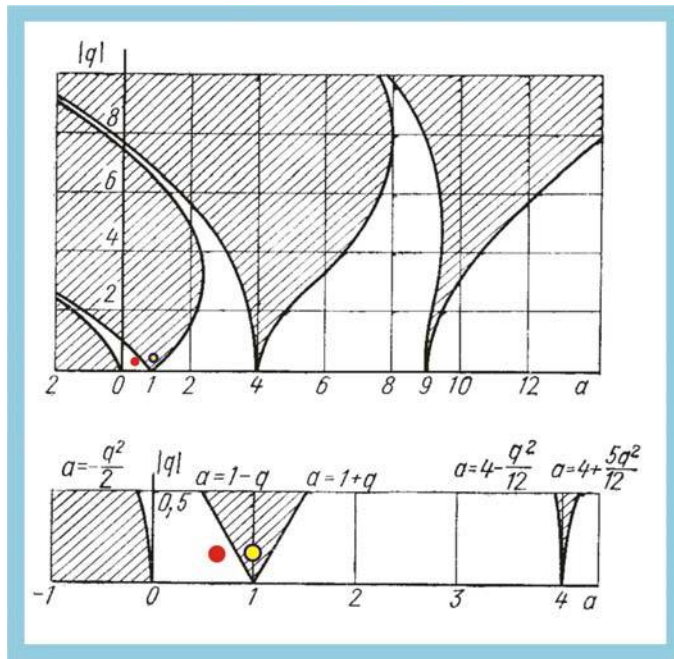


Рис. 5.8. Диаграмма Айнса – Стретта

Параметрические колебания могут возникать не только в механических системах. В принципе параметрический резонанс возможен в системах, где кинематические, динамические или какие-либо иные параметры повторяются через определённый промежуток времени. Простейшей системой, где параметрические колебания возможны, является колебательный RLC – контур, у которого периодически изменяется величина ёмкости или индуктивности. На рис. 5.9 приведена схема колебательного контура, в котором периодически изменяется электрическая ёмкость.

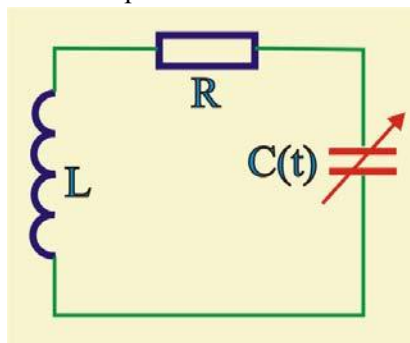


Рис. 5.9. Колебательный контур

Если зарядить предварительно конденсатор, то при замыкании его на индуктивность, то начнётся процесс преобразования энергии электрического поля в энергию магнитного поля и далее наоборот

$$\frac{CU^2}{2} \Leftrightarrow \frac{Li^2}{2}. \quad (5.48)$$

Изменяя далее периодически ёмкость конденсатора можно добиться параметрического резонанса, причём энергия в систему будет поступать за счёт работы, совершаемой при изменении ёмкости. Для плоского воздушного конденсатора с площадью параллельных пластин S и расстоянием между пластинами d_0 ёмкость определяется уравнением

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d_0 \sin \Omega t}. \quad (5.49)$$

Изменять ёмкость возможно, изменяя расстояние между пластинами, т.е. преодолевая силу притяжения между ними. Напряжённость поля между пластинами не зависит от расстояния между ними. Предположим, что, бесконечно близко расположенные друг к другу пластины несут на себе разноименные электрические заряды $\pm Q$. Энергия такой системы будет нулевой т.к. заряды компенсируют друг друга, будучи одинаковыми, по модулю и противоположными по знаку. Если попытаться отодвинуть одну из пластин, то возникнет сила Кулона, равная произведению заряда на напряжённость, которая будет равна половине общей напряжённости, т.к. сила обусловлена действием неподвижной пластины

$$F = QE_2 = \frac{Q\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{Q^2}{2s\epsilon_0}, \quad (5.50)$$

$$a \cong \frac{4 \cdot 10}{100 \cdot 0,5} \cong 0,8, \quad (5.46)$$

$$q = \frac{2y_0}{\ell} = \frac{0,02}{0,5} \cong 0,04. \quad (5.47)$$

Как видно из полученных данных при заданных условиях система будет находиться в устойчивом состоянии (положение на диаграмме Анса – Стретта отмечено красной точкой) и в параметрический резонанс впадать не будет. Чтобы система стала неустойчивой достаточно изменить одно из соотношений (5.46), (5.47). Так, например, если частоту колебаний точка подвеса уменьшить до 8,94 рад/с, то $a \cong 1$, и параметрический резонанс станет возможен. На диаграмме это новое состояние будет характеризоваться точкой, лежащей в заштрихованной области (светлая точка).

где s – площадь пластин, σ – поверхностная плотность зарядов на пластинах. При перемещении пластин на расстояние d будет совершена работа $A = Fd$, что позволяет определить величину энергии в виде

$$W = Fd_0 \sin \Omega t = \left(\frac{Q^2}{2} \right) \frac{d_0 \sin \Omega t}{\varepsilon_0 S}. \quad (5.51)$$

Естественно предположить, что энергия конденсатора сосредоточена в объёме, расположенном между его обкладками, в этом случае каждую единицу объёма имеет смысл рассматривать с энергетических позиций. Запишем уравнение электрической энергии плоского конденсатора и выделим в нём в явном виде объём V

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 s}{2d_0 \sin \Omega t} (Ed_0 \sin \Omega t)^2 = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} V(t), \quad (5.52)$$

где $s \cdot d = V$ – объём пространства между обкладками конденсатора.

Дифференциальное уравнение типа Матье (5.44) в данном случае запишется следующим образом [7]

$$\ddot{y} + 4 \left\{ \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} + \frac{\omega_0^2}{\Omega^2} n \cos 2\tau \right\} y = 0, \quad (5.53)$$

где $\omega_0^2 = 1/LC_0$, $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2$. Условие возбуждения параметрических колебаний можно выразить уравнением

$$\chi = \frac{2\beta}{\Omega} < \mu. \quad (5.54)$$

Значения коэффициентов (5.46), (5.47) представятся следующим образом

$$(5.55) \quad \left. \begin{aligned} q &= 2n \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}; \\ a &= \frac{4\omega_1^2}{\Omega^2}. \end{aligned} \right\}$$

Если активное сопротивление R невелико, то собственные колебания незначительно будут отличаться от затухающих колебаний, т.е.

$$a \cong \frac{4\omega_0^2}{\Omega^2}. \quad (5.56)$$

Проще всего параметрические колебания, таким образом, будут возбуждаться на частоте, равной половине частоты изменения ёмкости. Пусть $\mu = q/2$, тогда уравнение (5.54) переписывается следующим образом

$$\frac{2\beta}{\Omega} < \frac{q}{2} = n \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}, \quad (5.57)$$

или после преобразования

$$\frac{2\beta}{\Omega} = \frac{d\omega_0}{\Omega} < \frac{n\omega_0^2}{\Omega}. \quad (5.58)$$

В этом случае для $\Omega \cong 2\omega_0$, окончательное условие возбуждения примет вид

$$n > 2d. \quad (5.59)$$

Естественно, что чем меньше затухание в контуре, тем можно ограничиться меньшими относительными изменениями ёмкости, т.к.

$$n = \frac{C_1}{C_0}. \quad (5.60)$$

Приведенные данные показывают, что параметрические колебания будут протекать на частоте вдвое меньшей частоты изменения параметра, что делает перспективным их применение для создания низкочастотных колебательных систем, у которых традиционные способы понижения рабочей частоты приводят к конструктивным или габаритным трудностям.

5.5. Случайные колебания

Рассматривая вынужденные колебания, мы полагали, что возбуждающая сила имеет периодический закон изменения, или имеет известный закон изменения во времени. В реальных колебательных системах колебания зачастую возбуждаются случайными воздействиями.

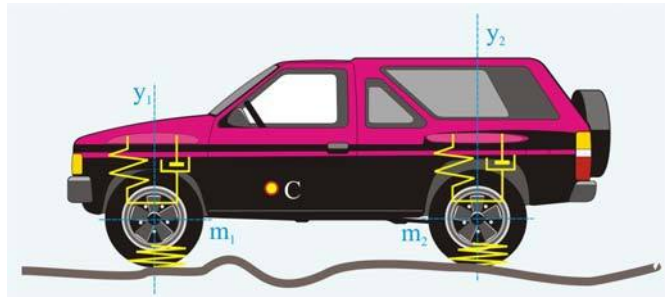


Рис.5.10. Колебательная система автомобиля

Так, например, строительные конструкции, элементы судового рангоута и такелажа и т.д. подвергаются ветровым нагрузкам, изменяющимся случайным образом. Выполняя соответствующие расчёты, конструкторы вынуждены пользоваться только статистическими сведениями. Распространённым проявлением случайных колебаний являются колебания транспортных машин, вызы-

ваемые неровностями дороги. Дороги, вообще-то, бывают разные, но далее речь пойдёт именно о привычных для нас, городских «автобанах». Автомобиль, с точки зрения теории колебаний (рис.5.10), в первом приближении можно представить как некую массу, снабжённую упругими элементами (ресоры, пружины, элементы торсионной подвески) и демпфирующими устройствами (амортизаторные стойки устройствами).

Неровности дороги будут вызывать смещение кузова автомобиля в вертикальной и горизонтальной плоскости. Рассмотрим колебания центра масс автомобиля C только в вертикальной плоскости. Следует отметить, что перемещения передней y_1 и задней y_2 подвески автомобиля во многом автономны и зависят как от профиля дороги, так и от конструктивных особенностей, а так же от режима загрузки автомобиля. Автомобиль, как и всякая колебательная система с распределёнными параметрами имеет несколько резонансов. Самым неприятным для конструкции являются колебания на собственной частоте. Колебательная система, как бы настраивается на частоту собственных колебаний.

Из всего частотного спектра внешних воздействий конструкция «выбирает» именно эту частоту и начинает раскачиваться на ней с возрастающей амплитудой.

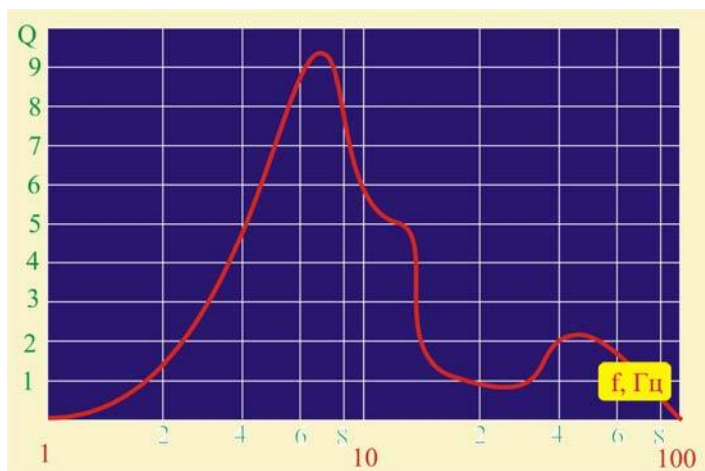


Рис.5.11 Частотная характеристика колебаний

На рис.5.11 приведена качественная частотная характеристика колебаний центра масс автомобиля. По вертикальной оси отложена относительная амплитуда колебаний, а по горизонтальной оси их частота в герцах. Автомобиль при этом перемещался по типичной грунтовке с постоянной скоростью, которая выбиралась исходя из максимума амплитуды колебаний. Обращает на себя внимание наличие ярко выраженного резонанса в области частот 6 – 9 Гц, т.е., практически, в инфразвуковом частотном диапазоне.

Существенно отметить, что колебания именно в этом частотном диапазоне наиболее опасны как для организма человека, так и для элементов конструкции: кузов, рама и т.д.

6. Суммирование колебаний

6.1. Вводные замечания

Материальные точки и тела на практике часто могут участвовать одновременно в нескольких колебательных процессах, при этом происходит их суммирование, так что мгновенные значения смещений представляются как алгебраическая сумма мгновенных значений кинематических характеристик происходящих одновременно колебательных процессов, в случае их одинаковой направленности. Если колебания происходят по разным направлениям, то результирующее колебание является результатом геометрического сложения, т.е. с учётом направления.

Как известно, колебания можно задавать в виде последовательности чисел или в виде соответствующих графиков. **Сложение колебаний и в одном и в другом случае производится для одних и тех же моментов времени с учётом знаков слагаемых величин.**

Ординаты графика рис. 6.1 получены путём последовательного сложения ординат процессов a и b для одних и тех же моментов времени. Подобным образом можно последовательно складывать произвольное число колебательных процессов. Наиболее просто процедура сложения производится для колебаний заданных относительно простыми математическими уравнениями.

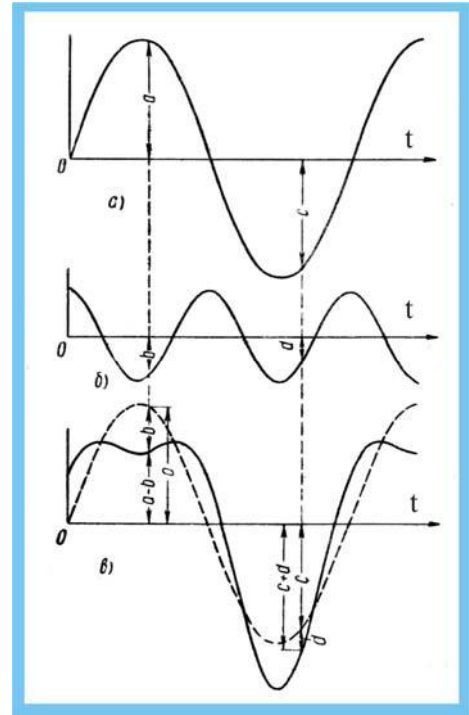


Рис. 6.1. Сложение двух колебаний одного направления [2]

6.2. Два однонаправленных колебания с одинаковыми частотами

Пусть заданы слагаемые кинематические параметры двух процессов уравнениями вида

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= S_1 \cos(\omega t + \varphi_1); \\ s_2 &= S_1 \cos(\omega t + \varphi_2); \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

где S_1, S_2 – амплитудные значения складываемых величин, φ_1, φ_2 – начальные фазы, ω – циклическая частота, по условию задачи одинаковая для обоих процессов. Удобно складывать величины, предварительно представив их в комплексной форме [2]

$$\left. \begin{aligned} \vec{s}_1 &= \vec{S}_1 e^{j\omega t} = S_1 e^{j\varphi_1} e^{j\omega t}; \\ \vec{s}_2 &= \vec{S}_2 e^{j\omega t} = S_1 e^{j\varphi_2} e^{j\omega t}. \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Сумма комплексных величин представится в виде

$$\vec{s}_1 + \vec{s}_2 = \vec{S} e^{j\omega t} = S e^{j\varphi} e^{j\omega t} = S \cos(\omega t + \varphi) + j S \sin(\omega t + \varphi), \quad (6.3)$$

причём действительная часть уравнения (6.3)

$$s = S \cos(\omega t + \varphi), \quad (6.4)$$

будет являться определяемой суммой. Величины S и φ определяются по общим правилам действий над комплексными величинами

$$\vec{s}_1 + \vec{s}_2 = \{(S_1 \cos \varphi_1 + S_2 \cos \varphi_2) + j(S_1 \sin \varphi_1 + S_2 \sin \varphi_2)\}^{j\omega t}, \quad (6.5)$$

откуда следует, что

$$S^2 = (S_1 \cos \varphi_1 + S_2 \cos \varphi_2)^2 + (S_1 \sin \varphi_1 + S_2 \sin \varphi_2)^2, \quad (6.6)$$

или

$$S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad (6.7)$$

Результирующая начальная фаза определяется уравнением

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{S_1 \sin \varphi_1 + S_2 \sin \varphi_2}{S_1 \cos \varphi_1 + S_2 \cos \varphi_2}. \quad (6.8)$$

Анализ полученных уравнений показывает, что **при сложении однонаправленных колебаний одинаковой частоты с разными амплитудами и равными циклическими частотами результирующее колебание тоже является гармоническим с амплитудой и начальной фазой, определяемым уравнениями (6.7) и (6.7).**

В случае равенства S_1 и S_2 уравнения упрощаются

$$S = 2S_1 \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}, \quad (6.9)$$

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}. \quad (6.10)$$

В случае совпадения начальных фаз, т.е. $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ или $\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi n$ колебания синфазные, следовательно

$$\left. \begin{aligned} S &= S_1 + S_2; \\ \varphi_1 &= \varphi_2 = \varphi \end{aligned} \right\}. \quad (6.11)$$

При равенстве амплитуд и начальных фаз

$$S = 2S_1 = 2S_2; \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi.$$

Если колебания находятся в противофазе, когда $\varphi_1 - \varphi_2 = (2n + 1)\pi$, то

$$S = S_1 - S_2. \quad (6.12)$$

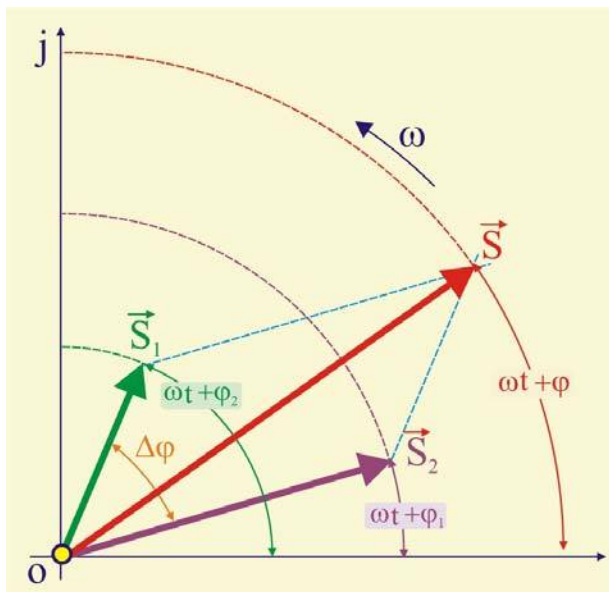


Рис. 6.2. Векторное суммирование

складываемых колебаний. Если частоты разные, то взаимное расположение векторов на диаграмме меняется во времени, векторное суммирование при этом теряет смысл.

В случае равенства амплитудных значений величин они будут взаимно уничтожаться.

Как известно, колебания можно представлять в виде вращающихся векторов, в этом случае, для какого-то момента времени мгновенное значение суммарного колебания определится проекцией вектора суммы $\vec{S}_1 + \vec{S}_2 = \vec{S}$ на действительную ось. По сути, используется правило параллелограмма, записанное посредством уравнения (6.7). Результирующее колебание отождествляется с диагональю параллелограмма, построенного для данного момента времени на амплитудных значениях складываемых переменных величин. Следует отметить, что рассматриваемый способ можно применять только при равенстве частот

6.3. Произвольное число слагаемых колебаний с равными частотами

Произвольное число колебаний происходят одновременно, причём с одинаковой циклической частотой, но с различными амплитудами и начальными фазами [2]

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= S_1 \cos(\omega t + \varphi_1); \\ s_2 &= S_2 \cos(\omega t + \varphi_2); \\ s_3 &= S_3 \cos(\omega t + \varphi_3); \\ &\dots\dots\dots; \\ &\dots\dots\dots; \\ s_n &= S_n \cos(\omega t + \varphi_n), \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

где $S_1, S_2, \dots, S_n$ – амплитуды, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ – начальные фазы, ω – циклическая частота, одинаковая для всех колебаний. На основании полученных выше данных, результирующее колебание можно представить в виде

$$s = \sum_{i=1}^{i=n} s_i = \sum_{i=1}^{i=n} S_i \cos(\omega t + \varphi_i). \quad (6.14)$$

Результирующее колебание, таким образом, можно записать следующим образом

$$s = \sum_{i=1}^{i=n} s_i = \sum_{i=1}^{i=n} S \cos(\omega t + \varphi), \quad (6.15)$$

причём результирующая амплитуда S и начальный фазовый угол будут определяться из условия тождественности уравнений (6.14) и (6.15). Приравнявая эти уравнения, получаем

$$\left. \begin{aligned} S \cos \varphi &= \sum_{i=1}^{i=n} S_i \cos \varphi_i; \\ S \sin \varphi &= \sum_{i=1}^{i=n} S_i \sin \varphi_i; \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

откуда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} S_i \sin \varphi_i}{\sum_{i=1}^{i=n} S_i \cos \varphi_i}, \quad (6.17)$$

$$S^2 = \left(\sum_{i=1}^{i=n} S_i \cos \varphi_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{i=n} S_i \sin \varphi_i \right)^2. \quad (6.18)$$

Уравнение (6.18) можно привести к виду, более удобному для последующего использования

$$S^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} S_i S_k \cos(\varphi_i - \varphi_k). \quad (6.19)$$

Процесс сложения колебаний (6.13) может быть выполнен геометрически, путём построения векторного многоугольника, когда к концу предыдущего вектора строится начало последующего вектора с соблюдением масштаба и направления. Результирующий вектор является замыкающим между началом первого слагаемого вектора и концом последнего вектора.

6.4. Колебания с различными частотами

При рассмотрении суммирования колебаний с разными частотами следует различать три характерных случая.

1. Частоты суммируемых колебаний относятся как небольшие целые числа. В этом случае результирующее колебание имеет периодический характер, результирующий период является наименьшим кратным периодов суммируемых колебаний. Форма суммарного колебания зависит от отношения частот и сдвига фаз, поэтому может быть весьма разнообразной. Дело в том, что незначительное изменение сдвига фаз существенным образом меняет форму колебаний. На рис. 6.3. (левые графики) приведены результаты суммирования колебаний с отношением частот 2:1, результирующее колебание при отношении частот 3:1 показано на правой части рис. 6.3.

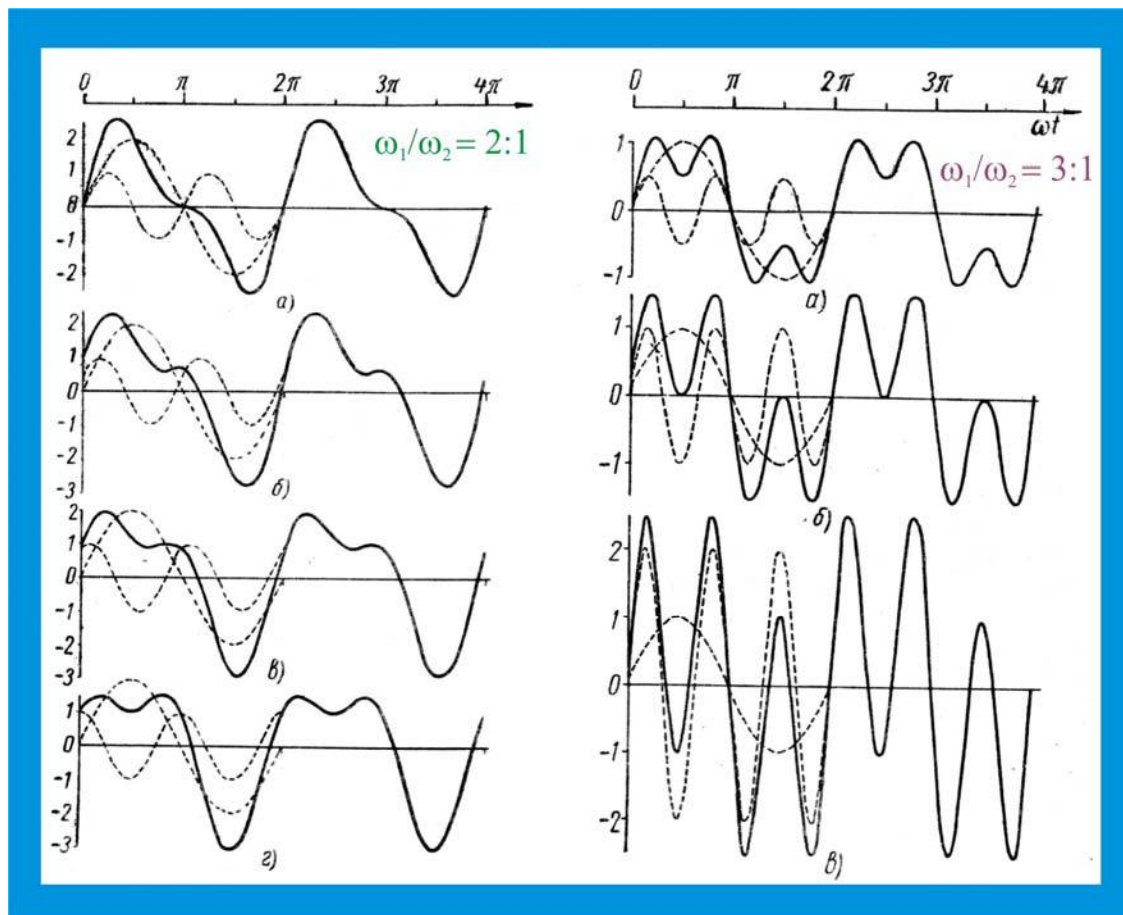


Рис. 6.3. Суммирование двух колебаний с кратными частотами 2:1 и 3:1 [2]

Левая часть рис. 6.3. иллюстрирует суммирование двух колебаний

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= 1 \sin \omega t; \\ s_2 &= 0,5 \sin(2\omega t + \varphi); \end{aligned} \right\}$$

причём: а) $\varphi = 0$; б) $\varphi = 30^\circ$; в) $\varphi = 60^\circ$; г) $\varphi = 90^\circ$.

Правая часть рисунка построена для случая

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= 1 \sin \omega t; \\ s_2 &= S \sin 3\omega t; \end{aligned} \right\},$$

при этом: а) $S = 0,5$; б) $S = 1$; в) $S = 2$.

На рис. 6.4 приведен графический результат суммирования трёх колебаний, описываемых уравнениями (случай а)

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \sin \omega t; \\ s_2 &= 0,5 \cos 2\omega t; \\ s_3 &= -0,25 \sin 3\omega t. \end{aligned} \right\}$$

Для случая б

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \sin \omega t; \\ s_2 &= 0,5 \cos 2\omega t; \\ s_3 &= 0,25 \sin 3\omega t. \end{aligned} \right\}$$

Нетрудно видеть, что даже в простейшем случае суммирования трёх колебаний с простой комбинацией параметров, результирующее колебание может иметь принципиально разные характеристики, но в любом случае форма колебаний, являясь, в общем-то, периодической, но не подчиняющейся напрямую законам косинуса или синуса. Особенно это наглядно проявляется для случая б.

2. Частота одного из суммируемых колебаний значительно превышает частоту другого. В том случае, когда амплитуда высокочастотного колебания на много превышает частоту низкочастотного колебания (на рис. 6.5 в двенадцать раз), результирующее колебание имеет форму, представленную графиком в, которая имеет место в случае, когда низкочастотное колебание меньше по амплитуде, чем колебание высокочастотное.

Если низкочастотное колебание имеет большую амплитуду (рис. 6.6.), то форма результирующего колебания отличается от предыдущего. Случай суммарного колебания (кривая в рис. 6.6) часто наблюдается при наложении на полезный сигнал низкочастотной наводки от сети

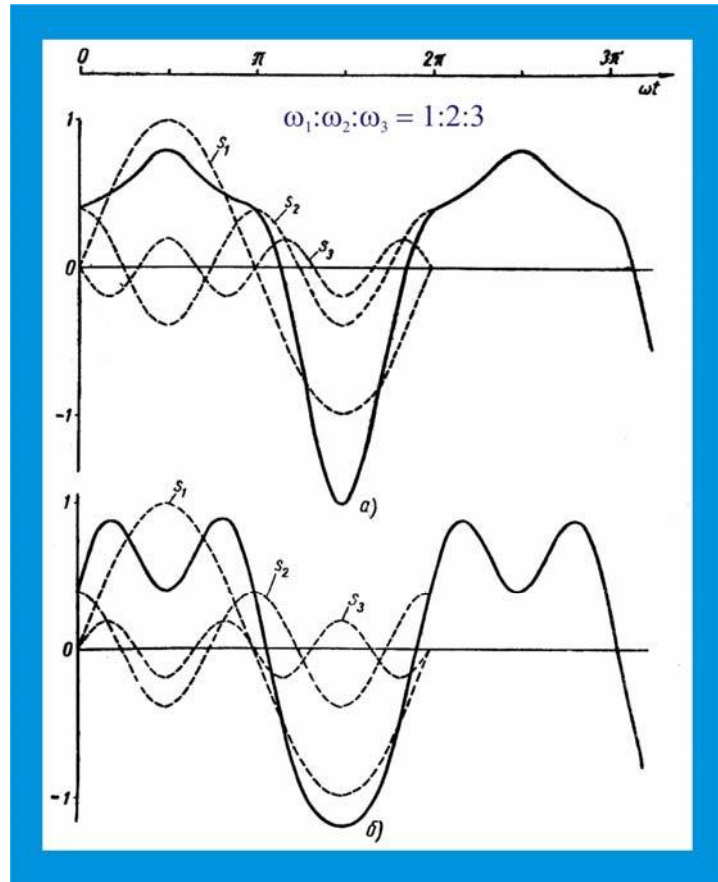


Рис. 6.4. Суммирование трёх колебаний с отношением частот 1:2:3 [2]

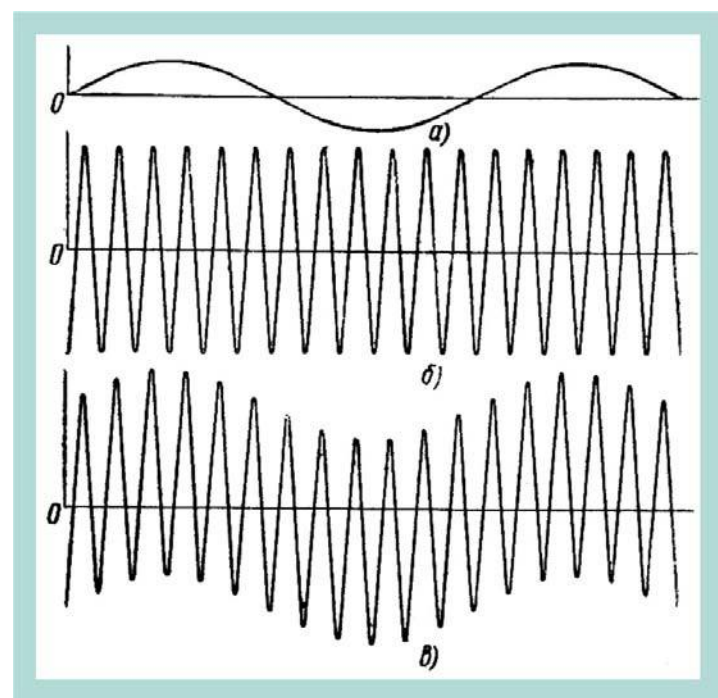


Рис. 6.5. Сложение двух колебаний с отношением частот 1:12 [2]

питания с промышленной частотой 50 Гц. Как правило это происходит при недостаточно качественной фильтрации напряжения при его преобразовании из переменного в постоянное, в этом случае наводка проникает в усилительные каскады по цепям питания.

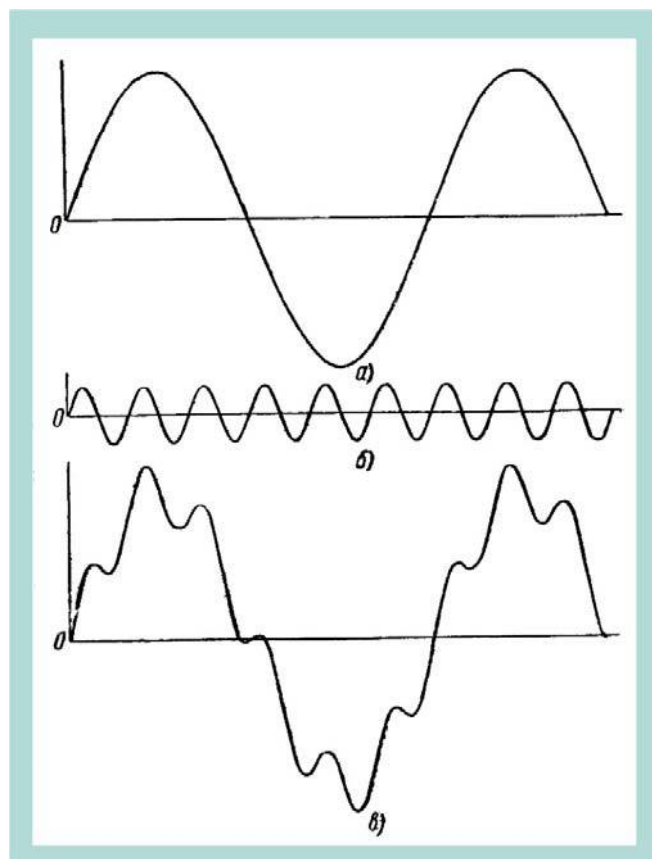


Рис. 6.6. Сложение двух колебаний с отношением частот 1:9 [2]

3. Частоты суммируемых колебаний отличаются незначительно. Этот случай называется биениями. Запишем уравнения суммируемых колебаний следующим образом

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= S_1 \cos(\omega t + \varepsilon); \\ s_2 &= S_2 \cos(\omega + \Delta\omega)t; \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

где S_1, S_2 – амплитуды суммируемых колебаний, ω и $\omega + \Delta\omega$ – циклические частоты колебаний, удовлетворяющих условию

$$\Delta\omega \ll \omega,$$

(6.21)

ε – начальная разность фаз колебаний. Соответствующим выбором начала отсчёта времени всегда можно сделать так, чтобы начальная фаза у одного из колебаний была равна нулю.

Сумма обсуждаемых колебаний запишется следующим уравнением

$$s = s_1 + s_2;$$

$$s = (S_1 \cos \varepsilon + S_2 \cos \Delta\omega t) \cos \omega t - (S_1 \sin \varepsilon + S_2 \sin \Delta\omega t) \sin \omega t.$$

Уравнение упростится, если ввести следующие обозначения

$$\left. \begin{aligned} S_1 \cos \varepsilon + S_2 \cos \Delta\omega t &= S \cos \psi; \\ S_1 \sin \varepsilon + S_2 \sin \Delta\omega t &= S \sin \psi. \end{aligned} \right\}$$

(6.22)

В этом случае результирующее колебание можно записать в виде

$$s = S \cos(\omega t + \psi). \quad (6.23)$$

Система уравнений (6.22) позволяет найти результирующую амплитуду и фазу, пользуясь следующими соотношениями

$$S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2 \cos(\Delta\omega t - \varepsilon)}, \quad (6.24)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{S_1 \sin \varepsilon + S_2 \sin \Delta\omega t}{S_1 \cos \varepsilon + S_2 \cos \Delta\omega t}. \quad (6.25)$$

Если колебания записать в виде

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= S_1 \sin(\omega t + \varepsilon), \\ s_2 &= S_2 \sin(\omega + \Delta\omega)t, \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

результирующее колебание представляется зависимостью

$$s = s_1 + s_2 = S \sin(\omega t + \psi). \quad (6.27)$$

Значение величин S и ψ определяется уравнениями (6.24) и (6.25). В эти уравнения входит время, это говорит о том, что результирующая амплитуда и фаза будут переменными, периодически изменяющимися во времени величинами. Амплитуда, к примеру, ввиду наличия в уравнении косинуса будет изменяться в пределах

$$S_{\max} = S_1 + S_2. \quad (6.28)$$

$$S_{\min} = |S_1 - S_2|. \quad (6.29)$$

Подобные периодические изменения амплитуды называются **биениями**. Название впервые появилось в акустике: при суммировании двух близких по частотам колебаний человеческое ухо, так же как и микрофоны чётко воспринимают периодическое усиление и ослабление амплитуды. Такой эффект наблюдается у двухмоторных винтовых самолётов. Участки с максимальными амплитудами называются **горбами**, с минимальными – **талиями**.

Число ν_B полных периодов изменения амплитуды в единицу времени называется частотой биений, которую в соответствии с уравнением (6.24) можно записать следующим уравнением

$$\nu_B = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = |\nu_1 - \nu_2|. \quad (2.30)$$

Периодом биений называется величина

$$T_B = \frac{1}{\nu_B} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \left| \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} \right|. \quad (2.31)$$

На рис. 6.7 приведен графический результат суммирования двух колебаний

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= 2 \cos 5t; \\ s_2 &= 1,5 \cos 6t. \end{aligned} \right\}$$

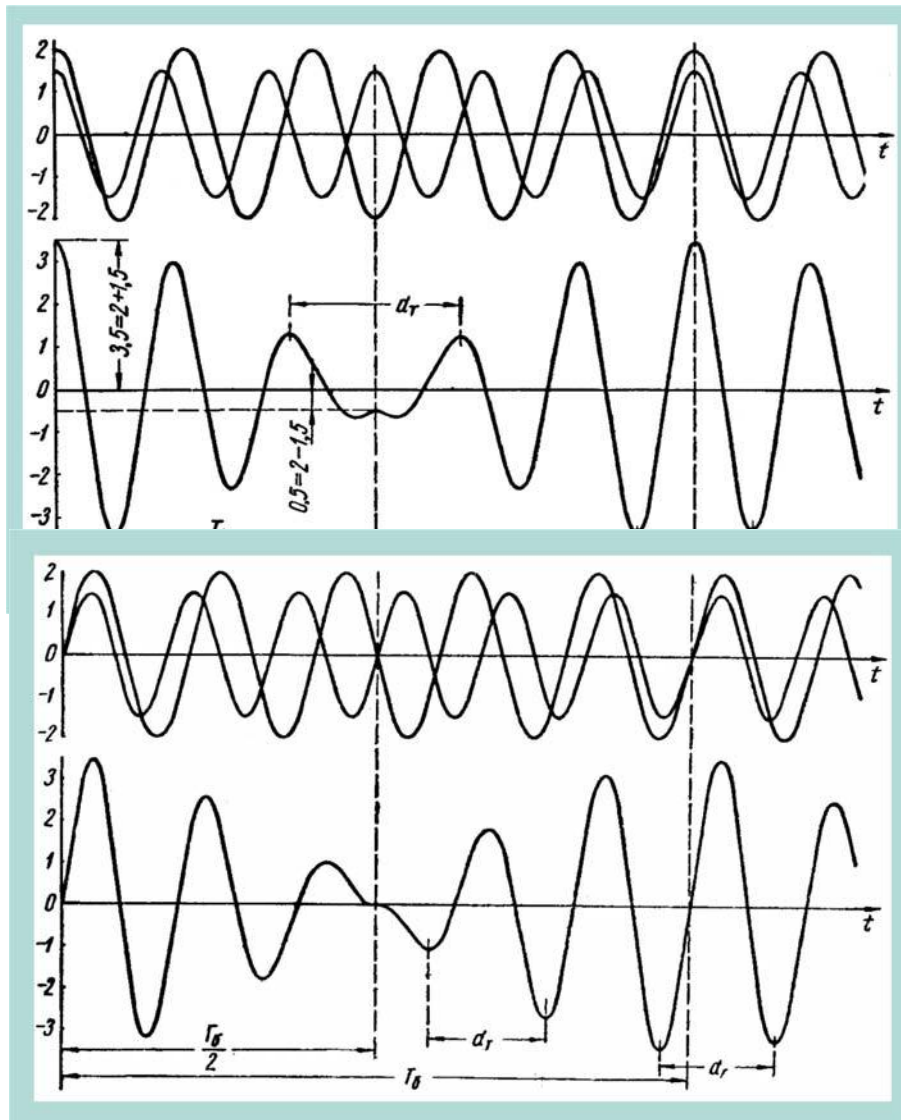


Рис. 6.8. Суммирование двух, близких по частотам колебаний с синусоидальным фазовым совпадением [2]

В зависимости от фазовых соотношений суммирование одних и тех же колебаний приводит к разному результату. На рис. 6.8 приведены результаты суммирования тех же колебаний что и на рис. 6.7. Но в первом случае исходные колебания находятся в фазе по косинусу, а во втором случае – по синусу, т.е. на рис. 6.8 представлены колебания, описываемые уравнениями

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= 2 \sin 5t; \\ s_2 &= 1,5 \sin 6t. \end{aligned} \right\}$$

Когда амплитуды суммируемых колебаний, близких по частоте, одинаковы, т.е. $S_1 = S_2$, то результирующее колебание, возможно, описать уравнением

$$s = 2S_1 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\varepsilon}{2}\right) \cos\left[\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t + \frac{\varepsilon}{2}\right].$$

(6.32)

На рис. 6.9 приведен результат суммирования двух колебаний с одинаковыми амплитудами $S_1 = S_2$

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= 2 \cos 5t; \\ s_2 &= 2 \cos 6t. \end{aligned} \right\}$$

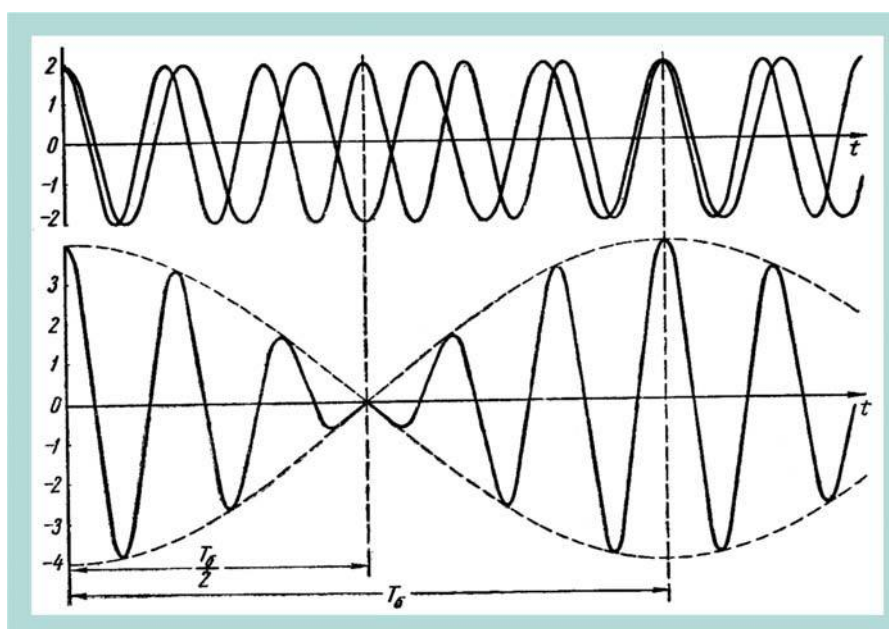


Рис. 6.9. Суммирование равноамплитудных колебаний с близкими частотами [2]

Следует отметить, что употребление терминов «периодическое изменение амплитуды» и «начальный фазовый угол» не совсем корректно, потому что ни относятся к гармоническим процессам, имеющим фиксированные значения обсуждаемых величин. Как видно из приведенных графиков, уместнее говорить о периодическом изменении размаха, потому как результирующее колебание можно считать с некоторыми оговорками близким к гармоническому, только при малом значении $\Delta\omega$, когда период биений велик, так что два соседних размаха колебаний мало отличаются друг от друга по амплитуде. Такое же несоответствие применяемой терминологии к реалиям относится и к огибающей биений. В общем случае эти огибающие не являются синусоидами, хотя визуально походят на них. Верхняя и нижняя огибающие являются зеркальными отражениями друг друга. При их характеристике применяются термины «амплитуда огибающей» и «частота огибающей». Площадь между огибающими, называется полосой биений. Максимальная ширина полосы равна $2(S_1 + S_2)$, минимальная ширина составляет $2|S_1 - S_2|$.

6.5. Суммирование взаимно перпендикулярных гармонических колебаний

Взаимно перпендикулярные колебания удобно представить как происходящие в направлении осей декартовой системы координат

$$\left. \begin{aligned} x &= X \sin \omega t, \\ y &= Y \cos \omega t, \end{aligned} \right\} \quad (6.33)$$

где x, y – мгновенные значения суммируемых кинематических характеристик суммируемых гармонических процессов, X, Y – амплитудные значения величин, ω – циклическая частота. С позиций теории, уравнения (6.33) можно рассматривать как уравнения движения, потому что они, по сути, задают координаты исследуемой точки в зависимости от времени. Чтобы получить представление о траектории движения необходимо исключить параметр – время. Если оба процесса протекают с одинаковой частотой, то это делается довольно просто. Преобразуем уравнения к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{X} &= \sin \omega t; \\ \frac{y}{Y} &= \cos \omega t. \end{aligned} \right\}$$

Возведём уравнения в квадрат и сложим

$$\left(\frac{x}{X}\right)^2 + \left(\frac{y}{Y}\right)^2 = \sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t,$$

или, окончательно

$$\left(\frac{x}{X}\right)^2 + \left(\frac{y}{Y}\right)^2 = 1,$$

т.е. траекторией является симметричный относительно осей координат эллипс. Если уравнения колебаний задать в более общем виде

$$\left. \begin{aligned} x &= X \sin(\omega t + \varepsilon); \\ y &= Y \sin \omega t. \end{aligned} \right\},$$

то так же можно прийти к уравнению эллипса с центром в начале координат, ориентированного относительно осей произвольным образом, в зависимости от разности начальных фаз ε

$$\left(\frac{y}{Y}\right)^2 + \left(\frac{x}{X}\right)^2 - \frac{2xy}{XY} \cos \varepsilon = \sin^2 \varepsilon. \quad (6.34)$$

Определим далее дискриминант δ старших членов уравнения (6.34)

$$\delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{Y^2} & -\frac{1}{XY} \cos \varepsilon \\ -\frac{1}{XY} \cos \varepsilon & \frac{1}{X^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{X^2 Y^2} \sin^2 \varepsilon. \quad (6.35)$$

Дискриминант всегда больше нуля, кроме случаев, когда $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = \pi$. При последовательном изменении сдвига фаз для колебаний одной частоты ($m:n = 1$) конфигурация эллипса будет меняться. При $\varepsilon = 0$ эллипс вырождается в прямую линию. На рис. 6.10 приведены характерные формы сложения двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний с различным отношением частот и различными значениями начального фазового угла ε горизонтального колебания в момент, когда фазовый угол вертикального колебания обращается в ноль.

Рассмотрим, что будет наблюдаться в результате суммирования двух взаимно перпендикулярных колебаний, происходящих с разными частотами.

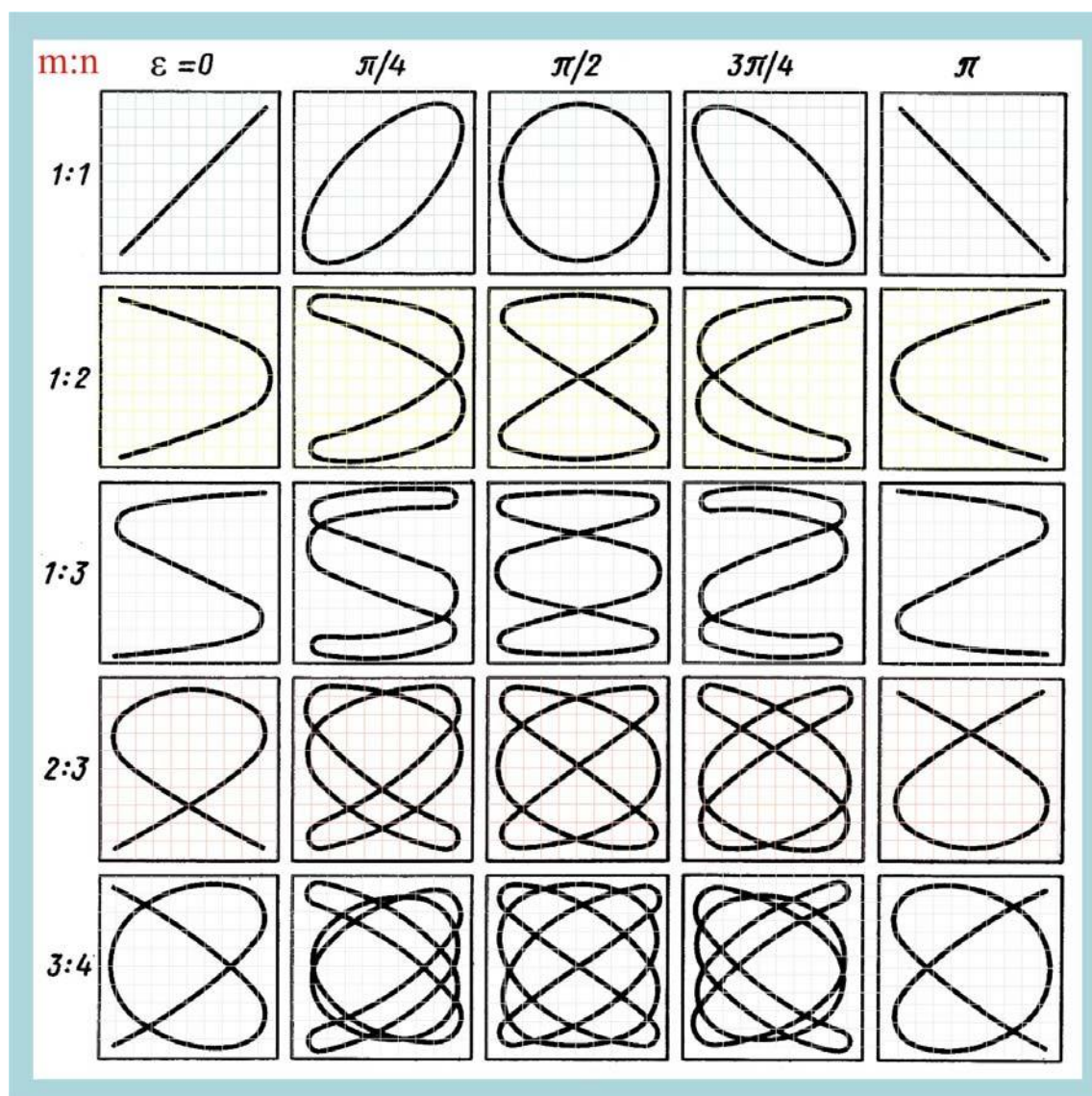


Рис. 6.10. Формы сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний с различными отношением частот $m:n$ и значениями начального фазового угла ε

В этом случае результирующее колебание представляет собой, так называемые, **фигуры Лиссажу**. Если частоты суммируемых колебаний несоизмеримы, то траектория будет замкнутой и не выходящей за пределы прямоугольника со сторонами равными удвоенным амплитудам исходных колебаний. При частотах мало отличающихся друг от друга результирующая траектория будет близка к эллипсу, непрерывно меняющему свою конфигурацию как при непрерывном изменении сдвига фаз.

7. Упругие волны

7.1. Предварительные замечания

Существование упругих волн, по большому счёту, предрекается уравнениями законов Ньютона, в частности, основным уравнением динамики [13]

$$\sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i = \frac{d(m\vec{v})}{dt}. \quad (7.1)$$

Если к торцу длинного тонкого стержня приложить в течение короткого промежутка времени силу, то торцевой слой приобретёт импульс, под действием которого он сожмётся, т.е. деформируется. Упругие силы передадут движение следующему слою стержня. Упругие силы, возникшие во втором слое, остановят движение торцевого слоя, но передадут импульс следующему слою. Таким образом, движение и деформация будут распространяться вдоль стержня, т.е. по стержню побежит упругая волна, которая будет распространять исходное возмущение по длине стержня практически без изменений. Естественно, что со временем в результате внутреннего трения импульс затухнет. Ударяя по стержню периодически, можно добиться присутствия в стержне стабильных во времени разряжений и сжатий его структуры. Для возникновения упругого волнового движения необходимы два безусловных условия. Во-первых, в среде должен быть источник, как правило, это тот или иной колебательный процесс. Во-вторых, источник колебаний должен располагаться в среде, отдельные части которой упруго связаны между собой.

Подобные рассуждения, проведенные с механических позиций, можно распространить и на тепловые явления. Торец стержня можно подвергнуть «тепловому удару», сообщая кратковременный тепловой импульс, который поведёт себя не так как механический импульс. Градиент температуры концевой части со временем расплывётся по длине стержня, не обнаруживая признаки волнового движения. Дело в том, что передача тепла подчиняется совсем другим законам, отличным от передачи механического движения.

При распространении волнового движения в среде протекают два различных явления: движение отдельных частиц среды и перемещение самой упругой волны по среде. Первое явление относится к обычному механическому перемещению отдельных микрообъёмов среды, которые моделируются материальными точками. Второе явление представляется как движение возмущённого состояния среды от одной группы частиц к другой [14].

Величина смещения и скорость частиц определяются параметрами колебательного процесса. Так, например, в звуковой волне смещения и скорости зависят от громкости звука. Частицы среды приобретают движение только в момент прохождения волны, после прохождения возмущения они возвращаются в своё равновесное состояние, в то время как упругая волна распространяется дальше, вовлекая в колебательное движение всё новые и новые объёмы среды. Скорости упругих волн относительно велики, в воздухе при нормальных условиях $c \cong 340$ м/с, в воде – $c \cong 1500$ м/с, в стали – $c \cong 5000$ м/с. Скорость распространения звуковых волн, практически, не зависит от параметров источника колебаний, а определяется только физическими характеристиками самой среды: чем больше упругость среды, тем значительнее силы, возникающие при деформации, и тем быстрее передаётся возмущение от частицы к частице – тем большее значение имеет скорость звука. На скорость распространения оказывает влияние и плотность среды, чем выше плотность, тем среда более «инертна», частицы «медленнее» приобретают скорость, о чём недвусмысленно намекает уравнение второго закона Ньютона.

Скорость звука величина конечная, определяемая упругими свойствами и плотностью среды, другие характеристики оказывают не существенное влияние.

7.2. Образование и распространение волн в упругой среде

Как следует из предварительных замечаний, волнами, можно считать процессы распространения в пространстве любых изменений состояния материи в форме вещества или поля, не связанных с переносом среды.

Отличие упругих волн, обусловленных механическими колебаниями, от всех прочих видов движения состоит в том, что при волновом процессе не происходит переноса вещества из одного места в другое, а переносится лишь форма возмущённой среды – гребни и впадины поперечной волны или сгущения и разрежения продольной волны [15].

Всякое колеблющееся тело (камертон, струна, мембрана, диффузор динамика и т.д.), при условии его нахождения в упругой среде, обозначает своё присутствие излучением упругих волн. Периодические деформации среды, возникающие в окрестности колеблющихся тел, распространяются в окрестностях, при этом упругие силы, действующие между отдельными частичками среды, стремятся их вернуть в невозмущённое состояние статического равновесия. Частицы же среды при распространении колебаний колеблются около этого положения. От одних участков среды к другим передаётся только состояние деформации, т.е. форма возмущённой среды.

Процесс распространения колебаний за пределы положения источника называется волновым процессом или попросту – волной. В зависимости от характера упругих деформаций волновые процессы принято делить на продольные и поперечные (рис.7.1).

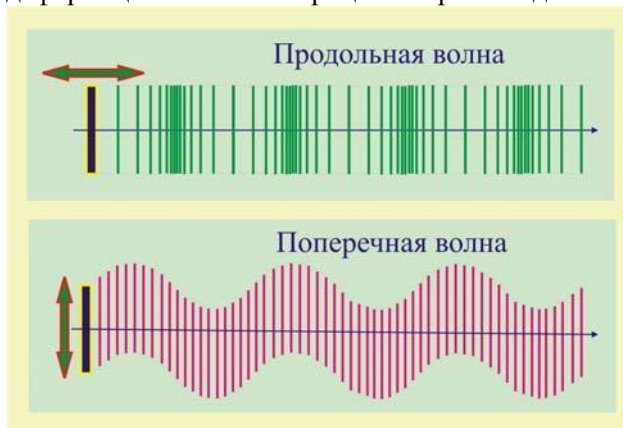


Рис. 7.1. Продольные и поперечные волны

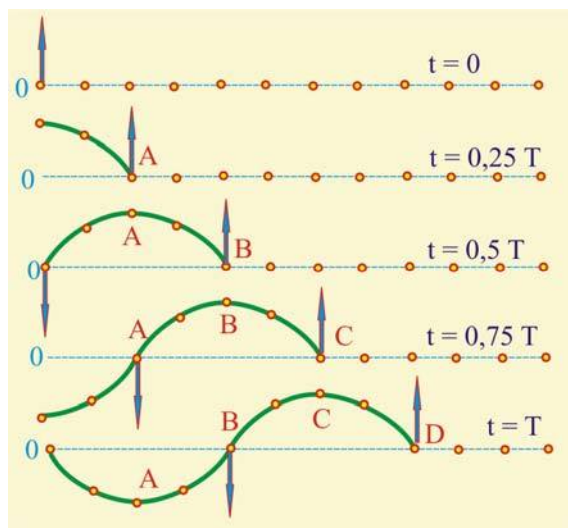


Рис. 7.2. Образование поперечной волны

Если колебания частиц среды происходят в направлении распространения волны, то эта волна называется продольной. Если же перемещение происходит в направлении перпендикулярном вектору скорости волнового движения, то волна полагается поперечной.

Поперечные волны по обыкновению возникают в средах, обладающих сопротивлением сдвигу. Их образование связано с тем, что различные частицы среды начинают колебаться в разное время, поэтому колеблются в разных фазах. Когда одни частицы среды движутся вверх, то другие могут двигаться в это время вниз, среда при этом вынуждена деформироваться, образуя гребни и впадины.

Примером поперечной волны может служить волна, возникающая в длинном упругом шнуре, один конец которого соединён с колеблющимся вертикально телом, а второй на значительном удалении закреплён неподвижно. В начальный момент времени ($t = 0$) все частицы шнура неподвижны (рис. 7.2), т.е. находятся в равновесии, а конец шнура (точка O) в этот момент получает ускорение, направленное вверх и благодаря наличию связи, увлекает за

собой соседние частицы шнура. Через четверть периода, частица находящаяся ранее в точке О, достигает максимального отклонения. Частица А, отстоящая от начала отсчёта на расстоянии $x_A = c \cdot (T/4)$ получит ускорение, тоже направленное вверх. В момент времени $t = T/2$ первая частица вернётся в положение равновесия, имея, при этом, ускорение, направленное вниз, частица А достигнет максимального смещения вверх, а частица В, отстоящая от О на расстояние $x_B = c \cdot (T/2)$, начнёт движение вверх. По истечении времени $t = 3T/4$ частица О достигнет максимального смещения книзу, частица А пройдёт положение равновесия, частица В переместится в крайнее верхнее положение. Частица С, находящаяся на расстоянии $x_C = c \cdot T$ от исходной точки, приобретает ускорение вверх. В последующие моменты времени процесс повторится.

Продольные волны возникают, например, в упругой пружине, один конец которой закреплён, а второй совершает гармонические колебания. Отдельные участки пружины будут колебаться с различными фазами, что приведёт к возникновению вдоль пружины сжатий и растяжений. Типичным примером продольных волн является распространение звуковых и ультразвуковых волн в воздухе или воде, где по мере распространении волнового движения образуются чередующиеся изменения плотности среды.

В реальных средах чаще всего возникают комбинированные волны, анализ которых обнаруживает характерные свойства как продольных, так и поперечных волн.

Распространяясь в среде, упругие волны переносят механическую энергию, которая складывается из кинетической энергии движения частиц волны и потенциальной энергии упругой деформации среды. В зависимости от частотного диапазона волны делятся на инфразвуковые, звуковые, ультразвуковые и гиперзвуковые волны (табл. 7.1).

Таблица 7.1

№	Тип волн	Частотный диапазон
1	Инфразвуковые волны	0 – 20 Гц
2	Звуковой диапазон	20 Гц – 20 кГц
3	Ультразвуковой диапазон	20 кГц – 1 мГц
3	Гиперзвуковой диапазон	1 мГц – 10 гГц

Область пространства, в которой колеблются все частицы среды, называется волновым полем. Поверхность, во всех точках которой частицы колеблются в одинаковой фазе, называется фронтом волны или волновым фронтом.

В однородной изотропной среде, т.е. в среде с одинаковыми физическими свойствами во всех направлениях и в отсутствии препятствий, упругие волны распространяются с постоянной скоростью. Наличие препятствий существенно усложняет картину распространения, механизм взаимодействия волн с препятствиями зависит от соотношения размеров препятствий и длин волн. При рассмотрении процесса образования поперечных волн на примере длинного шнура мы имели дело с, так называемыми бегущими волнами, возникающими при отсутствии отражения. Если размеры среды ограничены, как в скрипичной или гитарной струне, то бегущие волны распространяясь, будут отражаться от закрепленных концов и на длине струны образуется комбинация волн и распространяющихся взад и вперёд, в этом случае говорят о стоячих волнах.

Как отмечено выше, отдельные осцилляторы (колеблющиеся материальные точки) образующие среду, не перемещаются вместе с волнами. Они колеблются по гармоническому закону вблизи положения своего равновесия. В этом легко убедиться, если в середину подходящей лужи, в которой на поверхности плавает мусор, бросить камень (рис.7.3).

Возникшая круговая волна, распространится до самых до берегов, а вот плавающие предметы практически останутся на месте. Некоторое непродолжительное время они будут по мере достижения их волны подниматься и опускаться относительно спокойного уровня воды.

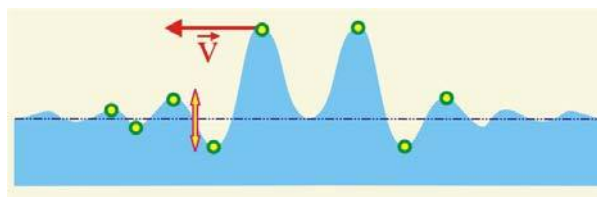


Рис. 7.3. Распространение волны в луже

7.3. Уравнение плоской бегущей волны

Прежде чем приступить к получению уравнения простейшего волнового движения необходимо сделать некоторые замечания о скоростях, фигурирующих в этом процессе, поскольку смысл и содержание этих величин отличаются от принятых в классической механике. При рассмотрении волнового движения различают три различных по смыслу и содержанию скорости.

1. Колебательная скорость частиц. Это скорость, которую приобретают частицы среды, будучи увлечёнными колебательным движением при прохождении волны. По сути это скорость колебаний частиц относительно положения равновесия.

2. Волновая или фазовая скорость. Это скорость, с которой перемещаются в пространстве поверхности одинаковой фазы, т.е. скорость с которой перемещаются горбы или впадины волн.

3. Групповая скорость. При сложении нескольких волн с разными длинами (частотами) и скоростями перемещения образуются группы волн (цуги, волновые пакеты). В реальности волны довольно редко наблюдаются в виде отдельных монохроматических компонент. В частности, вспышка белого света имеет сплошной спектр частот, поэтому характеризуется групповой скоростью распространения. Естественно со временем, вследствие разности фазовых скоростей для отдельных компонент в среде, пакет расплывается. Если среда отсутствует, такое имеет место быть для электромагнитных волн, то все частоты распространяются с одинаковыми скоростями. Для монохроматических волн значения фазовой групповой скорости совпадают.

Задача исследования волнового движения, как правило, сводится к определению амплитуды и фазы колебательного движения в различных точках среды, а так же изменение этих величин во времени. Задача решается, если известен закон, по которому колеблется тело, являющееся источником волн и по каким законам происходит взаимодействие этого тела с окружающей средой. Правда, в ряде случаев информация об источнике волн является несущественной, потому что в место параметров колеблющегося тела задаётся расположение волнового фронта или волновой поверхности, а требуется определить состояние колебательного процесса в других точках среды.

Рассмотрим простейший случай, когда волна распространяется в положительном направлении оси OX , при этом величину, характеризующую колебательные параметры частиц обозначим как y (рис. 7.4). Этой величиной может быть смещение относительно положения равновесия, отклонение давления или плотности среды. Пусть в начальный момент времени при $t = 0$, $y = 0$ и начальная фаза $\varphi = 0$

$$y = y_0 \sin \omega t,$$

(7.2)

где $\omega = 2\pi/T$ – циклическая частота, T – период колебаний, y_0 – амплитуда колебаний, ωt – аргумент синуса, определяющий значение колеблющейся величины в каждый момент времени, другими словами ωt – фаза колебаний в точке O .

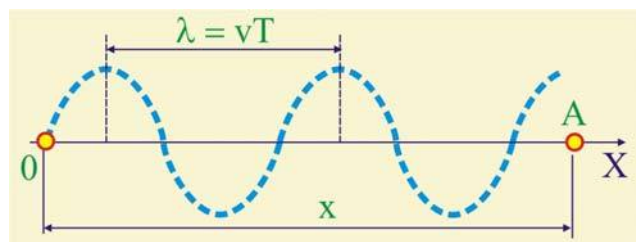


Рис. 7.4. Синусоидальная волна

Точки A волновое движение достигнет за время

$$\tau = \frac{x}{v}, \quad (7.3)$$

фаза колебаний в этой точке определится как

$$\omega \left(t - \frac{x}{v} \right). \quad (7.4)$$

Совмещая уравнения (7.4) и (7.2)

получим значение колеблющейся величины в точке А для момента времени t

$$y(x, t) = y_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right), \quad (7.5)$$

где v – фазовая скорость волны. Если волна распространяется в обратном направлении, то уравнение (7.5) следует записать следующим образом

$$y(x, t) = y_0 \sin \omega \left(t + \frac{x}{v} \right). \quad (7.6)$$

Для волны распространяющейся в обоих направлениях уравнение примет вид

$$y(x, t) = y_0 \sin \omega \left(t \pm \frac{x}{v} \right). \quad (7.7)$$

Преобразуем последнее уравнение к виду

$$y(x, t) = y_0 \sin \left(\omega t \pm \frac{\omega x}{v} \right). \quad (7.8)$$

Циклическую частоту ω можно выразить через частоту ν , которая измеряется в герцах, или период T , который измеряется в секундах, т.е.

$$\omega = 2\pi\nu; \quad \omega = 2\pi/T. \quad (7.9)$$

Поскольку изначально было введено предположение о постоянстве амплитуды и фазовой скорости, т.е. волна предполагалась плоской (поверхности равных фаз представляют собой плоскости). Расстояние, пройденное волной в течение периода, называется длиной волны

$$\lambda = vT = v \left(\frac{2\pi}{\omega} \right) = \frac{v}{\nu}, \quad \Rightarrow \quad v = \nu\lambda + \frac{\lambda}{T}. \quad (7.10)$$

С учётом введённых обозначений уравнение (7.8) примет вид

$$y(x, t) = y_0 \sin \left(\omega t \pm \frac{2\pi x}{\lambda} \right) = y_0 \sin \left(2\pi\nu t \pm \frac{2\pi x}{\lambda} \right). \quad (7.11)$$

В последнем уравнении присутствует постоянная для данной волны величина $2\pi/\lambda$, которая называется волновым числом, это векторная величина, модуль которой равен $2\pi/\lambda$ а направлен вектор волнового числа по направлению распространения волны

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{i}, \quad (7.12)$$

где $\vec{i}$ – единичный вектор, направленный по оси ОХ и измеряемый в единицах волнового числа, т.е. в м^{-1} .

Уравнение плоской бегущей волны, распространяющейся в направлении оси ОХ, окончательно запишется в виде

$$y(x, t) = y_0 \sin(\omega t - kx). \quad (7.13)$$

На рис. 7.5 представлен геометрический образ плоской бегущей волны, распространяющейся с фазовой скоростью v . Если поверхность равных фаз представляет сферу, то эту волну называют сферической, у которой амплитуда колебаний уменьшается обратно пропорционально расстоянию, уравнение (7.13) для сферической волны представится следующим образом

$$y(r, t) = \frac{y_0}{x} \sin(\omega t - kr). \quad (7.14)$$

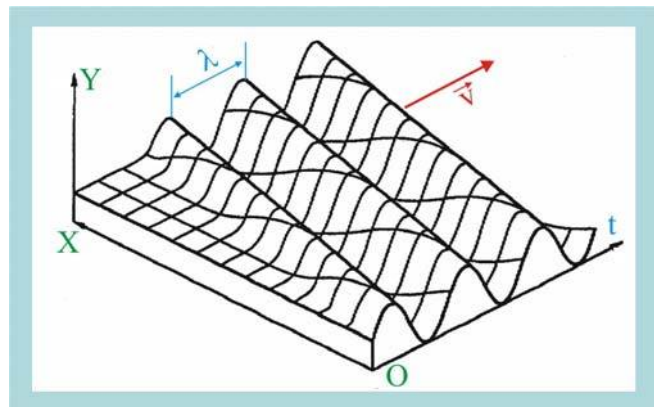


Рис. 7.5. Геометрический образ плоской волны

7.4. Волновое уравнение

Колеблющаяся величина, как следует из уравнений (7.13) и (7.14) зависит одновременно от двух переменных: координаты x и времени t . Скорость изменения y в функции времени t , при постоянстве x , представится в виде **частной производной**

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta t} \right)_{x=\text{const}} = \frac{\partial y}{\partial t}. \quad (7.15)$$

Величина $\partial y / \partial t$ является уравнением скорости частицы в некоторой фиксированной точке среды. Изменение y вдоль оси x характеризуется тоже частной производной при фиксации момента времени t

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_{t=\text{const}} = \frac{\partial y}{\partial x}. \quad (7.16)$$

Уравнение (7.16) определяет разность значений колеблющейся величины, отнесённой к некоторому расстоянию, отсчитываемому вдоль направления распространения волны, т.е. показывает, каким образом изменяется величина y вдоль оси Ox (в данный момент времени).

Используя уравнение волнового движения (7.5), определим частные производные рассматриваемой величины y вначале по времени

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial y}{\partial t} = y_0 \omega \cos \left(t - \frac{x}{v} \right); \\ a &= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -y_0 \omega^2 \sin \left(t - \frac{x}{v} \right) = -\omega^2 y. \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

В случае, если y является смещением частицы среды из положения равновесия, то u будет представлять собой скорость, измеряемую в м/с, естественно, что a будет ускорением при колебательном движении данной точки среды. Изменение колебательной скорости и ускорения будут периодическими, причём амплитудные значения составят

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= y_0 \omega; \\ a_0 &= y_0 \omega^2 = u_0 \omega. \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

Продифференцируем далее исходное уравнение (7.5) по координате x для фиксированного момента времени t

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= y_0 \left(-\frac{\omega}{v} \right) \cos \left(t - \frac{x}{v} \right); \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= -y_0 \frac{\omega^2}{v^2} \sin \left(t - \frac{x}{v} \right) = -\frac{\omega^2 y}{v^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.19)$$

Оценим размерности вторых производных

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right] &= \frac{M}{c^2}; \\ \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] &= \frac{M \cdot c^2}{c^2 \cdot M^2} = \frac{1}{M}. \end{aligned} \right\} \quad (7.20)$$

Сравнивая размерности вторых производных, можно видеть, что они отличаются на m^2/c^2 , т.е. на квадрат фазовой скорости, что даёт основание записать

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (7.21)$$

Это есть **волновое уравнение** для случая одномерной плоской бегущей волны.

7.5. Волна, распространяющаяся в произвольном направлении

Рассмотрим упругую волну, распространяющуюся в произвольном направлении так, что вектор скорости волны с осями $\{x, y, z\}$ составляет углы $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Предположим далее, что колебания в плоскости, совмещённой с началом координат (рис. 7.6) имеют вид [17]

$$\xi_0 = a \cos(\omega t + \alpha), \quad (7.22)$$

где ξ_0 – смещение частиц среды из состояния равновесия, a – амплитудное значение смещения. Рассмотрим волновую поверхность при её прохождении от начала системы отсчёта на расстоянии l . Колебания в этой плоскости, так же как и в предыдущем случае будут запаздывать относительно колебаний, определяемых уравнением (7.22) на время $\tau = l/v$, т.е. будут удовлетворять уравнению

$$\xi = a \cos \left[\omega \left(t - \frac{l}{v} + \alpha \right) \right]. \quad (7.23)$$

Введём в последнее уравнение волновое число (7.12) с учётом того, что

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi v}{\lambda v} = \frac{\omega}{v}, \quad (7.24)$$

$$\xi = a \cos(\omega t - k l + \alpha). \quad (7.25)$$

Расстояние l можно выразить через радиус вектор $\vec{r}$ и вектор нормали $\vec{n}$

$$\vec{n} \vec{r} = r \cos \alpha = l. \quad (7.26)$$

Подставим значение l в уравнение (7.25)

$$\xi = a \cos(\omega t - k \vec{n} \vec{r} + \alpha) = a \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \alpha). \quad (7.27)$$

Полученное уравнение соответствует плоской незатухающей волне, распространяющейся в среде в направлении волнового вектора $\vec{k}$. Если волна затухает, то так же как это делалось для затухающих колебаний, уравнение волны необходимо дополнить множителем $\exp(-\beta r)$. Так как вектор $\vec{r}$ определяет равновесное положение рассматриваемой точки среды, то уравнение (7.27) характеризует отклонение от положения равновесия. Для перехода от радиус-вектора к координатам точки $\{x, y, z\}$ представим скалярное произведение векторов $\vec{k} \vec{r}$ в виде проекций на оси декартовой системы координат

$$\vec{k} \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \alpha x + \frac{2\pi}{\lambda} \cos \beta y + \frac{2\pi}{\lambda} \cos \gamma z. \quad (7.28)$$

Уравнение волны (7.27) с учётом соотношения (7.28) запишется в виде

$$\xi(x, y, z; t) = a \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha). \quad (7.29)$$

Функция $\xi(x, y, z; t)$ позволяет определять отклонение точки среды с координатами $\{x, y, z\}$ в момент времени t . Волновое уравнение для рассматриваемого случая запишется так

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (7.30)$$

или

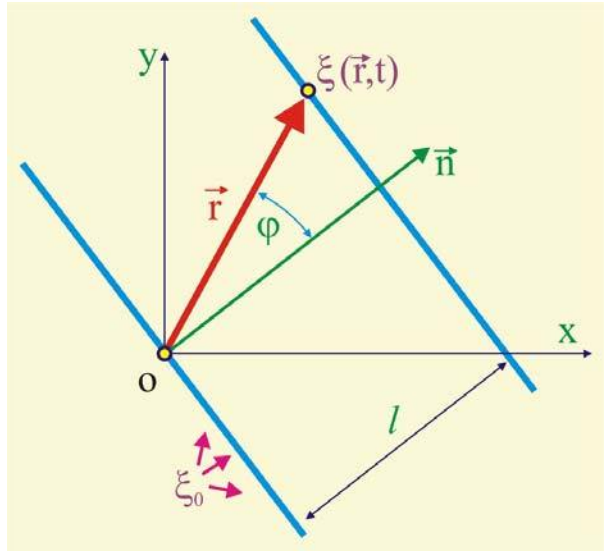


Рис. 7.6. Система координат для волны, распространяющейся в произвольном направлении

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

(7.31)

где Δ – оператор Лапласа.

7.6. Скорость упругих волн в среде

Рассмотрим распространение плоской продольной волны в направлении оси x в изотропной безграничной среде. Мысленно выделим некий цилиндрический объём площадью основания S и высотой Δx (рис. 7.7). Как следует из уравнения (7.13) смещение частиц ξ с различными координатами x имеют различные значения, другими словами $\xi = f(x)$.

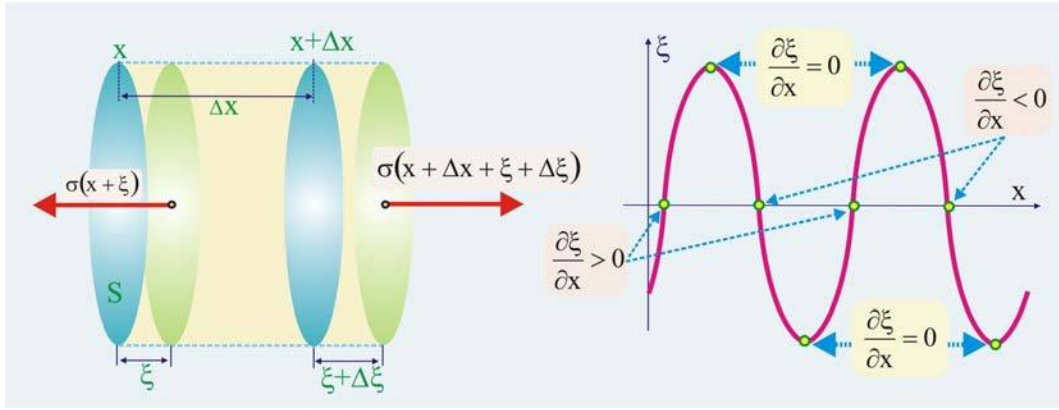


Рис. 7.7. Определение скорости волн в упругой среде

Предположим, что в результате внешнего воздействия среда, заключённая внутри цилиндра деформируется. При перемещении основания с координатой x на величину ξ , то основание с координатой $(x + \Delta x)$ сместится на величину $(\xi + \Delta \xi)$, т.е. рассматриваемый объём получает удлинение $\Delta \xi$. Среднюю деформацию цилиндра можно представить в виде безразмерной величины

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\Delta \xi}{\Delta x}. \quad (7.32)$$

Чтобы получить деформацию ε в некотором сечении x необходимо рассмотреть предел отношения (7.32)

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \xi}{\Delta x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (7.33)$$

Появление деформации растяжения или сжатия объёма среды свидетельствует о наличии нормального напряжения σ

$$\sigma = E \varepsilon = E \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad (7.34)$$

где E – модуль Юнга данной среды. Величина напряжения зависит от координаты x (правая часть рис. 7.7). При значениях x , соответствующих максимальному отклонению частиц от положения равновесия деформация и напряжение равны нулю. В местах, где частицы проходят положение равновесия деформация и напряжение достигают максимума, при этом положительные и отрицательные деформации чередуются, что соответствует растяжению или сжатию среды, таким образом, по длине цилиндра устанавливаются чередующиеся разрежения и сгущения (рис. 7.1).

Найдём уравнение движения цилиндрического объёма, для чего запишем ускорение точек цилиндра в виде второй производной смещения по времени

$$a_x = \frac{d^2\xi}{dt^2}. \quad (7.35)$$

Масса вещества заключённого в выделенном цилиндрическом объёме определится через плотность ρ недеформированной среды

$$m = \rho S \Delta x. \quad (7.36)$$

Проекция силы, действующей на основание цилиндра равна произведению его площади на разность нормальных напряжений в сечениях $(x + \Delta x + \xi)$ и $(x + \xi)$

$$F_x = SE \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x+\Delta x+\xi+\Delta \xi} - \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x+\xi} \right]. \quad (7.37)$$

Значение производной $\partial \xi / \partial x$ в сечении $x + \delta$ при малости δ можно представить в виде

$$F_x = SE \left\{ \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} (\Delta x + \xi + \Delta \xi) \right] - \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \xi \right] \right\}, \quad (7.38)$$

или

$$F_x = SE \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} (\Delta x + \Delta \xi) \approx SE \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Delta x. \quad (7.39)$$

Ввиду того, что относительное удлинение $\partial \xi / \partial x$ при упругих деформациях всегда на много меньше единицы, значит $\Delta \xi \ll \Delta x$, следовательно, слагаемыми $\Delta \xi$ при суммировании можно пренебречь, что позволяет уравнение силы переписать в виде

$$F_x = ma_x; \Rightarrow \rho S \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = SE \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Delta x. \quad (7.40)$$

Проведя сокращения в последнем уравнении, получим

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (7.41)$$

Уравнение (7.41) представляет собой частный случай волнового уравнения (7.31) записанного для случая независимости ξ от координат y и z , кроме того, очевидно, что в данном случае фазовая скорость представляется следующим образом

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (7.42)$$

Фазовую скорость упругой продольной волны можно получить исходя из анализа механических величин. Представим, что в среде расположен реальный бесконечно длинный (длина на много больше длины волны) цилиндр с непроницаемыми стенками. В цилиндр вставлен невесомый подвижный поршень с площадью основания S . В начальный момент времени $t = t_0$ поршень начинает двигаться внутрь сосуда, где присутствует среда с плотностью ρ , со скоростью v_1 , приводя среду внутри цилиндра в деформированное состояние [18]. За малый промежуток времени Δt деформация распространится на расстояние $v \Delta t$. Масса деформированного участка составит

$$\Delta m = \rho S v \Delta t, \quad (7.43)$$

Изменение импульса, пришедшей в движение среды (газа или жидкости) запишется так

$$\Delta P = \frac{1}{2} \Delta m v_1. \quad (7.44)$$

Изменение импульса в соответствии со вторым законом Ньютона можно представить как изменение импульса среднего значения, действующей на среду

$$\Delta P = \langle F \rangle \Delta t. \quad (7.45)$$

Приравняем два последних уравнения

$$\frac{1}{2} \Delta m v_1 = \langle F \rangle \Delta t, \quad \frac{1}{2} \rho S v v_1 = \langle F \rangle, \quad (7.45)$$

Средняя сила, отнесённая к площади поршня, равна давлению p , т.е.

$$\langle F \rangle = \frac{1}{2} \Delta p S. \quad (7.46)$$

Абсолютное значение давление в соответствии с законом Гука можно выразить через модуль объёмной упругости K и изменение объёма ΔV

$$\Delta p = -K (\Delta V/V), \quad (7.47)$$

знак минус показывает, что при сжатии среды, давление повышается, а при расширении понижается. Объём среды, подвергшейся деформированию в данном случае равен

$$V = v S \Delta t,$$

в то время как, объёмная деформация составляет

$$\Delta V = -v_1 S \Delta t,$$

поскольку за промежуток времени от t_0 до $(t_0 + \Delta t)$ частицы среды, прилегающие к поршню, сместятся на расстояние $v_1 \Delta t$. С учётом этих обстоятельств избыточное давление, возникающее при перемещении поршня можно представить следующим образом

$$\Delta p = K \frac{v_1 S \Delta t}{v S \Delta t} = K \frac{v_1}{v}. \quad (7.48)$$

Средняя сила, с учётом полученных соотношений, запишется в виде

$$\langle F \rangle = \frac{1}{2} K S \frac{v_1}{v}. \quad (7.49)$$

Подставим полученное уравнение силы в уравнение (7.46)

$$\frac{1}{2} K S \frac{v_1}{v} = \frac{1}{2} \rho S v v_1, \quad \frac{K}{v} = \rho v, \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}. \quad (7.50)$$

Как видно, полученное уравнение фазовой (волновой) скорости продольных волн совпадает с ранее записанным уравнением (7.42), а модуль объёмной упругости является, по сути, модулем Юнга.

Проводя подобные рассуждения, можно показать, что скорость поперечных волн в изотропных средах равна

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (7.51)$$

где G – модуль сдвига среды. Полученные уравнения для фазовой скорости показывают, что её величина определяется физическими характеристиками среды. Покажем это на примере идеального газа, находящегося в нормальных условиях ($p_0 \cong 10^5$ Па, $T_0 \cong 273$ К) или близких к ним. Состояние идеального газа определяется уравнением Клапейрона – Менделеева

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \quad (7.52)$$

где μ – молярная масса газа, R – универсальная газовая постоянная, T – абсолютная температура. Введём в уравнение состояния плотность газа

$$p = \frac{m}{V} \frac{RT}{\mu} = \frac{\rho RT}{\mu}, \quad (7.53)$$

откуда

$$\rho = \frac{p\mu}{RT}. \quad (7.54)$$

Плотность газа при постоянстве его химического состава и температуры зависит от давления, причём эта зависимость определяется способом перехода газа из одного состояния в другое. Обсудим это более подробно. Для начала запишем уравнение (7.47) для бесконечно малого изменения объёма, подвергнутого деформации

$$dp = -K \frac{dV}{V}, \quad \Rightarrow \quad K = -V \frac{dp}{dV}. \quad (7.55)$$

Значение производной dp/dV зависит от процессов протекающих в газе при изменении состояния. Применительно к волновым процессам возможны два предельных варианта.

Первый вариант наблюдается при относительно медленном процессе деформации, на низких частотах, а второй при быстропротекающих процессах, что соответствует высокочастотным изменениям параметров колебательной системы, являющейся источником волнового движения.

На низких частотах процесс изменения состояния можно представить как изотермический, т.е. протекающий без изменения температуры, он интерпретируется математически законом Бойля – Мариотта

$$pV = \text{const}. \quad (7.56)$$

Продифференцируем уравнение (7.56) с учётом того, что в изотермическом процессе изменяется как давление, так и объём

$$dp \cdot V = p \cdot dV = 0. \quad (7.57)$$

Перепишем последнее уравнение следующим образом

$$\left(\frac{dp}{dV} \right)_{T=\text{const}} = -\frac{p}{V}. \quad (7.58)$$

Подставим уравнение (7.58) в уравнение (7.55)

$$K_{T=\text{const}} = p, \quad (7.59)$$

а полученное значение давления совместим с зависимостью (7.54)

$$\rho = \frac{K_{T=\text{const}} \mu}{RT}, \Rightarrow K_{T=\text{const}} = \frac{\rho RT}{\mu}. \quad (7.60)$$

Перепишем уравнение фазовой скорости (7.50) с учётом найденного значения коэффициента объёмной упругости при изотермическом процессе

$$v_{(T)} = \sqrt{\frac{RT}{\mu}}. \quad (7.60)$$

Распространение в следе высокочастотных колебаний соответствует адиабатическому процессу, т.е. отсутствием теплообмена между отдельными микрообъёмами среды и внешними термодинамическими системами. Адиабатический закон изменения состояния идеального газа описывается

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad (7.61)$$

где γ – коэффициент Пуассона (показатель адиабаты) для данного газа, определяемый как отношение молярных или удельных теплоёмкостей $\gamma = C_p/C_v$. Как и в предыдущем случае, продифференцируем уравнение (7.61)

$$dpV^\gamma + \gamma pV^{\gamma-1}dV = 0, \quad (7.62)$$

или

$$\left(\frac{dp}{dV} \right)_{\delta Q=0} = -\frac{\gamma p}{V}, \Rightarrow K_{\delta Q=0} = \gamma p. \quad (7.63)$$

Подставляя далее значение коэффициента объёмной упругости в отсутствие теплообмена в уравнение (7.54), получим

$$\rho = \frac{K_{\delta Q=0} \mu}{\gamma RT}, \Rightarrow K_{\delta Q=0} = \frac{\gamma \rho RT}{\mu}. \quad (7.64)$$

Уравнение фазовой скорости (7.50) для этого случая представится следующим образом

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}. \quad (7.65)$$

Каким же из полученных уравнений нужно пользоваться при определении, например, скорости упругих волн акустического диапазона в воздухе? Подставим в уравнение (7.60) следующие данные: $R \cong 8,3 \text{ Дж}/(\text{Моль} \cdot \text{К})$; $T \cong 293 \text{ К}$ (20°C); $\mu \cong 3 \cdot 10^{-2} \text{ кг/моль}$

$$v|_{T=\text{const}} \cong \sqrt{\frac{8,3 \cdot 293}{3 \cdot 10^{-2}}} \cong 285 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (7.66)$$

Далее воспользуемся уравнение (7.65) при $\gamma \cong 1,4$

$$v|_{\delta Q=0} \cong \sqrt{\frac{1,4 \cdot 8,3 \cdot 293}{3 \cdot 10^{-2}}} \cong 337 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (7.67)$$

Поскольку измеренное значение скорости звука в воздухе $v = 340$ м/с, то очевидно, что механизм изменения состояния воздуха ближе к адиабатическому процессу.

В табл. 7.2 – 7.8 приведены справочные данные о скорости звука в различных упругих средах

Таблица 7.2. Характерные частоты колебательных процессов (ν), встречающихся в природе, Гц (с^{-1})

№	Наименование процесса	ν
1	Вековые возмущения планет	$1 \cdot 10^{-10}$
2	Обращение планет вокруг звёзд	10^{-8}
3	Частота приливов и отливов	10^{-5}
4	Колебательные процессы в машинах и механизмах	10^1
5	Усреднённая частота сокращений сердечной мышцы человека в спокойном состоянии	10^0
6	Акустические колебания инфразвукового диапазона	0,1-10
7	Акустические колебания звукового диапазона	20Гц – 20 кГц
8	Акустические колебания ультразвукового диапазона	20кГц – 1 МГц
9	Акустические колебания гиперзвукового диапазона	$\nu > 1$ МГц
10	Радиотелеграфия	$10^5 - 10^8$
11	Инфракрасное излучение	10^{12}
12	Видимое оптическое излучение	10^{15}
13	Рентгеновские лучи	10^{18}
14	γ - лучи	10^{20}
15	Космические лучи	10^{23}

Таблица 7.3. Скорость звука (c), плотность (ρ) и акустическое сопротивление (ρc) в различных газах

Газ	$t, ^\circ\text{C}$	$c, \text{м/с}$	$\rho, \text{кг/м}^3$	$\rho c, \text{кг/м}^2 \cdot \text{с}$
Водород	20	1310	0,084	110
Гелий	20	1005	0,167	168
Кислород	20	326	1,34	437
Азот	20	337	1,17	394
Неон	20	446	0,84	375
Аргон	20	323	1,60	517
Хлор	20	213	3,01	641
Оксид углерода	20	350	1,17	410
Углекислый газ	20	268	1,85	496
Сероводород	20	300	1,44	432
Двуокись серы	20	224	2,75	616
Метан	20	445	0,66	294
Ацетилен	20	327	1,10	360
Этилен	20	330	1,18	389
Водяной пар	130	450	0,54	243
Воздух	20	344	1,21	41

Таблица 7.4. Скорость звука (с), плотность (ρ) и акустическое сопротивление (ρс) в различных жидкостях

Жидкость	с, м/с	ρ, кг/м ³	ρс, кг/м ² ·с
Ацетон	1190	790	94·10 ⁴
Этиловый спирт	1150	790	91·10 ⁴
Метиловый спирт	1120	790	88·10 ⁴
Этиловый эфир	1006	710	72·10 ⁴
Бензол	1326	870	72·10 ⁴
Бензин	1190	750	246115·10 ⁴
Глицерин	1950	1260	115·10 ⁴
Толуол	1325	866	115·10 ⁴
Соляная кислота	1500	908	136·10 ⁴
Вода дистиллированная	1492	1000	149·10 ⁴

Таблица 7.5. Скорость звука (с) в твёрдых телах

Вещество	Температура	Скорость звука, м/с		
		В стержне	Продольная	Поперечная
Алюминий	20	5080	6260	3080
	372	4342	-	-
Бериллий	-250	-	12660	8900
	27	-	12550	8830
Висмут	20	1790	2180	1100
Вольфрам	20	4310	5460	2620
Железо	20	5170	5850	3230
Золото	20	2030	3240	1200
Иридий	20	4790	-	-
Кадмий	20	2400	2780	1500
Константан	20	4300	5240	2640
Кремний	31,5	-	-	3770
Латунь	20	3490	4430	2123
Латунь (70%Cu+30% Zn)	20	3760	-	-
Магний	-	4900	-	-
Манганин	20	3830	4660	2350
Марганец	-	3830	4660	-
Медь	20	3710	4700	2260
Никель	20	4785	5630	2960
Олово	20	2730	3320	1670
Платина	20	2800	3960	1670
Свинец	20	1200	2160	700
Серебро	-	2640	3600	1590
Сталь	-	5050	6110	-
Сурьма	20	3400	-	-
Тантал	20	3350	-	-
Цинк	20	3810	4170	2410

Чугун	-	3850	4500	2400
Стекло кварцевое	-	5370	5570	3515
Плексиглас	-	-	2670	1112
Полистирол	-	-	2350	1120
Каучук	-	-	1479	-
Эбонит	-	1570	2405	-
Лёд	-	3280	3980	1990
Фарфор	-	4884	5340	3120
Парафин	-	1460	-	-
Гранит	-	3950	-	-
Мрамор	-	3810	-	-
Сланец	-	4510	-	-
Слоновая кость	-	2200	-	-

Таблица 7.6. Скорость звука (с) в дереве, м/с

Порода дерева	Скорость звука (с), м/с	
	Параллельно волокнам	Перпендикулярно волокнам
Бук	3400	4556
Дуб	3380	4597
Красная ель	4180	6270

Таблица 7.7. Скорость звука (с) в воздухе в зависимости от температуры

Температура, t, °C	с, м/с	Температура, t, °C	с, м/с
-150	216,7	30	348,9
-100	263,7	50	360,3
-50	299,7	100	387,1
-20	318,7	200	436,0
-10	325,7	300	479,8
0	331,5	400	520,0
10	337,3	500	557,2
20	343,1	1000	714,2

Таблица 7.8. Скорость звука (с) на различной высоте (h) над Землёй

h, м	с, м/с	h, м	с, м/с	h, м	с, м/с
0	340,29	500	338,38	5000	320,54
50	340,10	600	337,98	10 000	299,53
100	339,91	700	337,60	20 000	295,07
200	339,53	800	337,21	50 000	329,80
300	339,14	900	336,82	80 000	282,54
400	338,76	1000	336,43	100 000	251,34

7.7. Энергия волнового движения

Над тем, что такое волны люди начали задумываться давно. Ещё в XV в. гениальный Леонардо да Винчи в своих дневника писал о своих наблюдений о волнах [19]: «Импульс гораздо быстрее воды, потому, что многочисленны случаи, когда волна бежит от места своего возникновения, а вода не двигается с места, – наподобие волн, образующихся в мае на нивах течением ветров; волны кажутся бегущими по полю, между тем нивы со своего места не сходят».

Современный мир полон волн, очевидно, этот тип движения один из самых распространённых в природе. Достаточно вспомнить, что подавляющее большинство живых существ, включая и царя природы, типа, использует каналы информации, основанные на восприятии и обработке именно волновых процессов. Наши органы слуха используют упругие волны акустического диапазона. В полосе частот 20 Гц – 20 кГц мы говорим, подслушиваем и даже, поём. Посредством восприятия электромагнитных волн оптического диапазона в полосе частот $3 \cdot 10^{14}$ – $3 \cdot 10^{15}$ Гц мы видим окружающую нас действительность. А уж современная действительность с телевизорами, навигаторами, мобильными телефонами и прочими атрибутами сегодняшнего времени, буквально повязана с волновыми процессами самого разного свойства.

Как только человек начал размышлять о волнах, он сразу обратил внимание, что волновые процессы имеют ярко выраженное энергетическое содержание. Сейсмические волны и цунами, приносящие разрушения, прозрачно намекали, – волны несут энергию, причём немалую. Но даже те из людей, которых минули сейсмические стихии, не могли не обратить внимания на то, что ветровые волны на поверхности водных пространств способны совершать работу, в большинстве своём, негативную, в виде разрушения плавучих и береговых творений рук человеческих.

Что солнце даёт, по сути, землянам жизнь выяснилось в незапамятные времена. Солнце на протяжении длительного времени, по сравнению с которым современные религии могут считать себя эмбрионами, даже полагалось Богом, что было, на наш взгляд, более логично, чем боги, придуманные потом. Электромагнитные волны света и тепла, приходящие на Землю от Солнца обладают мощностью примерно 1 кВт/м^2 . Современные преобразователи могут трансформировать около 10% энергии в электричество. Солнечная энергия преобразуется растениями в химическую энергию, которая затем при сжигании угля и нефти занимает достойное место в энергетическом обеспечении цивилизации. В пище, которая поддерживает жизнь человека и животных, несомненно, есть составляющая энергии электромагнитных волн. Во всех приведенных примерах общим является факт переноса волнами энергии, хотя мощность различных типов волн существенно различна. Ветровые

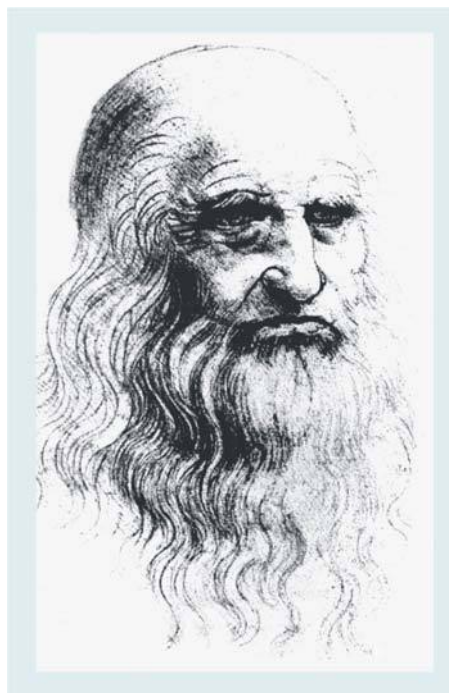


Рис. 7.8. Леонардо да Винчи

волны способны передвигать камни массой в несколько тонн, акустические же волны, излучаемые человеческим голосом переносят относительную энергию. Если все болельщики английского стадиона Уэмбли, будут во всю мощь своих голосовых связок сотрясать воздух все девяносто минут футбольного матча, то суммарной энергии не хватит для увеличения температуры чашки кофе на несколько градусов.

Так же как и всякое движущееся вещество, волновое движение обладает импульсом, хотя импульс волн не так очевиден, как их энергия. При рассмотрении энергетических характеристик волнового движения следует иметь в виду, что скорость его распространения конечна. Световые волны движутся со скоростью $3 \cdot 10^8$ м/с, упругие волны имеют меньшую скорость (табл. 7.1 – 7.7).

Энергия, импульс и скорость являются важными характеристиками волнового движения, однако есть ещё одно свойство, которое имеет принципиальное значение – это **линейность** волн. Если в воду бросить одновременно два камешка, то образованные ими круговые волны станут распространяться, как бы, не замечая друг друга. Одна группа волн без изменений проходит через другую, совокупность таких волн представляет собой суммарный эффект.

Получим некоторые количественные характеристики энергетического содержания волнового движения. Определим изменение энергии малого объёма упругой среды dV , связанное с изменениями, вносимыми распространяющейся плоской волной. Обозначим, как и ранее, смещение частиц через ξ . Если исследуемый объём выбрать достаточно малым, то можно принять, что все частицы, входящие в состав этого объёма колеблются синфазно с одинаковыми скоростями [18]

$$v_1 = \frac{d\xi}{dt}. \quad (7.68)$$

Кинетическая энергия рассматриваемого микрообъёма может быть представлена в виде

$$dK = \frac{dmv_1^2}{2} = \frac{\rho v_1^2 dV}{2}. \quad (7.69)$$

Запишем уравнение волны (7.29), распространяющейся вдоль оси Ox в виде

$$\xi = a \sin(\omega t - kx + \alpha),$$

откуда

$$v_1 = \frac{d\xi}{dt} = a\omega \cos(\omega t - kx + \alpha). \quad (7.70)$$

Подставим значение скорости в уравнение кинетической энергии

$$dK = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 dV \cos^2(\omega t - kx + \alpha). \quad (7.71)$$

Упругие свойства среды предполагают наличие и потенциальной составляющей энергии, причём если рассматриваемую систему считать консервативной, что не далеко от истины, то справедлив закон сохранения энергии, т.е.

$$d\Pi = dK = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 dV \cos^2(\omega t - kx + \alpha), \quad (7.72)$$

или

$$dW = dK + d\Pi = \rho a^2 \omega^2 dV \cos^2(\omega t - kx + \alpha). \quad (7.73)$$

Если уравнение (7.73) поделить на dV , то получится энергия, отнесённая к объёму, в котором она проявляется, т.е. **объёмная плотность энергии волнового движения** ϖ

$$\varpi = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta V} = \frac{dW}{dV}. \quad (7.74)$$

Таким образом, для объёмной плотности энергии волнового движения можно записать следующее уравнение

$$\varpi = \rho a^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kx + \alpha). \quad (7.75)$$

Объёмная плотность энергии пропорциональна квадрату амплитуды и квадрату циклической частоты изменяется во времени по периодическому закону. Если раскрыть квадрат косинуса, то получим

$$\varpi = \rho \frac{a^2 \omega^2}{2} [1 + \cos 2(\omega t - kx + \alpha)]. \quad (7.76)$$

Определим далее скорость распространения энергии u , т.е. скорости распространения поверхности, соответствующей максимальному значению плотности энергии. Определим уравнение поверхности вида $\varpi = \varpi_{\max}$, что соответствует условию равенства нулю аргумента косинуса в уравнении (7.76)

$$2(\omega t - kx + \alpha) = 0.$$

Скорость перемещения такой поверхности вдоль оси ОХ запишем в виде производной

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = v. \quad (7.77)$$

Из полученного уравнения следует, что для плоской синусоидальной волны распространение энергии происходит со скоростью совпадающей с фазовой скоростью.

Поскольку процесс переноса энергии характеризуется периодичностью, то целесообразно ввести энергетическую характеристику, учитывающую временной фактор. Такой величиной является **поток энергии Φ_w** , который представляется в виде энергии, проходящей через единичную площадку в единицу времени

$$\Phi_w = \frac{dW}{dt}. \quad (7.78)$$

Предположим, что поверхность S , через которую определяется поток энергии, расположена перпендикулярно направлению распространения. За время dt через такую единичную площадку будет перенесена энергия, содержащаяся в слое среды толщиной

$$d\ell = udt,$$

следовательно

$$dW = \varpi \cdot S \cdot u \cdot dt,$$

что позволяет уравнение потока представить следующим образом

$$\Phi_w = \varpi \cdot S \cdot u. \quad (7.79)$$

В общем случае форма поверхности, через которую рассматривается поток энергии, может иметь любую форму, ориентированную к направлению распространения волны произвольным образом. В этом случае величина потока через отдельные участки поверхности будет не одинаковой. На интуитивном уровне это свойство потока используется нами часто. Например, всем известно, что на восходе и закате Солнца загорать лучше стоя, а в районе полудня, – располагая тело горизонтально. Чтобы охарактеризовать это обстоятельство количественно, в рассмотрение ввели новую величину U , **плотность потока волновой энергии**, которая учитывает взаимное расположения направления распространения волны и ориентацию рассматриваемой поверхности (рис. 7.9)

$$U = \frac{d\Phi_w}{dS_n}, \quad (7.80)$$

За время dt через площадку dS будет переноситься энергия, заключённая в затемнённом косом цилиндре, объём которого составит

$$dV = u \cdot dt \cdot dS_n,$$

при этом поток определится как

$$d\Phi_w = \varpi \cdot u \cdot dS_n,$$

следовательно,

$$U = \varpi u, \quad (7.81)$$

или в векторной форме

$$\vec{U} = \varpi \vec{u}. \quad (7.82)$$

Вектор плотности потока энергии волнового движения для упругих волн был впервые введён в практику в 1874 г. отечественным учёным Умовым Н.А., в последствии его стали называть вектором Умова.

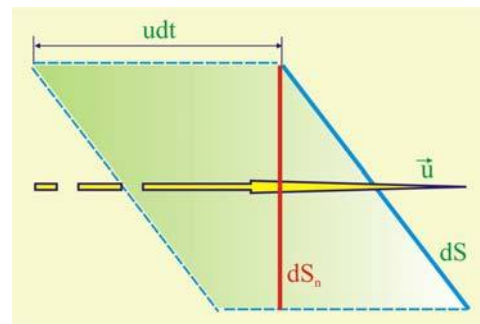


Рис. 7.9. Плотность потока энергии

8. Несинусоидальные волны

8.1. Спектры и анализ несинусоидальных волн

Впервые разложение математических функций в тригонометрические ряды применили Даниил Бернулли (1700 – 1782), Леонард Эйлер (1707 – 1783) и Жан Батист Фурье (1768 – 1830), причём оно рассматривалось как математическое средство при решении задач математической физики [7]. Многими современниками этих учёных возможность такого разложения оспаривалась. Фурье использовал разложение функций в тригонометрические ряды при интегрировании уравнений теплопроводности. Лишь в последствии метод Фурье стал использоваться для решения волновых уравнений. Вместе с тем разложение Фурье не связывались долгое время с какими-либо физическими явлениями. Даже Генрих Герц (1857 – 1894), открывший, как известно, электромагнитные волны, предсказанные Джеймсом Клерком Максвеллом (1831 – 1879), высказывался в переписке с Яном Пуанкаре (1787 – 1869) о спектральных представлениях негативно.

Только в двадцатых годах прошлого века благодаря развитию радиотехники, акустики, механики колебательных систем, спектральные представления широко внедрились как метод наглядного представления колебательных и волновых процессов. Была установлена не двусмысленная взаимосвязь между спектральным разложением и поведением реальных систем. Спектральные представления стали своеобразным связующим звеном при рассмотрении технических приложений разного рода колебательных и волновых процессов. На спектральном «языке» стали описывать не только физические явления, но и параметры аппаратного обеспечения процессов. При покупке телевизора, музыкального центра или мобильного телефона, обратите внимание на указанную в паспорте полосу воспроизводимых устройством частот, это результат спектрального представления колебательных и волновых процессов.

В настоящее время понятие о разложении Фурье можно считать общеизвестным, изучение рядов Фурье входит в стандартную вузовскую программу по высшей математике. Вместе с тем, уместно напомнить, что в далее речь пойдёт о функциях вида

$$f(t) = f(t + nT), \quad (8.1)$$

т.е. периодических функциях, характеризующихся периодом T . В уравнении (8.1) n является любым целым положительным или отрицательным числом. Основным свойством этой функции является повторяемость хода всех сопровождающих данный процесс явлений для периода времени, изменяющегося от $t = -\infty$ до $t = +\infty$. Очевидно, что в полном смысле этого слова, периодических явлений в природе не существует. Понятие периодической функции является полезной математической абстракцией и не более того. Так же, скажем, как и понятие векторов. На практике, говоря о периодичности той или иной функции, всегда вводят некие ограничения, которые сужают степень её абстрактности.

Как известно из математики, всякая периодическая функция может быть представлена разложением в ряд по тригонометрическим функциям

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(2\pi n \frac{t}{T} - \varphi_n\right), \quad (8.2)$$

где c_0 и c_k – постоянные коэффициенты, n – порядковый номер суммируемых членов ряда, φ_n – значение соответствующей начальной фазы. Периодическая функция, таким образом, представлена суммой слагаемых вида

$$c_n \cos(2\pi n t / T - \varphi_n),$$

каждое из которых можно рассматривать как отдельное синусоидальное колебание с амплитудой c_n и начальной фазой φ_n . Выполнение равенства (8.2) наблюдается только при определённом подборе коэффициентов c_n и φ_n . Кроме того, частоты составляющих колебаний должны быть кратны основной частоте, равной $f_1 = 1/T$ ($n = 1$). Отдельные составляющие называются гармониками. Колебания с частотой f_1 называется первой гармоникой, колебания частоты $f_2 = 2/T$ – второй гармоникой, для них $n = 2$ и т.д.

Уравнение (8.2) для удобства пользования обычно переписывают, вводя функции двойного угла

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \right), \quad (8.3)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_n &= c_n \cos \varphi_n; \\ b_n &= c_n \sin \varphi_n; \\ c_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \\ \operatorname{tg} \varphi_n &= \frac{b_n}{a_n}. \end{aligned} \right\}$$

Коэффициенты a_n и b_n определяются уравнениями

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos 2\pi n \frac{t}{T} dt, \quad (8.4)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin 2\pi n \frac{t}{T} dt. \quad (8.5)$$

Коэффициент c_0 определяет среднее значение функции за один период и называется постоянной составляющей

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt. \quad (8.6)$$

Если взять конечное число членов ряда, т.е. аппроксимировать периодическую функцию тригонометрическим полиномом вида

$$f(t) \cong c_0 + \sum_{n=1}^{n=N} \left(a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \right),$$

который для любого N обладает свойством наименьшего квадратичного отклонения от точного значения $f(t)$. С увеличением n точность аппроксимации, разумеется, улучшается, естественно, что при $N \rightarrow \infty$ приближённое равенство переходит в точное.

Часто ряды Фурье записывают в комплексной форме, что позволяет более рационально проводить математические преобразования

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j \frac{2\pi n t}{T}}, \quad (8.7)$$

$$\left. \begin{aligned} 2C_n &= c_n e^{-j\varphi_n} = -jb_n; \\ c_n &= 2|C_n|; \\ c_0 &= C_0. \end{aligned} \right\}$$

Величина $2C_n$ является комплексной амплитудой и определяется уравнением

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j \frac{2\pi n t}{T}} dt. \quad (8.8)$$

Ряд Фурье позволяет разлагать периодические функции по тригонометрическим функциям. Подобное разложение может использоваться и для разложения непериодических функций. При анализе непериодического случая применяют, как правило, предельный переход при $T \rightarrow \infty$. Другими словами, непериодическая функция рассматривается как предельный случай периодической функции с неограниченно возрастающим периодом. Перепишем уравнение (8.7) с учётом значения C_n из соотношения (2.8)

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j \frac{2\pi n t}{T}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j \frac{2\pi n t}{T}} dt .$$

Введём в последнее уравнение вместо периода циклическую частоту при $T \rightarrow \infty$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} .$$

Величина ω_1 представляет собой частотный интервал между соседними гармониками, частоты которых равны $2\pi n/T$. Предельный переход производится по следующей схеме

$$T \rightarrow \infty, \quad \omega_1 \rightarrow d\omega, \quad 2\pi \frac{n}{T} \rightarrow \infty ,$$

где ω – текущая частота, изменяющаяся непрерывно, $d\omega$ – приращение частоты. При таком переходе сумма переходит в интеграл вида

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt , \quad (8.9)$$

этот интеграл можно представить следующим образом

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega , \quad (8.10)$$

где

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt . \quad (8.11)$$

Уравнения (8.10) и (8.11) являются основными формулами теории спектров. Это два преобразования Фурье, связывающими две функции: вещественную функцию времени $f(t)$ и комплексную функцию частоты $S(\omega)$. Уравнение (8.10) является интегралом Фурье в комплексной форме. Как видно, смысл этой зависимости состоит в том, что функция $f(t)$ представляется в виде суммы синусоидальных составляющих. Т.к. $f(t)$ функция не периодическая, то она может представляться только суммой бесконечно близких по частоте малых колебаний. Комплексная амплитуда каждого отдельного малого колебания определяется как

$$dC = \frac{1}{\pi} S(\omega) d\omega . \quad (8.12)$$

Основную формулу спектрального анализа (8.10) можно записать в вещественной форме, в этом случае интегрирование производится только по положительным частотам. Введём обозначение

$$S(\omega) = A(\omega) + jB(\omega) ,$$

и учитывая, что A – чётная, а B – нечетная функция, получим

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos \omega t - B(\omega) \sin \omega t] d\omega . \quad (8.13)$$

Покажем возможность представления упругой волны разложением по Фурье функции давления $p(t, \vec{r})$. Как было показано выше, периодическая функция с периодом $T = 2\pi/\omega_0$ разлагается в ряд [13]

$$p(\vec{r}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(\vec{r}) e^{-jn\omega_0 t} , \quad (8.14)$$

где

$$p_n(\vec{r}) = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^T p(\vec{r}, t) e^{j\omega_0 t} dt, \quad (8.15)$$

причём коэффициенты, $p_n(\vec{r})$ меняющиеся от точки к точке, представляют собой амплитуды спектра волны. Если давление описывается непериодической функцией, то она разлагается в интеграл

$$p(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\omega(\vec{r}) e^{-j\omega t} d\omega, \quad (8.16)$$

где

$$p_\omega(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(\vec{r}, t) e^{j\omega t} dt. \quad (8.17)$$

Коэффициенты $p_\omega(\vec{r})$ называются спектральной плотностью амплитуды разложения.

Суть дальнейших рассуждений должна показать, что каждое их гармонических слагаемых, т.е. член ряда

$$p_n(\vec{r}) e^{-jn\omega_0 t}, \quad (8.18)$$

является волной, способной распространяться в данной среде. С позиций математики это означает, что все гармонические составляющие, каждое в отдельности, должны удовлетворять волновому уравнению.

Давление в любой точке при распространении гармонической волны можно записать в виде

$$p_1 = p_0 \cos(\omega t - \alpha), \quad (8.19)$$

где p_0 – амплитудное значение давления, $\alpha = kr$ – начальная фаза, ω – циклическая частота. Последнее уравнение предполагает, что давление, скорость частиц среды, сжатие и другие, кинематические и динамические характеристики меняются во времени по гармоническому закону. Для гармонического закона волновое уравнение (7.31) можно несколько упростить. Волновое уравнение для давления в общем случае записывается как

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \quad (8.20)$$

где $\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$, c – скорость распространения волн звукового диапазона (скорость звука). Если в волновое уравнение (8.20) подставить значение давления из уравнения (8.19), то получится, так называемое, **уравнение Гельмгольца** [13]

$$\Delta p_1 + k^2 p_1 = 0, \quad (8.21)$$

где k – волновое число. В уравнение Гельмгольца входят только производные по координатам; для гармонических волн зависимость величин от времени можно исключить при рассмотрении волнового движения как такового, так сказать, на феноменологическом уровне. Гармоническую компоненту ряда или интеграла можно записывать, опуская постоянный множитель

$$p_\omega = \int_a^b p e^{j\omega t} dt, \quad (8.22)$$

и полагая, что для каждой периодической компоненты $b - a = T$, а любую частотную компоненту можно представить как $\omega_n = n\omega_0$. Для непериодических функций интеграл необходимо брать в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, при этом частота тоже принимает значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Умножим волновое уравнение на $e^{j\omega t}$ и проинтегрируем по времени в пределах $(a - b)$. Меняя в первом слагаемом уравнения (8.20) порядок интегрирования и дифференцирования, получим

$$\int_a^b \Delta p e^{j\omega t} dt = \Delta \int_a^b p e^{j\omega t} dt = \Delta p_\omega. \quad (8.23)$$

Второе слагаемое проще интегрировать в два приёма по частям

$$\int_a^b \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} e^{j\omega t} dt = \left[\frac{\partial p}{\partial t} e^{j\omega t} - j\omega \int_a^b \frac{\partial p}{\partial t} e^{j\omega t} dt \right]_a^b = \left[\frac{\partial p}{\partial t} - j\omega p \right]_a^b e^{j\omega t} - \omega^2 \int_a^b p e^{j\omega t} dt. \quad (8.24)$$

Значения периодических функций на концах интервала в один период равны, так же как и их производные, поэтому в последнем уравнении первые два члена исчезают. Для непериодической функции эти члены несущественны, потому что по определению, сама функция p исчезает на бесконечности. Таким образом

$$\int_a^b \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} e^{j\omega t} dt = -\omega^2 \int_a^b p e^{j\omega t} dt = -\omega^2 p_\omega. \quad (8.25)$$

Таким образом, на основании уравнений (8.23) и (8.25) при подстановке в исходное уравнение (8.20), получается

$$\Delta p_\omega + k^2 p_\omega = 0, \quad (8.26)$$

другими словами, компоненты разложения Фурье удовлетворяют уравнению Гельмгольца, каждый член разложения описывает гармоническую волну, которая может распространяться независимо от других, ей подобных. Это обстоятельство, в частности, облекает физическим смыслом саму идею разложения Фурье по времени. **Разложение Фурье позволяет волну с произвольной зависимостью её параметров от времени заменить суперпозицией волн со стандартными гармоническими зависимостями.**

Разложение волн с произвольной зависимостью её параметров от времени представляет собой пример спектрального разложения: представления данной функции в виде суперпозиции (тригонометрического ряда или интеграла) стандартного набора функций с более простыми свойствами, позволяющими проводить их математический анализ по достаточно простым схемам. Кроме того, знания спектрального состава сложных волн дают все основания для глубокого анализа протекающих в них физических процессах.

Если вспомогательные функции разложения заданы, то задача спектрального анализа сводится к определению коэффициентов разложения типа (8.4), (8.5). В акустике и гидроакустике при разложении Фурье используются известные гармонические функции времени. В этом случае исходная волна представляется в виде интерференционной картинки гармонических волн различных частот. Спектральный подход даёт возможность не исследовать каждую исходную волну в целом и по отдельности. Каждую звуковую волну достаточно представить суперпозицией более простых волн, тем и ограничиться.

Если плоская гармоническая волна задана типично акустическим уравнением

$$p = p_0 \exp(-j\omega t + j\vec{k}\vec{r}), \quad (8.27)$$

то спектр Фурье разложения в направлении оси OX определится временной зависимостью

$$p\left(t - \frac{x}{c}\right) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} p_n \exp(jn\omega_0 t + jnk_0 x). \quad (8.28)$$

В координатной форме плоская гармоническая волна записывается следующим образом

$$p = \exp(jk \cos \alpha x + jk \cos \beta y + jk \cos \gamma z). \quad (8.29)$$

Если ввести обозначения проекций волнового вектора $\vec{k}$ на оси координат

$$\left. \begin{aligned} k_x &= k \cos \alpha; \\ k_y &= k \cos \beta; \\ k_z &= k \cos \gamma, \end{aligned} \right\} \quad (8.30)$$

то

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad (8.31)$$

т.е. уравнение волны примет вид

$$p = \exp(jk_x x + jk_y y + jk_z z). \quad (8.32)$$

8.2. Дисперсионное уравнение. Групповая скорость

Все среды, подчиняющиеся волновому уравнению, обладают свойством проводить плоские волны любой формы без искажения. В общем случае этим свойством, распространяться без искажения, обладают только плоские гармонические волны, при условии выполнения принципа суперпозиции. Уравнение давления в этом случае может быть записано в следующем виде

$$\mathfrak{I}(p) = 0. \quad (8.33)$$

где $\mathfrak{I}(p)$ – линейный однородный оператор. Для сред, удовлетворяющих волновому уравнению (8.20) этот оператор выражается как

$$\mathfrak{I} \equiv \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (8.34)$$

Для того, чтобы доказать свойство данной среды сохранять форму волны, необходимо показать, что в числе решений уравнения (8.33) присутствует волна вида

$$p = \exp(-j\omega t + j\vec{k}\vec{r}). \quad (8.35)$$

Предположим, что оператор $\mathfrak{I}$ переводит функцию p в функцию q , т.е.

$$\mathfrak{I}(p) = q. \quad (8.36)$$

Если $q \equiv 0$, то соответствующая функция p представляет собой свободную волну. Подставим значение p из уравнения (8.35) в уравнение (8.36) и продифференцируем обе части полученного равенства по времени. Т.к. по условию оператор линеен и однороден, то дифференцирование и действие оператора можно менять местами

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{I}(p)}{\partial t} = \mathfrak{I}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right) = \mathfrak{I}(-j\omega p) = -j\omega \mathfrak{I}(p) = -j\omega q,$$

таким образом

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -j\omega q,$$

из чего в свою очередь следует

$$q = \tilde{q} e^{-j\omega t},$$

причём, в последнем уравнении $\tilde{q}$ от времени не зависит, но является функцией ω . Последнее уравнение можно представить в виде

$$q = f(\omega, \vec{k}) \exp(-j\omega t + j\vec{k}\vec{r}), \quad (8.37)$$

где $f(\omega, \vec{k})$ – некоторая функция, зависящая от частоты и волнового вектора (волнового числа). Из уравнения (8.37) следует, что каждому значению ω будет соответствовать индивидуальное решение уравнения (8.33) относительно $\vec{k}$. Для изотропной среды с одинаковыми свойствами во всех направлениях это уравнение должно содержать только модуль волнового вектора, т.е. функцию $f(\omega, \vec{k})$ можно свести к скалярному виду

$$F(\omega, k^2) = 0. \quad (8.38)$$

Уравнение (8.38) называется дисперсионным уравнением для данной среды. Так, например, для волнового уравнения (8.20) дисперсионное уравнение выглядит следующим образом

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0. \quad (8.39)$$

Из этого уравнения следует, что **в средах, описываемых волновым уравнением (8.20)**

дисперсия (зависимость скорости волны от частоты) отсутствует. Иное дело гравитационные волны, т.е. волны, распространяющиеся на поверхности жидкости (подробнее о них поговорим позже) описываются системой уравнений, записанных для потенциала скорости

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi &= 0; \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.40)$$

Первое уравнение – условие несжимаемости среды, второе – уравнение движения поверхности волны. Поверхностную волну можно записать в виде

$$\varphi = \exp(-j\omega t + jkx + kz). \quad (8.41)$$

дисперсионное уравнение для такой волны определяется путём подстановки (8.41) во второе уравнение системы (8.40)

$$k - \frac{1}{g} \omega^2 = 0, \quad (8.42)$$

откуда скорость поверхностных волн запишется как

$$c = \frac{g}{\omega} = \sqrt{\frac{g}{k}}, \quad (8.43)$$

т.е. зависимость скорости волны от частоты (длины волны) очевидна.

Для упругих волн акустического (звукового) диапазона (табл. 7.1) принято различать две, принципиально различных, причины возникновения дисперсии. Первой причиной являются физические свойства среды, в которой распространяется волна. **Упругие напряжения в некоторых средах зависят не только от деформации, но и от скорости изменения деформации.** При распространении акустических волн в неограниченных средах явление дисперсии всегда сопровождается поглощением волновой энергии. Второй тип дисперсии обусловлен влиянием границ среды распространения волн и не зависит от свойств самой среды. Этот тип дисперсии связан с кинематическими особенностями отражения и рассеяния волн.

Известно, что монохроматическая волна не может переносить никакой информации. В каждой точке среды, занятой такой волной будут наблюдаться только гармонические колебания, т.е. можно отмечать только факт их присутствия.

Для передачи посредством волны сигнала необходимо, чтобы в её параметрах что-либо менялось по заранее установленному закону. Или, чтобы волна прерывалась на короткие и длительные промежутки, как это имеет место при передаче сигналов при помощи азбуки Морзе.

Другими словами, исходная волна должна быть **модулирована** тем или иным способом (рис. 8.1). Даже в случае прерывистой волны она уже не будет являться монохроматической волной, такой сигнал можно рассматривать как некую интерференционную картинку, образованную суперпозицией гармонических составляющих разных частот, полученных в результате разложения Фурье.

В среде, обладающей дисперсией, скорость распространения каждой частотной составляющей индивидуальна. Это искажает интерференционную картину, что естественно будет искажать передаваемую информацию. Выясним далее каким образом можно определить искажения вносимые дисперсией с заданными параметрами. Это можно сделать, используя Фурье-представления волны.

Если задан профиль волны, то его необходимо разложить на отдельные синусоидальные частотные составляющие и приписать

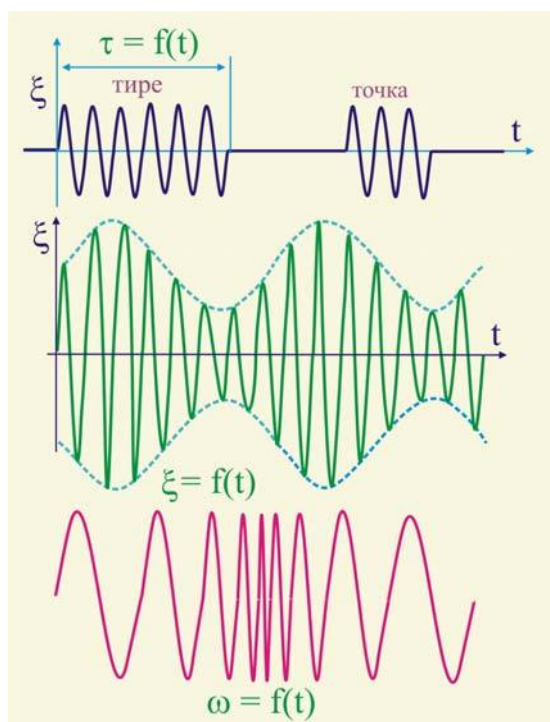


Рис. 8.1. Способы модуляции волн

каждой синусоиде временной множитель в соответствии с дисперсионным уравнением среды. Каждая полученная таким способом компонента является самостоятельной гармонической волной, фазовая скорость которой может быть найдена из дисперсионного уравнения. За данный промежуток времени каждая волна пробежит расстояние, пропорциональное её индивидуальной фазовой скорости. Сложив затем все компоненты, получим новый профиль исходной волны с учётом искажений, вносимых дисперсией. Если дисперсия в среде отсутствует, то результирующие компоненты волны просто сместятся на одно и то же расстояние как одно целое, в результате чего профиль волны попросту сдвинется, сохранив свою первоначальную форму. В диспергирующей среде для отдельных волн смещения будут различными, ввиду неодинаковости фазовой скорости. Синусоиды «расфазировываются» и интерференционная картина после распространения будет отлична от первоначальной, т.е. профиль волны изменится. Понятие фазовой скорости распространения волны к данной ситуации не применимо.

Однако, на практике часто удаётся найти некий элемент интерференционной картины, который либо не меняется вообще, либо меняется слабо при распространении даже при наличии дисперсии. Это возможно, если спектр сигнала достаточно узок, т.е. Фурье-компоненты мало отличаются по частоте. Таким элементом, как правило, является огибающая интерференционной картины, которая не меняет своей формы при распространении и перемещается с некоторой определённой скоростью, хотя сигнал внутри огибающей меняет свою форму.

Скорость огибающей называется групповой скоростью, понятие которой обобщает понятие скорости применительно к волновому движению. На рис. 8.2 показана «моментальная фотография» участка интерференционной картины двух монохроматических волн близкой длины, распространяющихся в одном направлении. В пространстве образуются биения с длиной огибающей

$$L = \frac{2\pi}{|k_1 - k_2|}, \quad (8.44)$$

где k_1 и k_2 – близкие волновые числа компонент. Огибающая биений является квазипериодической кривой. Спектральный состав такой волны будет представлен двумя составляющими, соответствующими, близкими по значению волновым числам k_1 и k_2 .

Встречаются волны в виде «синусоиды» с переменной амплитудой (рис. 8.3) у которых огибающая представляет собой ограниченную кривую. Это, так называемые, **цуги волн**. Если такую волну подвергнуть Фурье-разложению, то получится сплошной спектр, причем, чем длиннее цуг, тем уже у него спектр. Справедливо соотношение

$$L \cdot \Delta k \geq 2\pi, \quad (8.45)$$

где L – длина цуга, Δk – ширина спектра, т.е. протяжённость интервала волновых чисел, вне которого амплитуды составляющих разложения пренебрежимо малы. Уравнение (8.45) можно рассматривать как принцип не-

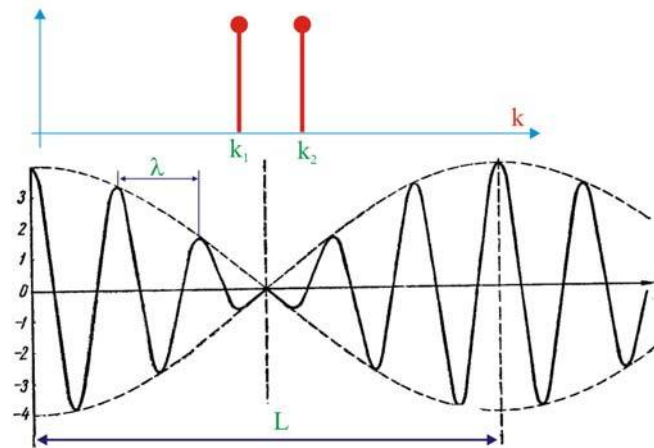


Рис. 8.2. Биения, их огибающая и дискретный спектр

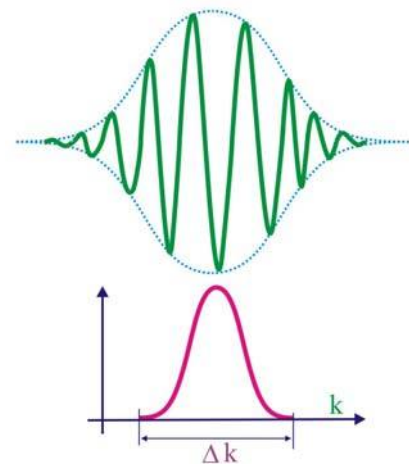


Рис. 8.3. Группа волн, огибающая и её сплошной спектр

определённости для акустического сигнала: чем уже спектр, тем хуже локализована волна в среде, т.е. тем больший участок пространства она занимает.

Определим величину групповой скорости для биений двух монохроматических волн с близкими длинами λ_1 и λ_2 , распространяющихся в среде со скоростями c_1 и c_2 , при условии

$$\begin{aligned}\lambda_1 &> \lambda_2; \\ c_1 &> c_2,\end{aligned}\tag{8.46}$$

что соответствует случаю нормальной дисперсии. При определении групповой скорости применяется метод «остановки» движения ко второй составляющей. Совместим новую систему отсчёта с составляющей, движущейся относительно среды со скоростью c_2 . Складывая далее относительную скорость огибающей со скоростью c_2 , получим искомую групповую скорость или скорость огибающей биений u . В выбранной системе отсчёта вторая синусоидальная волна неподвижна, а первая движется относительно неё со скоростью $c_1 - c_2$.

Изобразим синусоидальные волны в виде решеток с шагом, равным длине соответствующей волны (рис. 8.4)

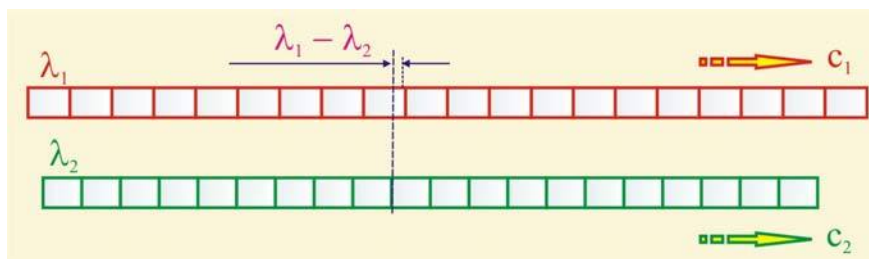


Рис. 8.4. К выводу уравнения групповой скорости

Проследим за совпадением вертикальных штрихов этих решеток друг с другом. При перемещении первой решетки относительно второй совпадение будет переходить от одного штриха к другому, средняя скорость этого перемещения подобна скорости огибающей в новой системе координат. Чтобы совпадение вертикальных штрихов совпало, первая волна должна пройти расстояние $\lambda_1 - \lambda_2$, причём такой переход займёт промежуток времени

$$\tau = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{c_1 - c_2}.\tag{8.47}$$

За время τ место совпадения штрихов сместится на расстояние λ_2 . Таким образом, относительную, скорость перемещения огибающей можно записать так

$$v_r = \lambda_2 \frac{c_1 - c_2}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Групповая скорость в этом случае представится в виде

$$u = c_2 - \lambda_2 \frac{c_1 - c_2}{\lambda_1 - \lambda_2}.\tag{8.48}$$

Для групповой скорости можно записать уравнения в иной форме, используя соотношения между входящими в уравнение (8.48) величинами

$$u = c_2 + k_1 \frac{c_1 - c_2}{k_1 - k_2};\tag{8.49}$$

$$u = \frac{k_1 c_1 - k_2 c_2}{k_1 - k_2};\tag{8.50}$$

$$u = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}.\tag{8.51}$$

В большинстве реальных процессов абсолютные значения волновых чисел и частот существенно превышают значение их разности, в этом случае групповую скорость можно выразить следующим образом

$$u = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda} = c + k \frac{dc}{dk} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (8.52)$$

Из полученных уравнений следует, что групповая скорость равна производной ω по k ($c = d\omega/dk$), а фазовая скорость – отношению ω/k .

Групповую и фазовую скорость можно определить из дисперсионного уравнения (8.38)

$$u = -\frac{\frac{\partial F}{\partial k}}{\frac{\partial F}{\partial \omega}} = \frac{\partial F \partial \omega}{\partial F \partial k} = \frac{\partial \omega}{\partial k}, \quad (8.53)$$

что совпадает с уравнением (8.52), полученным путём умозрительных заключений.

Применительно к биениям величину групповой скорости можно получить и расчетным способом [13]. Запишем уравнение биений, принимая, как это делается в акустике, давление за характерную величину волнового движения в упругой среде

$$p = p_1 \exp(-j\omega_1 t + jk_1 x) + p_2(-j\omega_2 t + jk_2 x).$$

Преобразуем последнее уравнение к виду

$$p = \exp(-j\omega_1 t + jk_1 x) \{p_1 + p_2 \exp[-j(\omega_2 - \omega_1)t + j(k_2 - k_1)x]\}.$$

Для реальных волн $|k_2 - k_1| \ll k_1$, что позволяет считать функцию, ограниченную фигурными скобками медленно меняющейся по сравнению с множителем, стоящим за скобками. Волна $\exp(-j\omega_1 t + jk_1 x)$ называется **несущей**, а функция $p_1 + p_2 \exp[j(k_2 - k_1)(x - ut)]$ будет описывать огибающую. Огибающая распространяется с неизменной скоростью

$$u = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1}. \quad (8.54)$$

Относительно огибающей фаза будет перемещаться со скоростью

$$c - u = \lambda \frac{dc}{d\lambda}.$$

(8.55)

При нормальной дисперсии эта скорость положительна, в случае аномальной дисперсии – отрицательна.

Для биений уравнение групповой скорости можно вывести, не прибегая к комплексной форме записи, с энергетических позиций. Предположим, что простейший волновой пакет из суперпозиции двух плоских, близких по частоте и синфазных волн распространяется в положительном направлении оси ОХ. Для волн одинаковой амплитуды их уравнения давления представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= p_0 \sin(\omega_1 t - k_1 x); \\ p_2 &= p_0 \sin(\omega_2 t - k_2 x). \end{aligned} \right\} \quad (8.56)$$

Если ввести обозначения: $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$; $\Delta\omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$; $k = \frac{k_2 + k_1}{2}$; $\Delta k = \frac{k_2 - k_1}{2}$, то

$$p = p_1 + p_2 = 2p_0 \cos(\Delta\omega t - \Delta k x) \cdot \sin(\omega t - kx). \quad (8.57)$$

Как видно из уравнения (8.57) амплитуда результирующей волны (огибающей) будет меняться во времени и в пространстве (вдоль оси ОХ) по закону

$$p = 2p_0 \cos(\Delta\omega t - \Delta k x). \quad (8.57)$$

Если фаза результирующей волны постоянна $(\Delta\omega t - \Delta k x) = \Phi = \text{const}$, то

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = u. \quad (8.58)$$

Объёмная плотность энергии ϖ (7.76) пропорциональна квадрату амплитуды волны, а скорость переноса энергии равна скорости перемещения поверхности $\varpi = \varpi_{\max}$, т.е.

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(2\pi\nu)}{d(2\pi/\lambda)} = \frac{\partial\nu}{\partial(1/\lambda)} = -\frac{\lambda^2}{2\pi} \cdot \frac{d\omega}{d\lambda} = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}, \quad (8.59)$$

т.е. мы снова пришли к уравнению (8.55).

9. Явление интерференции волн

9.1. Принцип Гюйгенса

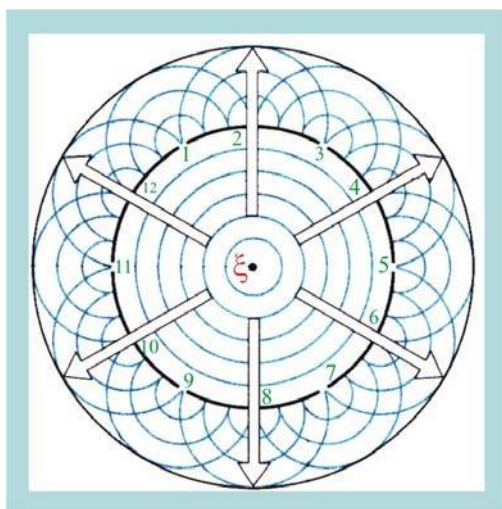


Рис. 9.1. Трансформация круговых волн

Если на пути круговой волны, возбуждаемой в кювете на поверхности жидкости путём периодического погружения в неё на незначительную глубину шарика на штоке, поставить цилиндрический экран с 12 вертикальных щелей, ширина которых меньше длины возбуждаемой поверхностной волны (рис.9.1), то щели будут источниками вторичных круговых волн, что демонстрирует отличие волнового движения от других видов механического движения. По сути, щели в данном случае являются генератором новых волновых поверхностей.

Нидерландский физик Христиан Гюйгенс (1629 – 1695), тот самый, который запатентовал маятниковые часы, изобретенные Галилео Галилеем, предложил простой способ определения волновой поверхности, например $\xi(t + \Delta t)$ в мо-

мент времени

$(t + \Delta t)$ по известному положению исходной волновой поверхности $\xi(t)$. Этот способ получил название **принципа Гюйгенса**. Суть принципа заключается в том, что в интервале времени $(t + \Delta t)$ каждую точку фронта $\xi(t)$ необходимо рассматривать как источник вторичных сферических волн радиуса $v\Delta t$, с центрами, располагающимися на волновой поверхности. В соответствии с принципом, огибающая совокупности вторичных волн показывает положение фронта $\xi(t + \Delta t)$ распространяющейся волны. Принцип Гюйгенса применим для любого типа волн, потому как представляется чисто геометрическими изысками, безотносительно физической природе и свойствам волн. Применение принципа оказалось весьма продуктивным при исследовании особенностей отражения и преломления волн при их переходе из одной среды в другую.

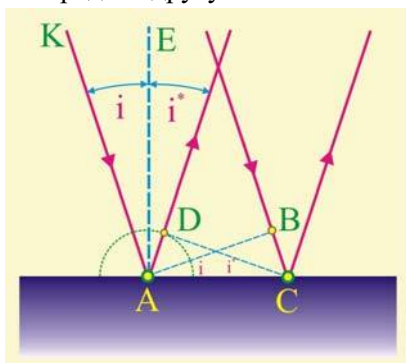


Рис. 9.2. Отражение волн

На плоскую границу двух сред падает плоская волна, распространяющаяся в направлении КА. Точка А, в соответствии с принципом Гюйгенса, начинает испускать вторичную сферическую волну. За промежуток времени $\Delta t = BC/v$ в течение которого волна проходит расстояние BC и достигает поверхности полусферы с радиусом AD, который равен $BC = AD = v\Delta t$. Положение фронта отражённой волны, в соответствии с рассматриваемым принципом, изобразится плоскостью CD. Из геометрических соображений, $(\Delta ABC = \Delta ADC)$ следует, что **угол падения равен углу отражения, т.е. $i = i^*$** . По аналогичной методике можно показать, что при преломлении волн справедливо утверждение

$$n_{2,1} = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2}, \quad (9.1)$$

где $n_{2,1}$ – относительный показатель преломления, r – угол преломления.

9.2. Интерференция волн

Рассмотрим две одинаково направленные волны, возбуждаемые источниками ξ_1 и ξ_2 с циклическими частотами ω_1 , ω_2 , начальными фазами α_1 , α_2 . В произвольной точке пространства M , расположенной на расстояниях r_1 и r_2 от источников будут возбуждаться колебания, удовлетворяющие уравнениям [18]

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{A_1}{r_1} \sin(\omega_1 t - k_1 r_1 + \alpha_1); \\ \xi_2 &= \frac{A_2}{r_2} \sin(\omega_2 t - k_2 r_2 + \alpha_2), \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

или с учётом обозначения фаз (рис. 9.3)

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{A_1}{r_1} \sin \Phi_1; \\ \xi_2 &= \frac{A_2}{r_2} \sin \Phi_2. \end{aligned} \right\}$$

(9.3)

В соответствии с принципом суперпозиции суммарная волна в точке M определится как

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A \sin \Phi. \quad (9.4)$$

Величины A и Φ возможно определить методом векторных диаграмм, путём построения параллелограмма на векторах A_1 и A_2 (рис.9.3)

$$A^2 = \left(\frac{A_1}{r_1} \right)^2 + \left(\frac{A_2}{r_2} \right)^2 + 2 \frac{A_1}{r_1} \frac{A_2}{r_2} \cos(\Phi_2 - \Phi_1), \quad (9.4)$$

$$\Phi = \arctg \frac{\frac{A_1}{r_1} \sin \Phi_1 + \frac{A_2}{r_2} \sin \Phi_2}{\frac{A_1}{r_1} \cos \Phi_1 + \frac{A_2}{r_2} \cos \Phi_2}. \quad (9.5)$$

Как видно из уравнений (9.4) и (9.5) возможны при суммировании два принципиально разных случая. Если разность фаз источников волн $(\Phi_2 - \Phi_1) \neq f(t)$ в точке M не изменяется во времени, то такие источники называются **когерентными**. В противном случае, при изменении разности фаз во времени $(\Phi_2 - \Phi_1) = f(t)$, источники считаются **некогерентными**.

Запишем уравнение разности фаз исходных волн, через скорости их распространения. Поскольку $k = \omega/v$, то

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \omega_1 t - \omega_1 \frac{r_1}{v_1} + \alpha_1; \\ \Phi_2 &= \omega_2 t - \omega_2 \frac{r_2}{v_2} + \alpha_2. \end{aligned} \right\} \quad (9.6)$$

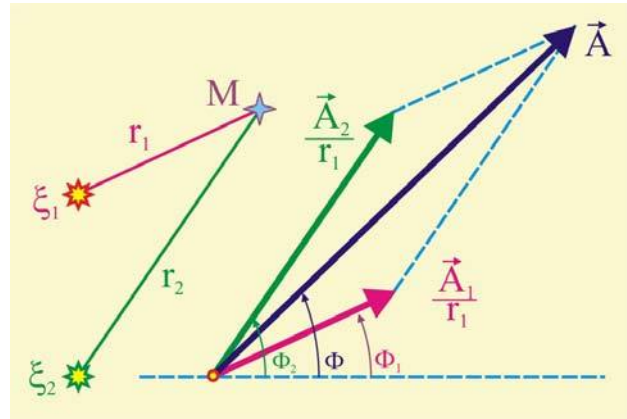


Рис. 9.3. Интерференция двух волн

$$\Phi_2 - \Phi_1 = (\omega_2 - \omega_1)t - \left(\omega_2 \frac{r_2}{v_2} - \omega_1 \frac{r_1}{v_1} \right) + (\alpha_2 - \alpha_1). \quad (9.7)$$

Поскольку второй и третий члены правой части уравнения (9.7) не зависят от времени ни при каких обстоятельствах, то условие когерентности источников определяются первым членом. Очевидно, что если $\omega_1 = \omega_2$, то $\Phi_2 - \Phi_1 = 0$, т.е. источники когерентны. Таким образом, **две волны когерентны, если их частоты одинаковы и некогерентные, если частоты разные**. Из уравнения (9.7), кроме того, следует, что в точке М суммарная амплитуда некогерентных волн будет изменяться во времени в пределах

$$\begin{aligned} A_{\max} &= \left| \frac{A_1}{r_1} + \frac{A_2}{r_2} \right|, \\ A_{\min} &= \left| \frac{A_1}{r_1} - \frac{A_2}{r_2} \right|, \end{aligned} \quad (9.8)$$

причём циклическая частота изменения суммарной амплитуды будет происходить с частотой изменения результирующей фазы ($\Phi_2 - \Phi_1$), другими словами, с циклической частотой, равной $|\omega_2 - \omega_1|$.

Определим среднее значение квадрата результирующей амплитуды за время её изменения τ

$$\langle A^2 \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau A^2 dt = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left[\left(\frac{A_1}{r_1} \right)^2 + \left(\frac{A_2}{r_2} \right)^2 + 2A_1A_2 \cos(\Phi_2 - \Phi_1) \right] dt, \quad (9.9)$$

$$\langle A^2 \rangle = \left(\frac{A_1}{r_1} \right)^2 + \left(\frac{A_2}{r_2} \right)^2 + \frac{1}{\tau} \frac{2A_1A_2}{r_1r_2} \int_0^\tau \cos(\Phi_2 - \Phi_1) dt. \quad (9.10)$$

Разность фаз за время одного периода τ меняется на 2π , поэтому

$$\int_0^\tau \cos(\Phi_2 - \Phi_1) dt = 0, \quad (9.11)$$

из чего следует, что

$$\langle A^2 \rangle = \left(\frac{A_1}{r_1} \right)^2 + \left(\frac{A_2}{r_2} \right)^2. \quad (9.12)$$

Полученное уравнение (9.12) утверждает, что **энергия результирующих колебаний в каждой точке пространства равна сумме энергий всех некогерентных источников**.

Если источники когерентны, т.е. $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, то для изотропной среды $v_1 = v_2 = v$. В этом случае для разности фаз можно переписать уравнение (9.7) следующим образом

$$\Phi_2 - \Phi_1 = -\frac{\omega}{v}(r_2 - r_1) + (\alpha_2 - \alpha_1) = -k(r_2 - r_1) + (\alpha_2 - \alpha_1). \quad (9.13)$$

Квадрат результирующей амплитуды примет вид

$$A^2 = \left(\frac{A_1}{r_1} \right)^2 + \left(\frac{A_2}{r_2} \right)^2 + \frac{2A_1A_2}{r_1r_2} \cos[k(r_2 - r_1) - (\alpha_2 - \alpha_1)]. \quad (9.14)$$

При рассмотрении уравнения (9.14) следует иметь в виду, что $\alpha_2 - \alpha_1 = \text{const}$ и $k = \text{const}$, что означает независимость результирующей амплитуды от времени. Амплитуда A будет максимальна во всех точках, где аргумент косинуса равен π . Максимальное значение амплитуды

$$A_{\max} = \frac{A_1}{r_1} + \frac{A_2}{r_2}, \quad (9.15)$$

будет иметь место, таким образом, при условии

$$k(r_2 - r_1) + \alpha_1 - \alpha_2 = 2\pi m \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (9.16)$$

Уравнение (9.16) можно преобразовать, заменив волновое число его значением $k = 2\pi/\lambda$

$$r_2 - r_1 = m\lambda + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\pi} \lambda. \quad (9.17)$$

При $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$

$$r_1 - r_2 = m\lambda. \quad (9.18)$$

Минимальное значение амплитуды

$$A_{\min} = \left| \frac{A_1}{r_1} - \frac{A_2}{r_2} \right|, \quad (9.19)$$

будет иметь место в точках пространства, где выполняется условие

$$k(r_2 - r_1) + \alpha_1 - \alpha_2 = (2m - 1)\pi, \quad (9.20)$$

или

$$r_2 - r_1 = (2m - 1) \frac{\lambda}{2} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\pi} \lambda. \quad (9.21)$$

Если $\alpha_2 - \alpha_1 = 0$, то

$$r_2 - r_1 = (2m - 1) \frac{\lambda}{2}. \quad (9.22)$$

Величина $r_2 - r_1$ называется геометрической разностью хода волн от источников ξ_1 и ξ_2 до рассматриваемой точки пространства.

В пространстве, окружающем источники когерентных волн будет наблюдаться взаимное усиление и ослабление колебаний в зависимости от соотношения фаз. **Это явление называется интерференцией волн.** В результате интерференции может происходить взаимное усиление и ослабление когерентных волн [19]. На рис.9.4 показан схематически случай усиления и ослабления двух когерентных вол, правая часть схемы соответствует полному взаимному гашению волн.

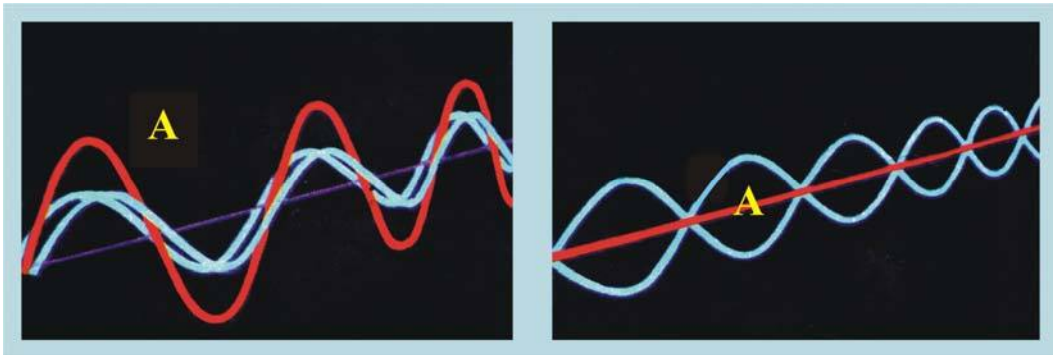


Рис. 9.4. Взаимное усиление и ослабление двух волн [20]

В пространстве интерферирующие волны образуют картину распределения максимумов и минимумов амплитуды результирующих колебаний или суммарной энергии волн. На рис.

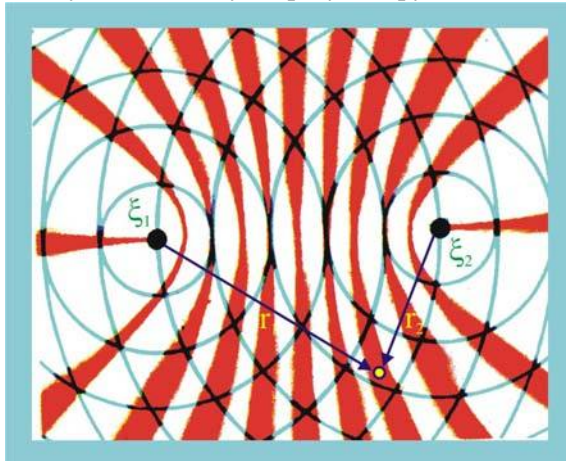


Рис. 9.5. Интерференция волн [20]

9.5 приведена схема интерференции двух круговых волн на поверхности жидкости от когерентных источников ξ_1 и ξ_2 . Как видно, максимумы энергетического проявления волн имеют определённую геометрически правильную структуру. Максимальным значениям амплитуд (энергий) соответствуют красные гиперболические области.

Явление интерференции наблюдается не только для упругих волн, оно было обнаружено и исследовано при-

нительно к электромагнитным, акустическим, гравитационным типам волн.

9.3. Стоячие волны

Особым случаем интерференции являются стоячие волны, образующиеся вследствие взаимодействия двух бегущих синусоидальных волн, обладающих одинаковыми амплитудами, частотами и распространяющихся во взаимно-противоположных направлениях. Простейшие одномерные стоячие волны можно наблюдать на струне, натянутой между двумя

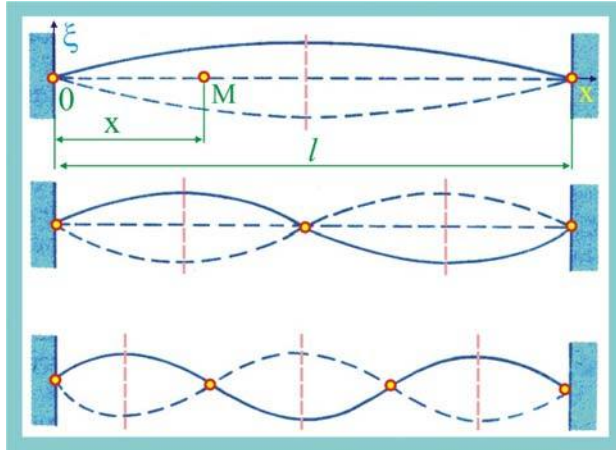


Рис. 9.6. Стоячие волны на струне [21]
вызванное потерями в местах закрепления концов струны.

опорами (рис. 9.6). В данном случае интерферируют две волны, прямая и отражённая. Получим уравнение одномерной стоячей волны, т.е. установим зависимость смещения точек струны ξ от времени t . Прямую волну струны зададим стандартным уравнением

$$\xi_1 = A \sin(\omega t - kx). \quad (9.23)$$

В отражённой волне смещение ξ_2 в точке М будет отставать по фазе на величину

$$\Delta\Phi = 2k(\ell - x) + \varphi, \quad (9.24)$$

где φ дополнительное отставание по фазе,

$$\xi_2 = A \sin[\omega t + k(x - 2\ell) - \varphi]. \quad (9.25)$$

Стоячая волна, как результат суперпозиции представится следующим образом

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A \sin(\omega t - kx) + A \sin[\omega t + k(x - 2\ell) - \varphi]. \quad (9.26)$$

Преобразуем сумму синусов в последнем уравнении следующим образом:

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \xi &= 2A \cos \left[k(\ell - x) + \frac{\varphi}{2} \right] \cdot \sin \left(\omega t - k\ell - \frac{\varphi}{2} \right). \end{aligned} \quad (9.27)$$

Полученное уравнение стоячей волны (9.27) справедливо как для поперечных так и для продольных волн. Первый множитель этого уравнения определяет поведение амплитуды стоячей волны, которая, кстати, не зависит от времени, но зависит от x

$$A_{st} = 2A \left| \cos \left[k(\ell - x) + \frac{\varphi}{2} \right] \right|. \quad (9.28)$$

Очевидно, что максимум амплитуды $2A$ будет наблюдаться тогда, когда косинус равен единице

$$k(\ell - x) + \frac{\varphi}{2} = 2m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (9.29)$$

Точки, соответствующие максимуму амплитуды, называются **пучностями стоячей волны** (на рис.9.6 пучности отмечены вертикальными прерывистыми линиями).

Некоторые точки струны не будут смещаться, эти точки называются **узлами стоячей волны**, их координаты удовлетворяют уравнению

$$k(\ell - x) + \frac{\varphi}{2} = (2m + 1)\frac{\pi}{2} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (9.30)$$

9.4. Особенности волнового движения струны

Для выяснения подробностей физического механизма возникновения стоячих волн, рассмотрим особенности колебаний струны. Напомним, что струну нельзя рассматривать как колебательную систему с массой, сосредоточенной в одной или нескольких точках, колебания которых следует описать. Особенность струны, как колебательной системы, заключается в том, что её масса равномерно распределена по её длине. В этой связи движение одной части струны не может служить точным описанием других её частей; движение каждой точки струны должно быть описано отдельно [22].

Естественно, что к задаче о колебаниях струны можно подойти методами теоретической механики, т.е. представить струну механической системой, состоящей из большого числа точек N . Затем составить N уравнений для равномерно размещённых на невесомой нити масс. Для получения достоверного решения уравнений должно быть очень много. Действительно, такой подход теоретически возможен, однако следовать им не рационально ввиду необходимости «перелопачивать» огромное количество, в конечном счете, во множестве своём бесполезной информации. А задача, на самом деле, имеет достаточно простой путь решения, если использовать нетрадиционный для механики приём. Новый подход заключается в том, что: во-первых, надо отказаться от самой идеи рассматривать движение бесконечного числа отдельных точек струны; во-вторых, необходимо рассматривать не движение, а форму струны в целом. В каждый момент времени струна имеет определённую форму, которую следует описать математически, приняв, что ξ есть смещение от положения равновесия части струны, находящийся на расстоянии x от одного из её концов. Другими словами, необходимо установить зависимость $\xi = f(x, t)$, т.е. найти зависимость между конфигурацией струны и её движением

Предположим, что рассматривается длинная тонкая однородная струна с погонной массой ϵ , которая измеряется в кг/м. Струна, разматываемая с катушки, продета сквозь стеклянную трубку (рис. 9.7). Катушка вращается таким образом, что свободный конец струны движется со скоростью v находясь, одновременно под действием силы натяжения T . Рассмотрим малый участок трубки длиной Δs с целью выяснения силы, с которой действует струна на ограничивающую её трубку. Силы трения будем полагать отсутствующими. При выборе достаточно малой величины Δs форма трубки и форма струны будут совпадать, причём это будет часть окружности радиуса R . Отсутствие резких изломов на трубке позволяет принять постоянство натяжения струны на всём рассматриваемом участке. Ввиду изменения формы струны при сравнении сил натяжения, приложенных к концам, появляется разность

$$\Delta T \cong \varphi T \cong \frac{T \Delta s}{R}. \quad (9.31)$$

Кроме того, на движущуюся криволинейно струну будет действовать так называемая «центробежная сила», вызванная нормальным ускорением, причём

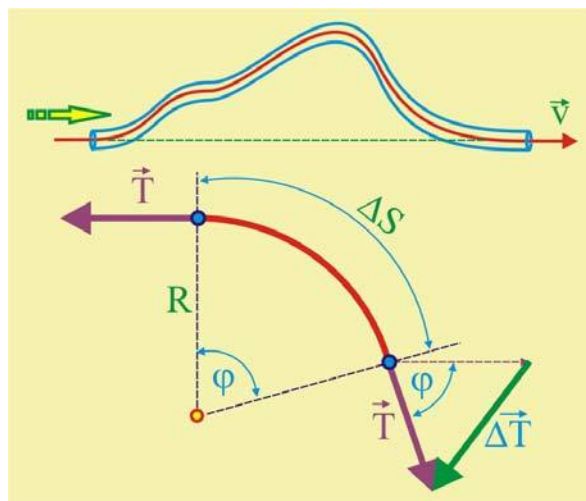


Рис. 9.7. Силы, действующие на струну

$$F_i = \frac{\varepsilon \Delta s v^2}{R}. \quad (9.32)$$

Суммарная сила будет направлена внутрь трубки, её величина определится как

$$F_z = \frac{\Delta s}{R} (T - \varepsilon v^2). \quad (9.33)$$

Из последнего уравнения видно, что если струна будет передвигаться со скоростью

$$c = \sqrt{\frac{T}{\varepsilon}}, \quad (9.34)$$

то результирующая сила будет равна нулю. При скорости движения c струна не станет оказывать никакого действия на стенки трубки по всей рассматриваемой длине Δs . Если теперь трубку убрать, например, сломать, то струна сохранит форму трубки и её форма «застынет» в пространстве.

Очевидно, что струна, пробегающая со скоростью c и имеющая определённую форму волны, эквивалентна струне, находящейся в покое, по которой пробегает точно такая же волна со скоростью c . Проведенные рассуждения показывают, что вдоль струны распространяется волна, **не изменяя своей формы по мере продвижения**. Это свойство струны можно выразить математически, если движение струны представить в виде уравнения

$$\xi = f_1(x - ct) + f_2(x + ct), \quad (9.35)$$

где $f_1(x - ct)$ – уравнение зависимости формы струны от времени t (при $t=0$) и координаты x

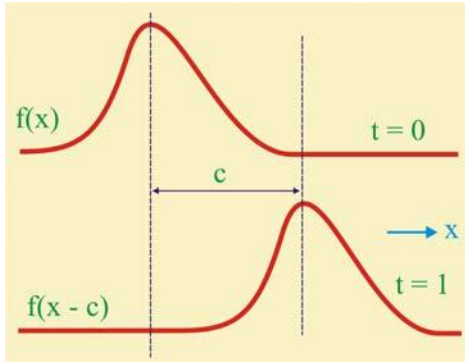


Рис. 9.8. Движение волны по струне

при перемещении в положительном направлении оси x , $f_2(x + ct)$ – такое же уравнение при $t = 1$.

Любое возможное движение струны можно представить как волны имеющие скорость c , но движущиеся в противоположных направлениях. такими функциями могут быть, в частности,

$$\xi(x, t) = A \sin[2\pi k(x - ct)],$$

$$\xi(x, t) = B(x - ct)^3 e^{a(x-ct)^2},$$

$$\xi(x, t) = C \exp[jk(x - ct)],$$

$$\xi(x, t) = C e^{jkx} e^{-j\omega t}.$$

Особенность приведенных функций заключается в том, что f изменяется одинаково и на одну и ту же величину, когда или t меняется на величину a , или x меняется на величину ca . Это свойство функции выражается следующим образом

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1(x - ct) = -c \frac{\partial}{\partial x} f_1(x - ct), \quad (9.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f_2(x + ct) = c \frac{\partial}{\partial x} f_2(x + ct). \quad (9.37)$$

где символ $\partial/\partial t$ – обозначает скорость изменения функции при изменении времени t , когда x остаётся постоянным, а величина $\partial/\partial x$ – определяет скорость изменения функции при изменении x и постоянстве t . В каждом конкретном случае вид функций f_1 и f_2 определяется **начальными условиями**: начальной формой и начальной скоростью частиц струны. Если смещение струны при $t = 0$ обозначить через $\xi_0(x)$, а скорость – $v_0(x)$, то будем при $t = 0$ иметь

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) + f_2(x) &= \xi_0(x); \\ \frac{\partial}{\partial t} [f_1(x - ct) + f_2(x + ct)] &= v_0(x). \end{aligned} \right\} \quad (9.38)$$

В общем виде уравнение (9.38) с учётом соотношений (9.36) и (9.37) можно записать следующим образом

$$\frac{d}{dx}[-f_1(x) + f_2(x)] = \frac{1}{c} v_0(x). \quad (9.39)$$

Интегрирование полученного уравнения целесообразно производить, введя обозначение

$$S(z) = \int_0^z v_0(x) dx, \quad (9.40)$$

где $z = x \pm ct$. Форма струны, удовлетворяющая принятым начальным условиям будет удовлетворять уравнению

$$\xi = \frac{1}{2} \left[\xi_0(x - ct) + \xi_0(x + ct) - \frac{1}{c} S(x - ct) + \frac{1}{c} S(x + ct) \right], \quad (9.41)$$

естественно, что при $t = 0$, $\xi = \xi_0(x)$ и $\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{dS(x)}{dx} = v_0(x)$. Как видно решение построено в форме двух парциальных волн, бегущих в противоположных направлениях. Взаимно налагаясь в момент времени $t = 0$, они воспроизводят начальное состояние струны, а затем расходятся снова в разные стороны.

Полученное решение относится к бесконечно длинной струне, на самом же деле струна должна иметь начало и конец, т.е. оба конца струны должны быть закреплены, что оказывает влияние на перемещение волн по теперь уже конечной длине. Закрепление струны в опорах требует введение в рассмотрение граничных условий. **Граничные условия представляют собой очевидные требования к кинематическим и динамическим параметрам движения в неких характерных точках, в частности в опорах.** Требования в этих особых точках должны выполняться в любой момент времени, в отличие от начальных условий, которые выполняются только в определённый момент времени $t = 0$. В этой связи граничные условия являются более важными при определении общего поведения струны при распространении по ней волн. Если струна конечна, то в точке $x = 0$ непременно должно для неподвижных опор выполняться условие $\xi = 0$ для любого момента времени.

Рассмотрим случай жёсткой опоры в точке $x = 0$, в этом случае $\xi = 0$ при $x = 0$. Такое предположение, которое, кстати, имеет место в реальных струнах, делает невозможным использование решений вида

$$\left. \begin{aligned} \xi &= f_1(x - ct); \\ \xi &= f_2(x + ct), \end{aligned} \right\} \quad (9.42)$$

потому, что они не обращаются в нуль при $x = 0$ для любого разумного значения t . Однако оговорённому граничному условию будет удовлетворять решение вида

$$\xi = -f_1(x - ct) + f_1(-x - ct), \quad (9.43)$$

действительно, при $x = 0$

$$\xi = -f_1(-ct) + f_1(-ct) = 0, \quad (9.44)$$

для любого значения t .

На рис. 9.9 показана схема взаимодействия волны с неподвижной опорой, пунктиром показано воображаемое положение волны по другую сторону от концевой опоры. Гребень (пик) волны перемещающейся влево отражается от опоры в точке $x = 0$ и начинает перемещаться в обратном направлении вправо, сохраняя первоначальную форму, но изменив свой знак. Принятые граничные условия равносильны требованию отражения. Более сложные граничные условия непременно повлекут за собой изменение формы волны после отражения. Когда волна ударяется о жёсткую опору, то опора оказывает на струну реакцию, дающую смещение струны равное нулю $\xi = 0$ при $x = 0$, такая реакция опоры порождает отражённую волну.

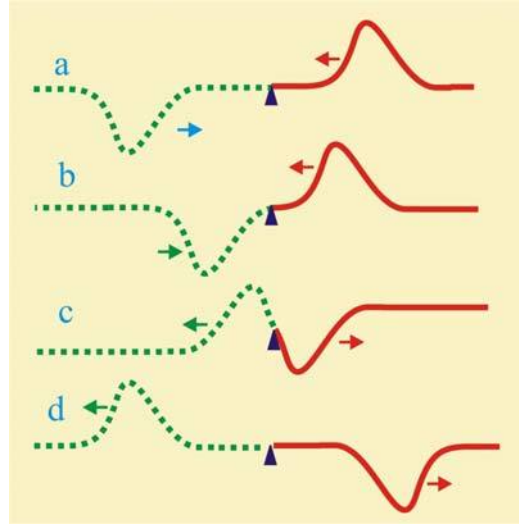


Рис. 9.9. Отражение волны

Уравнение движения струны, удовлетворяющее граничному условию $\xi = 0$ при $x = 0$ и начальным условиям $\xi = \xi_0(x)$, $v = v_0(x)$ при $t = 0$ имеет вид [22]

$$\xi = \left[Y(x - ct) + Y(x + ct) - \frac{1}{c} H(x - ct) + \frac{1}{c} H(x + ct) \right], \quad (9.45)$$

где

$$Y(z) = \begin{cases} \xi_0(z) & (z > 0), \\ -\xi_0(-z) & (z < 0), \end{cases}$$

$$H(z) = \begin{cases} S(z) & (z > 0), \\ S(-z) & (z < 0), \end{cases}$$

$$S(z) = \int_0^z v_0(x) dx.$$

Реальные струны, в большинстве своём закрепляются с двух концов, что приводит к одновременному действию двух граничных условий. Если струна длины l закреплена между двумя жёсткими опорами, то второе граничное условие представится как $\xi = 0$ при $x = l$, причём, если вторая опора тоже жёсткая, то и отражение на втором конце струны должно протекать без изменения формы волны.

Чтобы удовлетворить выбранным двум граничным и начальным условиям уравнение движения струны должно принять вид

$$\xi = \frac{1}{2} \left[Y(x - ct) + Y(x + ct) - \frac{1}{c} H(x - ct) + \frac{1}{c} H(x + ct) \right], \quad (9.46)$$

где

$$Y(z) = \begin{cases} \xi_0(z) & (-\ell < z < 0), \\ -\xi_0(-z) & (0 < z < \ell), \\ -\xi_0(2\ell - z) & (\ell < z < 2\ell), \\ \xi_0(z - 2\ell) & (2\ell < z < 3\ell), \\ \dots \end{cases}$$

$$H(z) = \begin{cases} S(-z) & (-\ell < z < 0), \\ S(z) & (0 < z < \ell), \\ S(2\ell - z) & (\ell < z < 2\ell), \\ S(z - 2\ell) & (2\ell < z < 3\ell), \\ \dots \end{cases}$$

$$S(z) = \int_0^z v_0(x) dx.$$

Если оба конца струны закреплены в неподвижных жёстких опорах, то её движение будет периодическим. При соответствующем способе выведения струны из состояния равновесия, возникающее движение может быть гармоническим, что является частным случае периодического движения. Определим далее простые гармонические колебания (моды) возникновения которых возможно на струне с закреплёнными концами. Необходимо получить уравнение, связывающее форму струны и её движение. Возвращаясь к уравнениям (9.36) и (9.37), отметим, что если их продифференцировать, то мы придём к обычному волновому уравнению (7.41)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad c = \sqrt{\frac{T}{\varepsilon}}. \quad (9.46)$$

В данном случае производная $\partial^2 \xi / \partial x^2$ будет пропорциональна кривизне струны в данный момент времени. Уравнение (9.46) устанавливает, что ускорение некоторого элемента струны прямо пропорционально кривизне струны в области данного элемента её длины. Если кривизна положительна, то и ускорение имеет положительный знак. В соответствии со вторым законом Ньютона, который никто не отменял и для рассматриваемого случая движения, кривизна должна быть пропорциональна результирующей силе, действующей на рассматриваемый элемент длины в тот же момент времени.

Результирующая сила F , действующая на элемент струны dS направлена перпендикулярно оси x , потому что (рис. 9.10)

$$F = T(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1).$$

При малых смещениях струны из положения равновесия углы φ_1 и φ_2 будут так же малы, можно считать, что $\sin \varphi \cong \operatorname{tg} \varphi$, следовательно $\operatorname{tg} \varphi_1$ равен наклону струны, т.е.

$$\operatorname{tg} \varphi \cong \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

в данный момент времени в точке струны с координатой x_1 . Аналогично, в точке $x + dx$ наклон струны будет $\operatorname{tg} \varphi_2$. По теореме о конечном приращении функции можно записать

$$f(x + dx) = f(x) + dx \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (9.47)$$

Полную вертикальную составляющую результирующей сил натяжения, действующих на элемент dS можно представить так

$$T \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x \right] = T dx \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = T dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (9.48)$$

Поскольку масса рассматриваемого элемента струны равна εdS , то при малых углах отклонения массу можно положить равной εdx . Движение элемента струны запишется следующим образом

$$\varepsilon dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = T dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon}{T} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (9.49)$$

что идентично уравнению (9.46).

Гармонические колебания в струне становятся возможными, если каждая часть струны будет колебаться с одной и той же частотой. Математическое выражение этого условия состоит в том, что форма струны $\xi(x, t)$ должна представляться экспоненциальной функцией, умноженную на вторую функцию, зависящую только от x

$$\xi = \Re(x) e^{-2\pi i \nu t}, \quad (9.50)$$

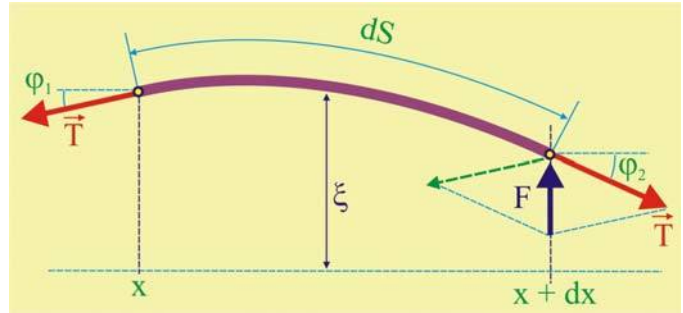


Рис. 9.10. Силы, приложенные к элементу струны

где ν – частота колебаний. Если уравнение (9.50) подставить в уравнение волны (9.46) то неизвестная функция $\mathfrak{R}$ должна удовлетворять условию

$$\frac{d^2 \mathfrak{R}}{dt^2} = \frac{4\pi^2 \nu^2}{c^2} \mathfrak{R} = 0, \quad c^2 = \frac{T}{\varepsilon}. \quad (9.51)$$

Решениями этого уравнения будут являться две экспоненциальные функции

$$\left. \begin{aligned} &\exp\left(\frac{2\pi j \nu x}{c}\right); \\ &\exp\left(-\frac{2\pi j \nu x}{c}\right). \end{aligned} \right\} \quad (9.52)$$

В этой связи все простые гармонические колебания струны должны иметь вид

$$\xi = C_+ \exp\left[\left(\frac{2\pi j \nu}{c}\right)(x - ct)\right] + C_- \exp\left[\left(\frac{2\pi j \nu}{c}\right)(-x - ct)\right], \quad (9.53)$$

или

$$\xi = A_+ \cos\left[\frac{2\pi \nu}{c}(x - ct) - \Phi_+\right] + A_- \cos\left[\frac{2\pi \nu}{c}(x + ct) - \Phi_-\right]. \quad (9.54)$$

Полученное уравнение представляет собой две синусоидальные волны, в общем случае, с различными амплитудами, распространяющиеся в противоположных направлениях. Таки образом, напрашивается вывод о том, что если функция $\xi(t)$ синусоидальна, то и функция $\xi(x)$ тоже должна быть синусоидальна.

Длина волны $\lambda = c/\nu$ будет пространственно равна расстоянию между началом и концом каждого периода синусоидальной волны вдоль струны. Если амплитуды, распространяющихся по струне волн в противоположных направлениях одинаковы (потери в опорах отсутствуют и сопротивление движению пренебрежимо мало), то уравнение (9.54) можно преобразовать по формуле суммы двух косинусов

$$\xi = A \cos\left(\frac{2\pi \nu}{c}x - \Omega\right) \cdot \cos(2\pi \nu t - \Phi), \quad (9.55)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= 2A_+ = 2A_-; \\ \Omega &= \frac{\Phi_- + \Phi_+}{2}; \\ \Phi &= \frac{\Phi_- - \Phi_+}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (9.56)$$

В данном случае, как и следовало ожидать, две бегущие волны объединяются в виде одной стоячей волны, причём в точках с координатами, удовлетворяющими условию

$$\cos\left(\frac{2\pi \nu}{c}x - \Omega\right) = 0, \quad (9.57)$$

волны компенсируют друг друга (рис. 9.4), т.е. в этих точках струна остаётся неподвижной. Условие (9.57) является уравнением узлов. При сделанных допущениях узловые точки размещаются вдоль струны на расстояниях $c/2\nu$ одна от другой по две на каждом отрезке, равном длине волны. Посередине между узлами, как отмечено ранее, будут находиться пучности.

Строго говоря, частоты гармонических волн не могут принимать произвольного значения, потому что решение (9.55) наряду с прочим должно удовлетворять и граничным условиям, т.е. узловые точки стоячей волны должны совпадать с местоположением опор

$$\mathfrak{R} = A \sin\left(\frac{2\pi \nu}{c}x\right) \cdot \cos(2\pi \nu t - \Phi). \quad (9.56)$$

Таким образом, стоячие волны могут возникать при условии

$$\xi = A_n \sin \frac{\pi n x}{\ell} \cos \left(\frac{\pi n c}{\ell} t - \Phi_n \right), \quad (n = 1, 2, 3, 4, \dots), \quad (9.57)$$

$$v_n = \frac{nc}{2\ell} = \frac{n}{2\ell} \sqrt{\frac{T}{\varepsilon}}. \quad (9.58)$$

Самая низкая допустимая частота

$$v_1 = \frac{c}{2\ell}, \quad (9.59)$$

называется основной частотой. Все остальные возможные частоты для струны называются обертонами, потому что имеют простое числовое соотношение с основным тоном. Среди множества колебательных систем, струна является одной из небольшого числа, обладающая гармоническими обертонами, что и является причиной применения струн во многих типах музыкальных инструментов. Звук, обогащённый гармоническими обертонами, кажется на слух особенно приятным в музыкальном отношении.

9.5. Волновое сопротивление и проводимость

Достаточно простой случай анализа влияния опор на волновое движение можно получить при рассмотрении бесконечной струны, закреплённой в точках $x=0$ и $x=\infty$. Пусть, погонная масса струны составляет ε , а скорость волны $c = \sqrt{T/\varepsilon}$. Опора считается неподвижной в направлении x , что собственно обеспечивает натяжение струны T , но может совершать перемещения в направлении вертикальной оси ξ , перпендикулярной положению статического равновесия струны. Поперечная сила, прикладываемая для возбуждения волны, будет двигать не только струну, но и саму опору. В этом случае говорят о **волновом сопротивлении (импедансе)** струны, которое частично поглощает энергию волнового движения, внося определённые коррективы в процесс распространения волн. Импеданс струны представляет собой отношение поперечной силы, приложенной к концу струны, к поперечной скорости этого конца, если прикладываемая сила имеет гармонический характер, а импедансом опоры можно пренебречь.

Пусть угол между направлением конца отклонённой струны и положением равновесия определяется как

$$\theta = \arctg \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x=0} \right],$$

продольная компонента силы на конце струны определится как $T_x = T \cos \theta$.

Если принять, что $\partial \xi / \partial x$ мало, то продольная компонента равна постоянной силе натяжения T , а поперечная составляющая, действующая на точку закрепления конца струны равна:

$$f(t) = T \tg \theta = -T \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x=0}. \quad (9.60)$$

Если приложенная сила периодическая и изменяется по гармоническому закону

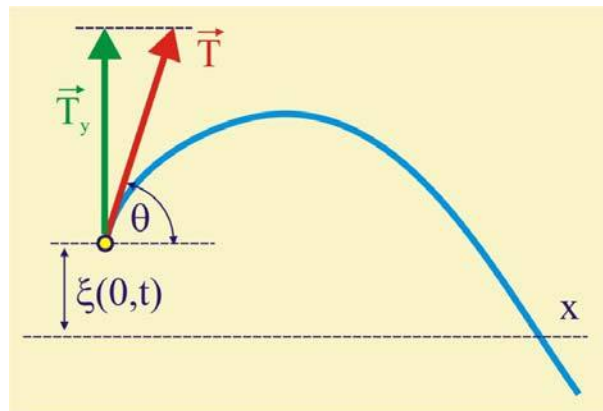


Рис. 9.11. Силы, приложенные к опоре

$$f(t) = F_0 \exp(-j\omega t), \quad (9.61)$$

то форма струны должна быть синусоидальной, что следует из уравнения (9.56). В рассматриваемом случае волна должна распространяться в положительном направлении оси x , потому что она начинается при $x = 0$, в этой связи в уравнение волны войдёт множитель

$$A \exp(jkx), \quad (9.62)$$

где

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (9.63)$$

Смещение струны в этом случае можно подчинить следующему уравнению

$$\xi(x, t) = A \exp(jkx - j\omega t). \quad (9.64)$$

Волна, распространяющаяся в положительном направлении, будет описываться уравнением

$$\xi(x, t) = A \exp[j(kx + \omega t)], \quad (9.65)$$

в отрицательном направлении оси x

$$\xi(x, t) = A \exp[-j(kx + \omega t)].$$

(9.66)

Амплитудное значение смещения определим из уравнения (9.60)

$$F_0 \exp(-j\omega t) = -T \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x=0} = -j \left(\frac{T\omega A}{c} \right) \cdot \exp(-j\omega t). \quad (9.67)$$

Смещение и скорость струны, таким образом, определится как

$$\xi = \frac{1}{j\omega \varepsilon c} F_0 \exp[jk(x - ct)]; \quad (9.68)$$

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{F_0}{\varepsilon c} \exp[jk(x - ct)]. \quad (9.69)$$

Входным импедансом струны называется отношение между приложенной силой и скорости струны в поперечном направлении в точке $x = 0$

$$\varepsilon c = \frac{T}{c} = \sqrt{T\varepsilon}. \quad (9.70)$$

Уравнение (9.70) получено для бесконечной струны, оно определяет **волновое или характеристическое сопротивление струны**. Для бесконечной струны эта величина вещественна, что указывает на то, что непрерывно поступающая энергия полностью переходит в энергию волнового движения и не возвращается в виду бесконечности пути распространения. В случае конечной длины струны **входной импеданс отличается от волнового сопротивления εc** . Средняя мощность, подводимая к струне, определяется в виде среднего значения силы на скорость в точке $x = 0$

$$N = \frac{1}{2} \frac{|F_0|^2}{\varepsilon c} = \frac{1}{2} \varepsilon c |v|^2. \quad (9.71)$$

Понятие импеданса распространяется на колебания таких систем как излучатели и приёмники звука типа рупоров, струн, труб и т.д. Импеданс рассматривается как в случае струны как отношение комплексных амплитуд, например, звукового давления к колебательной объёмной скорости. В общем виде уравнение импеданса записывается следующим образом

$$Z = \operatorname{Re} Z + j \operatorname{Im} Z, \quad (9.72)$$

где $\operatorname{Re} Z$ – активное акустическое сопротивление, величина которого связана с диссипацией энергии волнового движения в самой акустической (колебательной) системе и потерями на излучение, $\operatorname{Im} Z$ – реактивное акустическое сопротивление обусловленное реакцией сил инерции (масс) или сил упругости (гибкости). В этой связи реактивное сопротивление бывает инерционным или упругим. Акустическое (волновое) сопротивление в системе Си измеряется в $\text{Н} \cdot \text{с} / \text{м}^5$.

В акустике импеданс выражается в виде отношения звукового давления к колебательной скорости в данной точке. Понятие импеданса имеет существенное значение при распространении волнового движения в трубах переменного сечения, при рассмотрении излучающих систем, как это было показано на примере струны. Для излучающих систем импеданс при заданной объёмной скорости определяет мощность излучения и КПД источника, для приёмников волнового движения импеданс характеризует условия согласования со средой. Для плоских волн импеданс эквивалентен волновому сопротивлению, которое в акустике определяется как

$$R_w = \frac{p}{\partial \xi / \partial t} = \rho c. \quad (9.73)$$

Волновое сопротивление является одной из важнейших характеристик среды, определяющей условия отражения и преломления упругих волн на её границе. При нормальном падении плоской упругой волны на плоскую границу раздела двух сред, коэффициент отражения определяется только **отношением волновых сопротивлений** этих сред. В случае равенства волновых сопротивлений волна проходит границу без отражения. Сопротивление излучения для любых типов излучателей в данную среду пропорционально её волновому сопротивлению.

10. Упругие волны акустического диапазона

10.1. Основные понятия и определения

Начиная разговор о звуке, нужно, прежде всего, условиться о терминологии. Что понимается под словом «звук» – физическое явление распространения колебаний в среде или ощущения слушателя? Важно подчеркнуть, в этой связи, что и при объективной и при субъективной трактовке звуковых волн их способность переносить энергию является определяющей. Далее мы коснемся физических особенностей образования и распространения упругих волн звукового диапазона, их взаимодействие со средой и, конечно же, реакции человека на этот тип волн.

Наука о звуке называется акустикой, это слово греческого происхождения (*akustikos* – слуховой). По началу, в период становления, акустика занималась исключительно волнами именно звукового диапазона 20 Гц – 20 кГц. Но, по мере развития, диапазон волн, входящих в круг интересов акустики, расширился как в сторону низких частот – инфразвуковой диапазон 0 Гц – 20 Гц, так и в сторону высоких частот – ультразвук и гиперзвук до 10^{13} Гц. В области акустики, в той или иной степени, работали многие классики науки ещё в те времена, когда все естественные науки входили в состав натурфилософии. Ещё Пифагор (6 в. до н.э.) обнаружил взаимосвязь между высотой слышимого тона и длиной струны или трубы. Аристотель (4 в. до н.э.) установил, что звучащее тело распространяет в окружающей среде сжатия и разрежения и объяснил причины возникновения эха. Леонардо да Винчи (15 – 16 вв.) исследовал отражение звука, сформулировал принцип независимости распространения волн от различных источников. Г. Галилей впервые указал на то, что звучащие тела колеблются, при этом частота излучаемых волн зависит от размеров тел, а интенсивность звука – от амплитуды колебаний. В разные времена звуковыми волнами занимались И. Ньютон, Р. Гук, Гюйгенс, Т. Юнг, О. Френель, Доплер, Фурье, Рэлей, Джинс, Л.И. Мандельштам, М.А. Исакович. Особенно в этой славной когорте следует отметить Рэля, Дж. Стретта, который в 1877 – 78 г. обобщил огромный теоретический и экспериментальный материал по акустике в книге «Теория звука» [23].

Существование звуковых волн вытекает из законов Ньютона. Удар по торцу тонкого длинного стержня сжимает слой, прилегающий к торцу, и сообщает ему скорость. Возникшие силы упругости ускоряют следующий слой и деформируют его. Упругие силы, возникшие при деформации второго слоя, остановят первый слой, а второй слой приобретет скорость и т. д. Так движение и деформация будут передаваться от слоя к слою, – по стержню побежит упругая бегущая волна, которая будет переносить исходное возмущение вдоль по стержню практически без изменения.

Во всех других случаях распространения упругих волн в любых средах: твердых, жидких и газообразных, основные черты картины те же, что и для стержня: частицы среды в волне приобретают скорость, деформируются и в них возникают упругие напряжения, которые и передают волну дальше по телу.

Заметим, что из приведенной картины еще не следует существование упругих волн, пока концепция не подкреплена фактическим обращением к законам Ньютона.

Действительно, подобное описание можно было бы повторить и для «теплового удара» – кратковременного прикладывания нагретого тела к торцу стержня. Первоначально нагреется торцевой слой, затем он нагреет смежный слой, а сам при этом охладится, и т. д. Однако, как можно показать, тепловой волны, переносящей нагретое состояние вдоль стержня, не возникает: нагревание расплывается по начальному участку стержня. Передача тепла описывается совсем другими законами, чем передача механического возмущения.

При распространении звуковой волны, как уже отмечалось, следует различать два совершенно разных явления: движение частиц среды в волне и перемещение самой упругой волны по среде. Первое явление – это движение частиц как материальных точек; второе явление – переход возмущенного состояния среды с одних частиц на другие. Так, величина смещения и скорость частицы в волне зависят от силы звука, например для слышимых звуков – от их громкости. Эти величины в звуковой волне, как правило, очень малы, а после прохождения волны каждая частица практически остается в своем исходном положении. Волна же удаляется от места возникновения; скорость ее велика (сотни и тысячи метров в секунду) и не зависит от силы звука, а только от параметров среды, в частности, от модуля Юнга и плотности среды

$$c = \sqrt{E/\rho}.$$

Скорость звука всегда конечна, отсюда следует, что во всех акустических вопросах нужно учитывать как упругость среды, так и ее инерционные свойства; от других же свойств среды ее акустическое поведение, практически, не зависит.

Если к телу приложить силу, то в нем всегда должна создаться упругая волна. Однако в обычных задачах теоретической механики упругие волны не учитывают. Изучая движение свободного тела, возникающее под действием прикладываемой к телу силы, считают, что ускорение получает сразу все тело, а не только участок приложения силы, затем соседний участок и т. д. Аналогично, рассматривая действие силы на закрепленное тело, считают, что тело, деформируясь, приходит в равновесие все сразу, во всех своих частях. Такой подход равносильно предположению, что скорость звука в теле бесконечна.

В первом примере это соответствует **абсолютно жесткому телу** (бесконечная упругость), а во втором – **безмассовому телу**. Механические задачи при таком подходе сильно упрощаются; В частности, оказывается возможным в каждой задаче учитывать либо только массу тела (первый пример), либо только его упругие свойства (второй пример).

Акустика принципиально отказывается рассматривать реальные тела как абсолютно жесткие или безмассовые, потому что при этом теряется изучаемое явление: распространение волны, т. е. передача возмущения по телу с конечной скоростью.

Процесс действия силы на тело можно считать медленным, можно пренебрегать возникающей упругой волной и относить задачу к «обычной» механике, если

$$L/c \ll T,$$

где L – размер тела, c – скорость звука, T – характерный промежуток времени. Тогда состояние тела в каждый момент (его ускорение и деформация) зависит только от сил, действующих на него в этот же момент. Если же это неравенство не выполнено, то процесс следует считать быстрым. Движение тела определяется при этом в основном возникшей упругой волной. В частности, ускорение и скорости разных точек свободного тела различны: тело двигается не как одно целое; если же тело закреплено, то его деформированное состояние определится не только величиной сил в данный момент, но и ранее созданными волнами.

В качестве примера укажем, что синусоидальную силу частотой 1000 Гц, действующую на стальной стержень длиной 10 см, следует считать медленным воздействием. Скорость звука в стали, превышает 5000 м/сек. Если эта сила действует вдоль стержня на один его конец, то различие в ускорениях между двумя концами меньше 1%; обычно такой малой разницей можно пренебречь. Если второй конец стержня жестко оперт, то таким же малым окажется и различие в сжатиях у опертого конца и конца, на который действует сила: стержень будет сжиматься и растягиваться «квазистатически», почти равномерно по всей длине. Но ту же силу следует считать быстрым воздействием, если она приложена к длинному рельсу: она создаст в нем типичный волновой процесс (стоячую волну); части рельса будут сжаты в то же время, когда другие – растянуты.

Для Земли в целом следует считать быстрыми даже воздействия с периодами в несколько минут при землетрясениях, например, в земной коре возникают упругие волны с периодами, достигающими почти до часа.

В некоторых явлениях упругие волны могут оказаться существенными, даже если нас интересует только движение данного тела как целого. Например, в классической задаче о соударении идеально упругих шаров пренебрежение возникающими упругими волнами

приводит к ошибке при подсчете скорости шаров после соударения. В самом деле, уравнение сохранения энергии обычно пишут как равенство кинетических энергий системы шаров до, и после соударения. Правильное решение должно учитывать, однако, и энергию возникших при ударе упругих волн. Кинетическая энергия шаров, рассматриваемых как материальные точки, окажется, поэтому после соударения всегда меньше, чем перед соударением.

Изучать звуковые волны можно двумя принципиально разными способами. Можно рассматривать волну как движение материальных точек (частиц среды), упруго взаимодействующих между собой. В этом способе объект изучения — отдельные частицы среды и их движение. К частицам можно применить уравнения механики системы материальных точек, учесть силы взаимодействия между ними, их инерцию и найти таким способом движение каждой частицы. Так удастся рассмотреть, однако, только простейшие виды волн - бегущие одномерные волны. Для волн же любого вида этот способ весьма неудобен.

В самом деле, силы упругости, действующие на какую-либо частицу, вызваны деформациями соседних частиц, а эти деформации связаны с движением еще более удаленных частиц и т. д.; в итоге, чтобы найти движение одной частицы, требуется выяснить и движение всех остальных частиц среды. Но тогда, оказывается, проще с самого начала отказаться от громоздкого рассмотрения поведения каждой частицы в отдельности и вместо этого **изучать волну в целом как самостоятельный объект**. В этом и заключается второй способ.

Выбор в качестве основного объекта изучения не отдельных частиц среды, а всей волны в целом диктуется тем, что для волны удастся найти простые законы поведения. Законы распространения, законы отражения и преломления на границах разных сред, законы рассеяния от препятствий, особенности поведения в ограниченных областях среды и т. д. Получить равноценные результаты, изучая движение системы отдельных взаимодействующих частиц, было бы практически невозможно. Конечно, вывод уравнения поведения акустических волн основан на тех же уравнениях механики частиц.

Схема построения акустики как механики упругих волн звукового диапазона имеет, таким образом, следующий вид. Общие законы поведения упругих волн мы получим как следствия ньютоновской механики для частиц среды. Но, получив эти законы, мы в каждой конкретной физической ситуации будем искать поведение волны в целом, уже не интересуясь движением отдельных частиц среды. В тех же случаях, когда это понадобится, можно снова перейти к частицам: изучив волну в целом, легко найти движение каждой частицы. Роль механики акустических волн как самостоятельного раздела физики подчеркивается следующим обстоятельством. В смежных науках — оптике и радиофизике, также изучающих волны, но там не идёт речь о частицах среды, да и о самой среде тоже, по крайней мере, для основного явления — распространения электромагнитных волн в вакууме. Но, вместе с тем, электрические и магнитные явления нельзя связать с механическим поведением тел, законы электромагнитных волн оказались весьма близкими к законам механики упругих волн. Волновая картина мира, похоже, универсальна.

В отличие от акустики, волновые представления в других науках, имеющих дело с волновыми явлениями, первичны, но свои исходные понятия и математический аппарат эти науки в значительной степени заимствовали из акустики как науки о волнах. Исторически акустика послужила прототипом всех волновых наук.

Основные задачи, решаемые в рамках акустики можно сформулировать следующим образом. Превышение давления Δp в волне над давлением в невозмущенной среде p (например, в воздухе — превышение над атмосферным давлением p_A) будем называть **акустическим давлением или звуковым давлением**. Подчеркнем, что эта величина нас интересует сама по себе, а не как приращение невозмущенного давления.

Основные величины, характеризующие акустическое состояние жидкости помимо давления, это скорость частиц жидкости (v), а также плотность (ρ) и температура (T) жидкости. При движении жидкости, в том числе и в любой звуковой волне, все эти величины изменяются от точки к точке и с течением времени. Изменения этих величин зависят друг от друга. Так, давление зависит от плотности и температуры, изменение скорости частиц с течением времени зависит от пространственного изменения давления и т. п.

Если все эти изменения зависят от времени и координат достаточно гладко, то связь между величинами, характеризующими волну, оказывается чрезвычайно сильной: в этом случае задание пространственно-временной, зависимости только одной из величин (например,

давления) однозначно определяет пространственно-временные зависимости всех остальных величин.

Математически зависимости между величинами, характеризующими упругую волну, можно выразить дифференциальными уравнениями в частных производных с независимыми переменными – временем и координатами, т.е. применить ранее полученное волновое уравнение. В гидродинамике идеальной жидкости полная система состоит из **уравнения движения, уравнения непрерывности и уравнения состояния среды**.

Основные типы задач, встречающиеся в различных акустических ситуациях и приводящие к однозначному решению, следующие.

1. Задачи о свободных волнах. Нахождение звуковых волн, которые могут распространяться в неограниченной среде в отсутствие внешних воздействий; нахождение типов волн, сохраняющих свою форму при распространении.

2. Задачи с начальными условиями. В них задается распределение давления и скоростей частиц во всей среде для некоторого момента времени (начальный момент) и требуется найти волну в дальнейшие моменты времени.

3. Краевые задачи. В этих задачах изучают волны в ограниченном объеме среды, свойства границ которого считают заданными. Например, это могут быть абсолютно «жесткие», абсолютно «мягкие» и другие типы стенок. Оказывается, что в отсутствие внешних воздействий в таком объеме среды возможен только дискретный набор гармонических колебаний среды; задача сводится к нахождению этого набора.

4. Задачи о сторонних воздействиях – источниках звука. В этих задачах рассматривают звуковые волны, создаваемые инородными телами, помещенными в неограниченную среду и совершающими колебания, или силами, приложенными к среде, и т. п. Звуковое поле в этом случае – волны, расходящиеся от колеблющихся тел и уходящие в бесконечность.

5. Задачи о рассеянии от препятствий. В этих задачах задано звуковое поле и требуется найти, как оно изменится, если поместить в среду те или иные препятствия. Это – задачи об отражении и прохождении звука, а также дифракционные задачи.

Большинство других задач акустики сводится к тем или иным комбинациям перечисленных типов.

Общим для этих объективных и субъективных (физических и физиологических) точек зрения является энергетический подход. Звук, как и всякие другие типы упругих волн, представляет собой поток энергии, в связи с чем, с позиции физических представлений, он может изменять состояние среды, через которую распространяется. С физиологической точки зрения звук вызывает в живых организмах определённые ощущения, возникающие вследствие воздействия через слуховой аппарат на мозг, по крайней мере, у человека и ряда млекопитающих.

Наличие у живых организмов акустического канала информации, позволяет дополнять информационные оптические потоки. Достаточно вспомнить, что речь человека и средства общения многих животных основана на излучении и приёме упругих волн акустического диапазона, т.е. – звука. Анализ звука с физиологической точки зрения более сложен, чем весь комплекс физических процессов, сопровождающих излучение и приём звука.

Ограничимся пока рассмотрением только плоских звуковых волн, потому что все важнейшие закономерности проявляются в этом простейшем случае [24].

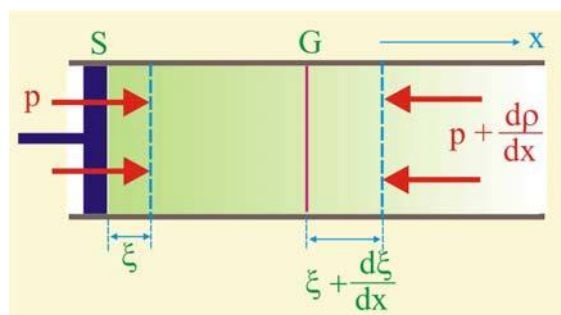


Рис. 10.1. К выводу волнового уравнения

Звуковые волны должны подчиняться волновому уравнению (7.21)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (10.1)$$

где ξ – смещение частиц среды из положения равновесия, c – скорость звука. Применительно к звуку уравнение (10.1) можно получить на примере распространения сжатия в бесконечно длинной трубе, заполненной воздухом (рис. 10.1). Ось трубы совпадает с положительным направлением оси x . В трубу встав-

лен поршень площадью S , который вдвинут внутрь трубы на расстояние ξ . Возникшее при этом сжатие распространяется вправо с конечной скоростью, так что частицы воздуха, расположенные в сечении G , расположенном на единичном расстоянии смещаются так же вправо на величину $\xi + \partial\xi/\partial x$. Воздух, заключённый в рассматриваемом единичном объёме трубы претерпевает изменения

$$\frac{dV}{V} = \frac{d\xi}{dx}. \quad (10.2)$$

Если изменение объёма протекает по адиабатической схеме, то

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad (10.3)$$

где p – давление газа, γ – отношение удельных теплоёмкостей при постоянном давлении и объёме. Продифференцируем уравнение адиабаты (10.3)

$$\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V} = -\gamma \frac{d\xi}{dx}. \quad (10.4)$$

Полагая давление газа в невозмущённом состоянии p_0 , изменение давления, обусловленное движением поршня можно представить следующим образом

$$p = p_0 - \gamma p_0 \frac{d\xi}{dx}. \quad (10.5)$$

Если давление, развиваемое поршнем, равно p , то в соответствии с третьим законом Ньютона, на противоположную поверхность рассматриваемого единичного объёма действует давление $p + (dp/dx)$. По величине разности давлений можно судить о действующей на единичный объём

$$F = -\frac{dp}{dx} = p_0 \gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (10.6)$$

В соответствии со вторым законом Ньютона сила должна быть равна массе газа в единичном объёме, умноженной на ускорение

$$p_0 \gamma \frac{d^2 \xi}{dx^2} = \rho_0 \frac{d^2 \xi}{dt^2},$$

(10.7)

где ρ_0 – плотность газа. Уравнение (10.7) можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (10.8)$$

Введя обозначение

$$\sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = c, \quad (10.9)$$

придём к уравнению вида (10.1). Скорость звука в воздухе впервые была измерена в 1738 г. членами Французской академии. В этих опытах измерялось запаздывание звука пушечного выстрела на различных расстояниях от орудий. Измерители времени включались при появлении световых вспышек из жерл стволов. При температуре 0°C скорость оказалась равной 337 м/с [25].

Как показывает опыт, скорость звука, практически не зависит от его интенсивности, в противном случае, музыка на некотором расстоянии от оркестра превращалась бы из стройной мелодии в какофонию звуков, т.к. оркестры, например симфонические, состоят из инструментов с различной интенсивностью звучания. Это свойство нарушается в случае звуков значительной интенсивности, когда изменения плотности соизмеримы с абсолютными значениями самой плотности.

Звук проводят не только газы, но жидкости и твёрдые тела. Передача звука твёрдыми телами была установлена Уитстоном, который предложил красивый и оригинальный эксперимент. К деке фортепиано прикреплялся один конец стальной проволоки, которая затем через перегородки или перекрытия проводилась в отдалённое помещение, где звук фортепиано заведомо не воспринимался. Второй конец натянутой таким образом проволоки при-

креплялся к резонатору от скрипки. Тон, издаваемый фортепианной струной, казался исходящим из резонатора и был хорошо слышен.

10.2. Энергия и мощность звуковых волн

При генерировании акустической волны звукового диапазона частичкам среды сообщается кинетическая энергия и изменяется внутренняя энергия объема, по которому распространяется волна. Определим далее плотность дополнительной акустической энергии в волне по отношению к её невозмущённому состоянию. Если скорость частиц среды определить в виде (7.68)

$$v = \frac{d\xi}{dt},$$

то, кинетическая энергия элементарного объёма определится как

$$dK = \frac{dmv^2}{2} = \frac{\rho v^2 dV}{2}.$$

Плотность кинетической энергии в этом случае можно представить следующим образом

$$\varpi_k = \frac{dK}{dV} = \frac{1}{2} \rho v^2 = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2. \quad (10.10)$$

Как видно, плотность кинетической энергии квадратичная величина относительно возмущения среды ξ . Поскольку при распространении звука относительное изменение плотности не велико, то в дальнейших рассуждениях в качестве характерной величины можно принять плотность среды в невозмущённом состоянии, что даёт погрешность третьего порядка малости [13]. Вопрос об изменении внутренней энергии представляется более сложным, потому что только часть энергии, переносимой волной, трансформируется как изменение внутренней энергии. Возвращаясь к поршню, вдвигаемому в открытую с одного конца трубу (рис. 10.1), отметим, что при перемещении поршня совершается положительная работа, что, несомненно, увеличит внутреннюю энергию прилегающего единичного объёма. Наоборот, при перемещении поршня влево, совершаемая им работа будет отрицательной, внутренняя энергия газа, при этом должна уменьшаться. В обоих случаях движения элементарная работа выражается уравнением

$$\delta A = -p \delta V, \quad (10.11)$$

где p – давление газа, δV – элементарный объём, обусловленный перемещением поршня. Плотность внутренней энергии составит

$$\varpi_r = -p \frac{\delta V}{V} = p \chi, \quad (10.12)$$

где V – полный объём трубы, χ – средняя величина сжатия газа. Очевидно, что плотность внутренней энергии линейно зависит от величины смещения и не имеет связи с параметрами звуковой волны. Поршень можно перемещать в трубе быстро или медленно, при этом работа будет совершаться одинаковая, в то время как, в первом случае будет генерироваться звуковая волна, а во втором случае весь объём газа испытает равномерное сжатие.

Выясним, как меняется внутренняя энергия среды, когда одна её часть испытывает сжатие, а другая – разрежение, что создаёт некоторую разность давлений. Разность давлений всегда можно представить в виде эквивалентной разности сил. Если поршень разместить в середине трубы и перемещать его вправо и влево быстро, то в какой-то промежуток времени по одну сторону поршня давление изменится от p до $p + \Delta p$, а по другую сторону давление изменится от p до $p - \Delta p$. Таким образом работа будет производиться против давлений по обоим сторонам поршня

$$\left. \begin{array}{l} p + \frac{1}{2} \Delta p; \\ p - \frac{1}{2} \Delta p, \end{array} \right\}$$

$$\delta A = - \left(p + \frac{1}{2} \Delta p \right) \delta V + \left(p - \frac{1}{2} \Delta p \right) \delta V = - \Delta p \delta V. \quad (10.13)$$

Плотность энергии в каждой половине трубы представится следующим образом

$$\varpi_R = -p \frac{\delta V}{2V} = \frac{1}{2} p \chi. \quad (10.14)$$

Используя взаимосвязь между давлением и сжимаемостью среды, уравнение (10.14) можно переписать в виде

$$\varpi_R = \frac{1}{2} \frac{\chi^2}{\beta} = \frac{1}{2} \beta \Delta p^2, \quad (10.15)$$

где β – коэффициент объёмной сжимаемости среды.

Качественным подтверждением полученных результатов может служить метод, использованный итальянским ядерщиком в Америке при испытании первой атомной бомбы в Аламогордо. Находясь на некотором расстоянии от эпицентра Ферми, несмотря на то, что он был главным теоретиком атомного проекта, надо полагать, не до конца осознавал опасность радиационного поражения. Он рассуждал теоретически безупречно. Бросая мелкие бумажки с руки Ферми наблюдал, на сколько их снесло звуковой волной, пришедшей от взрыва (а радиационное излучение перемещается гораздо быстрее звука!). Дальнейший учёный измерил расстояние l , на которое сместились бумажки. Это смещение соответствовало перемещению полусферического слоя атмосферы, находящегося на расстоянии r от эпицентра. Объём вытеснения, таким образом, составлял $2\pi^2 l$. Чтобы получить произведенную работу, необходимо было умножить полученный объём на атмосферное давление p_0 . Экспериментатор находился на расстоянии 10 км от эпицентра, бумажки были снесены на горизонтальное расстояние $l = 1$ м, следовательно, вытесненный объём составлял $\cong 6 \cdot 10^8$ м. При атмосферном давлении $p_0 \cong 10^5$ Па, совершённая взрывом работа, таким образом составляла $\cong 6 \cdot 10^{13}$ Дж. Энергетический эквивалент взрыва 1 кг тротила составляет $\cong 4 \cdot 10^6$ Дж. Выходило, что произведенный атомный взрыв по энергетическому проявлению был эквивалентен взрыву, примерно, $1,5 \cdot 10^7$ (15 000 т) тротила, что, в общем-то, не столь далеко от точной оценки эквивалента в $2 \cdot 10^7$ кг.

Для частицы среды объёмом dV испытывающей сжатие s , изменённое давление составит $p + \Delta p$, относительное изменение объёма выразится через величину сжатия $s/(1 + s)$. Элементарная работа, произведённая при изменении давления над одной частицей, составит величину

$$\delta A = \left(p + \frac{1}{2} \Delta p \right) \frac{s}{1 + s} dV. \quad (10.16)$$

Полную работу для всего объёма газа, занятого возмущением, определим интегрированием (10.16)

$$A = \iiint_V \left(p + \frac{1}{2} \Delta p \right) \frac{s}{1 + s} dV = p \iiint_V \frac{s}{1 + s} dV + \iiint_V \frac{1}{2} \Delta p \frac{s}{1 + s} dV. \quad (10.17)$$

Первое слагаемое в уравнении (10.17) представляет собой суммарное изменение объёма рассматриваемой массы газа, если объём в результате возмущения не изменился, то этот объёмный интеграл равен нулю

$$p \iiint_V \frac{s}{1 + s} dV \Big|_{V=\text{const}} = 0. \quad (10.18)$$

В этом случае, интересующая нас работа, совершаемая над средой, определится вторым слагаемым правой части уравнения (10.18)

$$A = \int \frac{1}{2} \Delta p s dV. \quad (10.19)$$

Условную плотность внутренней энергии можно представить в виде

$$\varpi_R = \frac{1}{2} \Delta p s = \frac{1}{2} \frac{s^2}{\beta} = \frac{\beta \Delta p^2}{2}. \quad (10.20)$$

Суммарная условная плотность энергии в звуковой волне определится как сумма кинетической и внутренней составляющих энергии, т.е. в виде суммы уравнений (10.10) и (10.20)

$$\varpi = \varpi_K + \varpi_R = \frac{\rho v^2}{2} + \frac{\beta \Delta p^2}{2}. \quad (10.21)$$

В бегущей акустической волне в каждой точке, в каждый момент времени $\Delta p = \pm \rho c v$. В этой связи плотность кинетической энергии должна быть равна плотности внутренней энергии, т.е. суммарную плотность акустической энергии можно представить так:

$$\varpi = \rho v^2 = \beta \Delta p^2. \quad (10.22)$$

Напомним, что в записанных выше уравнениях $\Delta p = \rho \omega c \xi_{\max}$ называется акустическим давлением, далее будем обозначать как p . Плотность акустической энергии должна удовлетворять волновому уравнению, потому что давление p является функцией бинорма $t \pm x/c$, т.е. может рассматриваться в виде решения некоего одномерного волнового уравнения.

В расчёте на единицу площади фронта бегущей волны суммарную плотность энергии можно получить интегрированием уравнения (10.22)

$$\beta \int_{-\infty}^{+\infty} p^2 dx = \frac{1}{\rho c} \int_{-\infty}^{+\infty} p^2 dt = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 dx = \rho c \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 dt. \quad (10.23)$$

В первом и третьем интегралах величины $\{x, p, v\}$ рассматриваются в произвольный момент времени, во втором и четвёртом уравнении в произвольной точке, т.е. при произвольном значении x . Подынтегральные выражения отличны от нуля только в области занятой возмущением, т.е. в первом и третьем интегралах; и только в моменты времени, когда возмущение проходит через данную точку пространства, т.е. второй и четвёртый интегралы.

Уравнение (10.22), кроме того, позволяет определить плотность энергии при суперпозиции двух и более бегущих в одном направлении волн. Для таких волн справедливы уравнения для давления

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= p_1(t - x/c); \\ p_2 &= p_2(t + x/c); \end{aligned} \right\} \quad (10.24)$$

из которых, в частности, следует, что суммарная волна так же будет бегущей в ту же сторону, что и исходные волны

$$p(t - x/c) = p_1 + p_2, \quad (10.25)$$

следовательно, плотность энергии в ней равна

$$\varpi = \beta p^2 = \beta (p_1 + p_2)^2 = \beta p_1^2 + \beta p_2^2 + 2\beta p_1 p_2 = \varpi_1 + \varpi_2 + 2\beta p_1 p_2. \quad (10.26)$$

Полученное уравнение не отвечает принципу суперпозиции. Для энергетического анализа принцип суперпозиции не справедлив. Из уравнения (10.26) следует, что плотность энергии результирующего поля может быть как больше, так и меньше, суммы плотностей энергий составляющих, и даже обращаться в нуль ($p_1 = -p_2$).

Действительно, для суперпозиции двух плоских волн

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= p_1(t - x/c); \\ p_2 &= p_2(t + x/c); \end{aligned} \right\} \quad (10.27)$$

распространяющихся навстречу друг другу можно записать следующее уравнение

$$p = p_1 + p_2, \quad v_1 + v_2 = \frac{1}{\rho c} (p_1 - p_2),$$

откуда

$$\varpi = \frac{\beta p^2}{2} + \frac{\rho v^2}{2} = \frac{1}{2} \beta (p_1 + p_2)^2 + \frac{1}{2} \frac{\rho}{(\rho c)^2} (p_1 - p_2)^2;$$

$$\varpi = \beta p_1^2 + \beta p_2^2 = \varpi_1 + \varpi_2.$$

(10.28)

Для плоских акустических волн, распространяющихся навстречу друг другу, плотности энергии всегда складываются. Для стоячих волн плотности кинетической и внутренней энергии в каждой точке не равны друг другу. В случае распространения волн под углом друг к другу плотности энергий складываются алгебраически, а скорости – векторно. Если две волны распространяются под углом θ друг к другу, то

$$p = p_1 \left(t - \frac{x}{c} \right) + p_2 \left(t - \frac{x}{c} \cos \theta - \frac{\xi}{c} \sin \theta \right), \quad (10.29)$$

$$v_x = \frac{1}{\rho c} p_1 + \frac{\cos \theta}{\rho c} p_2; \quad v_\xi = \frac{\sin \theta}{\rho c} p_2. \quad (10.30)$$

Плотность акустической энергии, при этом, составит

$$\varpi = \varpi_1 + \varpi_2 + \sqrt{\varpi_1 \varpi_2} (1 + \cos \theta). \quad (10.31)$$

В общих масштабах плотности энергий плотность акустической энергии чрезвычайно мала. Так, например, для разговорной речи средней громкости плотность акустической энергии составляет всего $1,4 \cdot 10^{-21}$ Дж/м³ ($1,4 \cdot 10^{-8}$ эрг/см³). В концертном зале ($V \cong 2 \cdot 10^4$ м³) в режиме фортиссимо большого симфонического оркестра акустическая энергия составляет 0,1 Дж, что эквивалентно работе силы тяжести при поднятии массы 10^{-2} кг (10 г) на высоту в 1м. В этой связи, вызывают недоумение надписи на звуковоспроизводящей аппаратуре, где красочно указывается якобы акустическая мощность в несколько сотен ватт. В абсурдности такого пиара можно убедиться, прочитав на задней стенке информацию о потребляемой мощности из сети, которая исчисляется десятками ватт, ну прямо чистейший вариант PTRPETUUM MOBILE. В воде плотность акустической энергии ещё меньше, чем в воздухе, примерно в $1,4 \cdot 10^4$ раз. Отвлекаясь от акустики, отметим, что в газах способна накапливаться огромная упругая энергия по сравнению с жидкостями, потому что газы сжимаемы, а жидкости практически несжимаемы. В противоположность с жидкостями, изменение объёма в газах приводит к существенным изменениям давления. По этому случаю испытания сосудов на прочность проводит при заполнении последних жидкостями, например маслом. В жидкости можно создавать огромные давления при незначительном изменении их объёма. В этом случае, при разрушении испытуемых на прочность сосудов, разрушения практически не опасны, главное, чтоб маслом не обляпало.

Передача звуковой энергии в среде осуществляется звуковым давлением, совершающим работу при перемещении частиц среды, на которые оно воздействует. Выделим элементарную площадку $d\vec{S}$, расположенную в упругой среде, в которой распространяется акустическая волна. Сила акустического давления, действующая на эту площадку, определится уравнением

$$\vec{F}_A = p d\vec{S}. \quad (10.32)$$

Если скорость частиц равна $\vec{v}$, то мощность волны запишется как

$$dN_A = \rho \vec{v} d\vec{S}. \quad (10.33)$$

Акустическая мощность зависит от ориентации элементарной площадки относительно вектора скорости, так же как и поток массы, протекающий через эту площадку

$$dQ = \rho \vec{v} d\vec{S}. \quad (10.34)$$

По аналогии с гидромеханикой, где используется для характеристики потока вектор плотности импульса среды $\vec{J} = \rho \vec{v}$, введём понятие плотности потока мощности

$$\vec{\Theta}_N = \rho \vec{v}, \Rightarrow \rho \vec{v} d\vec{S} = \vec{\Theta}_N d\vec{S}. \quad (10.35)$$

Для плоской бегущей волны модуль вектора $\vec{\Theta}_N$ определится как

$$|\vec{\Theta}_N| = \rho v = p^2 / \rho c = \rho c v^2. \quad (10.36)$$

Между плотностью звуковой энергии в среде и плотностью потока мощности существует соотношение, которое по смыслу аналогично закону сохранения энергии в механике. Запишем уравнения движения и неразрывности среды

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla p &= 0; \\ \beta \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{v} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (10.37)$$

и умножим эти уравнения скалярно: уравнение движения – на вектор скорости $\vec{v}$, уравнение неразрывности – на давление и сложим затем почленно

$$\rho \vec{v} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \beta p \frac{dp}{dt} + p \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{\beta p^2}{2} \right) + \nabla \cdot (p \vec{v}) = 0. \quad (10.38)$$

Комбинация величин, стоящая в скобках представляет собой плотность звуковой энергии

$$E = \frac{\rho v^2}{2} + \frac{\beta p^2}{2}. \quad (10.39)$$

Закон сохранения акустической энергии в дифференциальной форме с учётом уравнения (10.39) записывается следующим образом

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\Theta}_N = 0. \quad (10.40)$$

Интегральная форма закона сохранения акустической энергии получается при интегрировании уравнения (10.40)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V E dV + \int_S \vec{\Theta}_N \cdot d\vec{S}. \quad (10.41)$$

Полученные уравнения закона сохранения энергии справедливы для замкнутых объёмов, однако для бегущих волн формулы можно применять и к незамкнутым поверхностям. Теорему о сохранении акустической энергии можно трактовать как протекание энергии сквозь плоскость, перпендикулярную к направлению распространения волны. Уменьшение энергии с одной стороны плоскости равно увеличению энергии с другой её стороны. Величину переносимого потока в направлении нормали $\vec{n}$ расчёте на единицу площади можно определить как

$$\vec{n} \cdot \vec{\Theta}_N = p v = \frac{p^2}{\rho c}. \quad (10.42)$$

При записи приведенных выше соотношений использовалась зависимость между давлением скоростью звука и плотностью среды

$$v = \frac{p}{\rho c}, \quad (10.43)$$

что справедливо только в отсутствии дисперсии, когда плотность потока мощности оказывается равной плотности энергии, умноженной на скорость волны. Другими словами, **энергия в бегущей волне переносится со скоростью звука**. Если в среде имеется дисперсия (зависимость скорости звука от длины волны), то уравнение (10.42) справедливо только для монохроматических волн, когда нельзя утверждать, что перенос энергии в среде существует. Если же имеется группа волн, т.е. акустическая энергия сосредоточена в некоторой области пространства, то **перенос энергии происходит с групповой скоростью u** , определяемой, в частности, уравнением (8.53). Для этого случая уравнение (10.42) примет вид

$$\vec{n} \cdot \vec{\Theta}_N = u E. \quad (10.44)$$

Для гармонических волн мощность удобно характеризовать средним значением за период. Следует при этом иметь в виду, что периодически изменяются сразу две величины, скорость и давления, причём между ними может быть разность фаз φ , среднее значение мощности определяется как

$$\langle N_A \rangle = \frac{p_{\max} v_{\max}}{2} \cos \varphi. \quad (10.45)$$

В случае синфазного изменения во времени давления и скорости уравнение средней за период мощности упрощается

$$\langle N_A \rangle = \frac{p_{\max} v_{\max}}{2}, \quad (10.46)$$

где $p_{\max}$, $v_{\max}$ – амплитудные значения давления и скорости.

10.3. Поглощение акустической энергии в средах

Распространение акустических волн в газах, жидкостях и твёрдых телах сопровождается необратимыми потерями энергии [26]. В жидких средах наибольшие потери обусловлены эффектами внутреннего трения (вязкости), играет определённую роль и теплопроводность, потому что процессы сжатия и разряжения в акустических волнах протекают, практически адиабатически, т.е. температура на участках сжатия становится выше, чем на участках разряжения. Работа переноса энергии с более нагретых участков в менее нагретые происходит за счёт поглощения акустической энергии. В газообразных средах влияние фактора теплопроводности на поглощение энергии соизмеримо с влиянием вязкости. В газовых смесях, таких как воздух, дополнительное поглощение происходит за счёт диффузии более лёгких молекул из участков сжатия в участки расширения. Кроме того некоторый эффект вносят непрерывные и достаточно частые соударения молекул, вызванные их тепловым хаотическим движением.

На поглощение акустической энергии в средах оказывают определённое влияние и релаксационные процессы (процессы установления термодинамического равновесия). Так, например, известно, что в жидкостях молекулы совершают колебания вокруг временных положений равновесия с относительно малым периодом τ_0 . Время от времени, по истечении промежутка τ (время «оседлой жизни») молекула вследствие тепловых флуктуаций скачком (движется прямолинейно) переходит в новую точку пространства и начинает осциллировать вокруг нового равновесного положения, расходуя на этот процесс некоторую энергию активации W

$$\tau = \tau_0 \exp\left(\frac{W}{k_B T}\right), \quad (10.47)$$

где k_B – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура. При прохождении акустической волны нарушаются распределения молекул по положениям равновесия. Возникающие релаксационные процессы, стремящиеся восстановить состояние термодинамического равновесия, связаны с поглощением акустической энергии. Под действием акустических волн происходит так же перераспределение молекул жидкости по ассоциированным комплексам со значительным временем релаксации, опять таки частично за счёт поглощения акустической энергии.

В веществах, находящихся в твёрдом состоянии наряду с внутренним трением и теплопроводностью, появляются потери на упругий гистерезис и пластическую деформацию, что, в частности, влияет на величину добротности колебательных систем.

Поскольку процессы поглощения звука протекают на молекулярном уровне, то исследования диссипативных потерь представляется достаточно тонким инструментом, позволяющим устанавливать физические характеристики сред на микроскопическом уровне.

При рассмотрении вопросов поглощения в средах энергии акустических волн оказывается полезной величина интенсивности акустических колебаний I , которая для идеальной среды (без потерь) определяется по плотности энергии E (уравнение 10.39)

$$E = \frac{\rho v_{\max}^2}{2} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_{\max}^2 = 2\pi^2 \rho v^2 \xi_{\max}^2, \quad (10.48)$$

где ω – циклическая частота, $v_{\max}$ – амплитудное значение скорости, $\xi_{\max}$ – амплитуда смещения частиц среды при прохождении волны, v – частота изменения периодических величин. **Интенсивностью акустических волн принято называть энергию, которая переносится в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны.** Для плоской волны с постоянной геометрией фронта, падающая в единицу времени на единицу площади энергия (интенсивность) определится как

$$I = E c, \quad (10.49)$$

или, с учётом значения плотности энергии

$$I = 2\pi^2 \rho c v^2 \xi_{\max}^2. \quad (10.50)$$

Амплитудное значение давления в акустической волне можно представлять следующим образом

$$p_{\max} = \rho c v \xi_{\max} = 2\pi \rho c v \xi_{\max}, \quad (10.51)$$

тогда для интенсивности справедливо равенство

$$I = \frac{p_{\max}^2}{2\rho c}. \quad (10.52)$$

Интенсивность звука, таким образом, прямо пропорциональна квадрату амплитудного значения акустического давления и обратно пропорционально волновому сопротивлению среды. Интенсивности акустических волн в абсолютном исчислении не велики. Залп артиллерийской батареи из пяти орудий обеспечивает интенсивность порядка 10^{-3} Вт/см²

Естественно предположить, что поглощение акустической энергии будет сопровождаться уменьшением интенсивности, в зависимости от пути распространения волны x и начальной интенсивности I

$$dI = -Z I dx, \quad (10.52)$$

знак минус показывает, что по мере распространения волны в направлении оси x интенсивность уменьшается. Коэффициентом поглощения акустической энергии называется величина

$$\alpha = \frac{Z}{2}. \quad (10.53)$$

Перепишем уравнение (10.52) с учётом значения коэффициента поглощения

$$dI = -2\alpha I dx. \quad (10.54)$$

Разделим в уравнении (10.54) переменные

$$\frac{dI}{I} = -2\alpha dx. \quad (10.55)$$

Изменение интенсивности на конечном пути распространения волны определится следующим интегральным соотношением

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -2\alpha \int_0^x dx,$$

откуда после интегрирования

$$I = I_0 \exp(-2\alpha x), \quad (10.56)$$

где I – интенсивность на расстоянии x , I_0 – интенсивность при $x = 0$. Уравнение (10.56) можно записать через амплитуды колебаний частиц, с учётом того, что интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды смещения (10.50)

$$\xi^2 = \xi_0^2 \exp(-2\alpha x); \Rightarrow \xi = \xi_0 e^{-\alpha x}. \quad (10.57)$$

Последнее уравнение позволяет установить физический смысл коэффициента поглощения. При расстоянии $x = 1/\alpha$ амплитуда колебаний частиц станет равной

$$\xi = \frac{\xi_0}{e}; \Rightarrow \xi = \frac{\xi_0}{2,7}. \quad (10.58)$$

Влияние эффектов вязкости можно учесть, если ввести в волновое уравнение (10.8) добавочный член

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{4}{3} \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^3 \xi}{\partial^2 x \partial t}, \quad (10.59)$$

где η – коэффициент динамической вязкости. Решение уравнения (10.59) определяет значение составляющей коэффициента поглощения α_1 , обусловленной вязкостью среды

$$\alpha_1 = \frac{2\eta\omega^2}{3\rho c^2}, \quad (10.60)$$

Вязкостная составляющая оказалась пропорциональной квадрату циклической частоты и коэффициенту вязкости среды.

10.4. Отражение от границы раздела сред

Наряду с поглощением, акустические волны могут участвовать ещё в целом ряде физических явлений, наиболее распространённым из которых является – отражение. Дело в том, что при предыдущем распространении акустических волн, мы часто предполагали, что распространяются они в бесконечной среде (стоячие волны не в счёт). На практике же создаваемое волнами акустическое поле находится в замкнутых объёмах, причём физические параметры ограничивающих поверхностей оказывают определённое влияние на результирующее поле.

Пусть плоская акустическая волна распространяется со скоростью c_1 в среде с плотностью ρ_1 , и попадает на границу раздела со второй средой, в которой скорость распространения равна c_2 , а плотность этой среды – ρ_2 . В общем случае, часть энергии падающей на границу раздела сред волны будет частично отражаться в первую среду, а частично проникать во вторую среду. Соотношение между этими потоками энергии определяется волновыми сопротивлениями соприкасающихся сред

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \rho_1 c_1; \\ R_2 &= \rho_2 c_2. \end{aligned} \right\} \quad (10.61)$$

Естественно, что при равенстве волновых сопротивлений $R_1 = R_2$ акустическая волна беспрепятственно проходит из первой среды во вторую. В противном случае, первая волна частично отражается. Коэффициент пропускания энергии из одной среды в другую определяется отношением интенсивности волны проходящей к интенсивности падающей волны

$$\tau_p = \frac{4R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2}. \quad (10.62)$$

При переходе волны из воды в воздух, или наоборот, коэффициент пропускания равен $\tau_p \cong 0,0011$, другими словами, 0,9989 всей падающей энергии отражается от границы раздела сред. Для воды и стали $\tau_p \cong 0,013$, а для воды и дерева $\tau_p \cong 1$, т.е. практически вся энергия проникает из воды в дерево.

В случае, если вторая среда более «жёсткая» т.е. $\rho_2 c_2 > \rho_1 c_1$, то при отражении фаза волны изменяется на 180° , если же вторая среда более «мягкая», т.е. $\rho_2 c_2 < \rho_1 c_1$, то изменение фазы не происходит.

Практический интерес представляет случай падения акустической волны из среды с волновым сопротивлением $\rho_1 c_1$ на пластинку толщиной d с волновым сопротивлением $\rho_2 c_2$, в качестве которой могут рассматриваться перегородки, мембраны и т.п. устройства. Согласно данным специальной литературы [26], коэффициент пропускания определяется в этом случае как

$$\tau_p = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{R_2}{R_1} - \frac{R_1}{R_2} \right)^2 \cdot \sin^2 \frac{2\pi d}{\lambda}}, \quad (10.63)$$

где λ – длина волны в пластинке. Коэффициент отражения, при этом, равен

$$\tau_o = \frac{\frac{1}{4} \left(\frac{R_2}{R_1} - \frac{R_1}{R_2} \right)^2 \sin^2 \frac{2\pi d}{\lambda}}{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{R_2}{R_1} - \frac{R_1}{R_2} \right)^2 \sin^2 \frac{2\pi d}{\lambda}}. \quad (10.64)$$

Из уравнений (10.63) и (10.64) следует, что при определённой толщине пластинки можно получить максимальное отражение или пропускание падающих акустических волн. Максимальный коэффициент отражения соответствует толщине пластинки, равной четному числу четвертей волн

$$d_{(\tau_o(\max))} = (2n - 1) \frac{\lambda}{4}. \quad (10.65)$$

Максимальный коэффициент пропускания соответствует толщине пластинки, равной целому числу полуволн

$$d_{(\tau_p(\max))} = n \frac{\lambda}{2}. \quad (10.66)$$

Использование нескольких пластинок, выполненных из различных материалов, позволяет, при соответствующем подборе их толщин добиваться взаимного гашения падающих волн. С другой стороны часто требуется обеспечение максимального прохождения волн, например, с поверхности медицинских излучателей в человеческое тело, которое вследствие шероховатости этому препятствует из-за наличия воздуха в неровностях. Поверхности излучателей и приёмников акустических волн покрывают смазкой, волновое сопротивление которой близко к волновому сопротивлению тела. Смазка, с одной стороны заполняет воздушные полости, а с другой стороны выравнивает волновые сопротивления сред.

Звуковым полем называется совокупность пространственно-временных величин, характеризующих рассматриваемое акустическое возмущение. Основными параметрами поля являются: звуковое давление p , колебательная скорость частиц v , смещение частиц из положения равновесия ξ , относительное изменение плотности $s = \delta\rho/\rho$, адиабатическое изменение температуры δT , сопровождающее сжатие и разряжение среды, в которой распространяется волна. При анализе акустических полей среда считается сплошной, т.е. атомное и молекулярное строение вещества не рассматриваются как таковые. Акустические поля изучают двумя методами, методом геометрической акустики или на основе теории волновых движений. При достаточно гладких зависимостях величин, характеризующих поле, от координат и времени (отсутствие скачков давления и колебательной скорости от точки к точке) все характеристические величины поля оказываются связанными друг с другом: задание пространственно-временной зависимости одной из них (например, звукового давления) однозначно определяет пространственно-временные зависимости других величин. В отсутствии дисперсии такая взаимосвязь устанавливается посредством волнового уравнения. Акустическое давление, как было показано выше, удовлетворяет волновому уравнению вида

$$\Delta p = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \quad (10.67)$$

Имея зависимость давления от координат и времени можно найти аналогичные зависимости для остальных величин

$$v = -\frac{1}{\rho} \text{grad} \int p dp. \quad (10.68)$$

$$\xi = \int v dt. \quad (10.69)$$

$$s = \frac{p}{\rho c^2}.$$

(10.70)

$$T = \frac{\gamma - 1}{\beta \rho c^2} p, \quad (10.71)$$

где $\gamma = C_p/C_v$ – отношение удельных теплоёмкостей, β – коэффициент объёмного расширения. Для гармонического акустического поля волновое уравнение трансформируется в уравнение Гельмгольца

$$\Delta p + k^2 p = 0, \quad (10.72)$$

где $k = \omega/c$ – волновое число. Для скорости и смещения, при этом, справедливы следующие уравнения

$$v = \frac{1}{j\omega\rho} \text{grad} p, \quad \xi = \frac{v}{-j\omega} = \frac{1}{\rho\omega^2} \text{grad} p. \quad (10.74)$$

10.5. Акустическое поле

Уравнения акустического поля должны удовлетворять граничным условиям, т.е. требованиям, налагаемым на величины $\{\xi, v, p\}$ физических свойств, окружающих поле поверхностей раздела. Так, например, на абсолютно жёсткой границе нормальная компонента колебательной скорости v_n должна обращаться в нуль; на свободной поверхности в нуль должно обращаться акустическое давление; на границе, характеризующейся акустическим импедансом, отношение давления к нормальной составляющей колебательной скорости должно равняться удельному акустическому импедансу границы; на поверхности раздела двух сред величины p и v_n по обе стороны поверхности должны быть попарно равны. В реальных жидкостях и газах должно выполняться ещё одно граничное условие: на жёстких ограничивающих поверхностях должна обращаться в нуль колебательная скорость и равенство компонент на поверхности раздела двух сред.

В акустике принято характерные параметры поля $\{\xi, v, p, N_A, I, \}$ выражать не в абсолютных, а в относительных единицах. Дело в том, что смещение частиц, колебательная скорость и даже акустическое давление можно выразить вполне определёнными числами, более трудно дать количественную оценку мощности и интенсивности звука. Причин тому две. Во-первых, мощность звука чрезвычайно мала по сравнению с другими видами энергии, при её записи приходится перед значащими цифрами рисовать множество нулей. Во-вторых, несмотря на абсолютную малость, диапазон изменения акустических величин невероятно огромен. Например, отношение акустических мощностей взлетающего реактивного лайнера и шелеста листьев в глухом лесу равно, примерно, десяти миллионам. Тем не менее, оба эти звука физиологически и аппаратурно фиксируются.

Шкала, которую применяют для объективной градуировки интенсивности звука, является отражением нашего субъективного восприятия. Это, так называемая шкала децибел. Она подобна логарифмической шкале. Децибелами обычно измеряют уровень интенсивности или энергетический уровень физических величин, в частности, акустических. Децибел – это десятичный логарифм отношения акустической величины к выбранному стандартному значению. Например, уровень акустической мощности, интенсивности и давления определяют следующими уравнениями

$$\left. \begin{aligned} L_N &= 10 \lg \left(\frac{N}{N_0} \right); \\ L_I &= 10 \lg \left(\frac{I}{I_0} \right); \\ L_p &= 10 \lg \left(\frac{p}{p_0} \right)^2 = 20 \lg \left(\frac{p}{p_0} \right), \end{aligned} \right\} \quad (10.75)$$

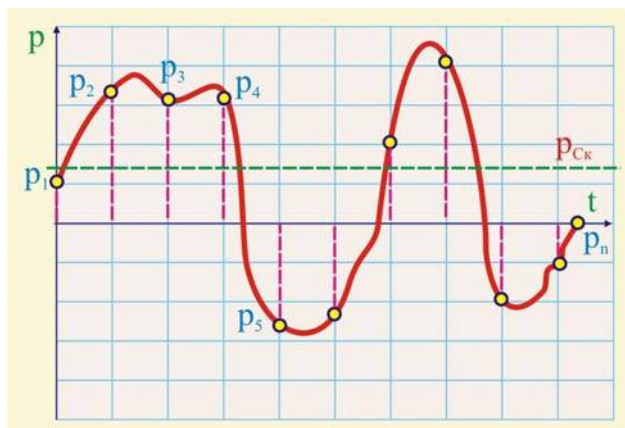


Рис. 10.2. Среднеквадратичное давление

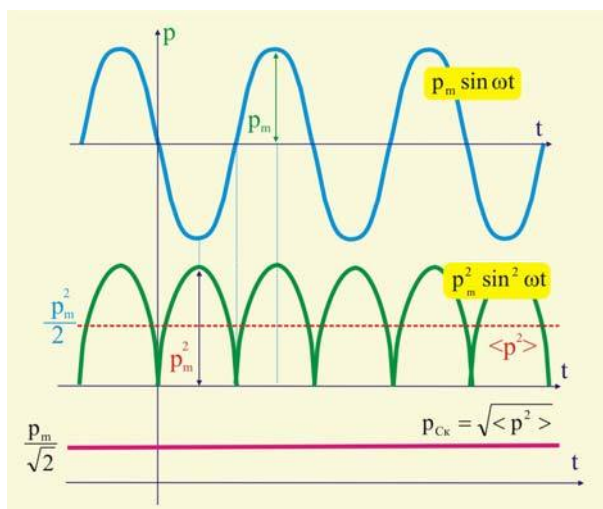


Рис. 10.3. Среднеквадратичная величина синусоидального акустического давления

Последовательность этапов определения среднеквадратичного давления приведена на рис. 10.3. Прежде всего «чистый» или тональный акустический сигнал, преобразованный в пропорциональное электрическое напряжение, например, микрофоном, возводится в квадрат, а затем находится среднее значение и из этого значения извлекается квадратный корень. Таким образом среднеквадратичная величина акустического давления представляет собой постоянную эквивалентную величину, которая характеризуется такой же энергией, как и переменное во времени давление. Для синусоидальной функции среднеквадратичное значение равняется величине функции, делённой на $\sqrt{2}$, или умноженной на 0,707.

Пиковое (максимальное) зарегистрированное значение акустического давления составило $p_m = 3 \cdot 10^{-3}$ Па, определить уровень этого давления. Воспользовавшись третьим уравнением системы (10.75) получим

$$L_p = 10 \lg \left(\frac{0,707 \cdot p_m}{p_0} \right)^2 = 10 \lg \left(\frac{0,707 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-5}} \right)^2 = 40,5 \text{ Дб}.$$

Наряду с акустическими полями звукового и ультразвукового диапазона в исследовательских целях используются гиперзвуковые поля, в которых упругие волны возбуждаются в средах источниками с частотами колебаний от 10^9 до 10^{13} Гц. По физической природе гиперзвуковые поля ничем не отличаются от звуковых и ультразвуковых полей. Вместе с тем, благодаря существенно меньшим длинам волн становится актуальным их взаимодействие со структурными элементами среды – молекулами, атомами и электронами. Область частот гиперзвуковых полей соответствует частотам электромагнитных волн миллиметрового диапазона (СВЧ – частотам). В воздухе частоте колебаний 10^9 Гц соответствует длина волны порядка $3 \cdot 10^{-7}$ м, что соизмеримо с длиной свободного пробега молекул. Упругие волны

где $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Па – пороговый уровень звукового давления, воспринимаемого человеком, $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м² – пороговый уровень интенсивности. Термином «уровень» приходится пользоваться для того, чтобы выделить некоторое значение, выше порогового. Вместе с тем уравнения (10.75) не дают ответа на вопрос, является ли, например, давление p амплитудным или эффективным значением данной величины, либо это среднеквадратичное значение. Все акустические измерения проводят приборами, которые калиброваны в единицах среднеквадратичных значений. Среднеквадратичное значение давления определяет «эффективное» постоянное давление, превышающее уровень атмосферного давления. Среднеквадратичное давление эквивалентно статическому давлению, превышающему уровень давления окружающей среды, которое имеет такую же акустическую энергию, как и флуктуационное давление. На рис. 10.2 иллюстрируется численный метод расчёта среднеквадратичного акустического давления по результатам измерения его мгновенных значений

$$p_{\text{Ск}} = \sqrt{\frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \dots + p_n^2}{n}}.$$

Последовательность этапов опреде-

могут распространяться в средах, когда их длина во много раз превышает длину свободного пробега молекул, поэтому в воздухе при нормальных условиях гиперзвуковые волны не распространяются. Сравнительно хорошими проводниками гиперзвуковых волн являются твёрдые тела с кристаллической структурой. Например, в монокристалле кварца волны с частотой $1,5 \cdot 10^9$ Гц ослабляются по амплитуде в два раза при прохождении расстояния в 1 см.

11. Элементы физиологической акустики

11.1. Ухо как акустический приёмник

Свойствами субъективного восприятия человеческим органом слуха акустических полей определяется, в частности, круг требований, предъявляемых к широкому классу современной телекоммуникационной, воспроизводящей, записывающей, передающей и приёмной аппаратуре. Практически все транспортные средства и строительные конструкции в обязательном порядке должны учитывать особенности человеческого слуха, а если этого не происходит, или происходит не с должным вниманием, то влияние таких конструкций и устройств на человеческий организм негативно. Кстати, одно из основных законодательных препятствий полётов гражданских самолётов в европейские страны заключается в превышении уровня акустических шумов, создаваемых ими при взлёте и посадке. Это же относится и к отечественным автомобилям.

Серьёзные анатомические исследования органов человеческого слуха начались относительно недавно, не многим более 100 лет назад под эгидой «психофизиологии восприятия». Основная суть этих исследований сводится к получению количественных параметров реакций человека на звуковые раздражители. Знание тонких свойств слуха необходимо для понимания того, какие составляющие звуков являются информативными.

Устройство органа слуха человека показано на рис. 11.1. Оно состоит из трёх функциональных частей: наружного уха, среднего уха и внутреннего уха.

Наружное ухо состоит из ушной раковины и слухового канала, соединяющего её с барабанной перепонкой.

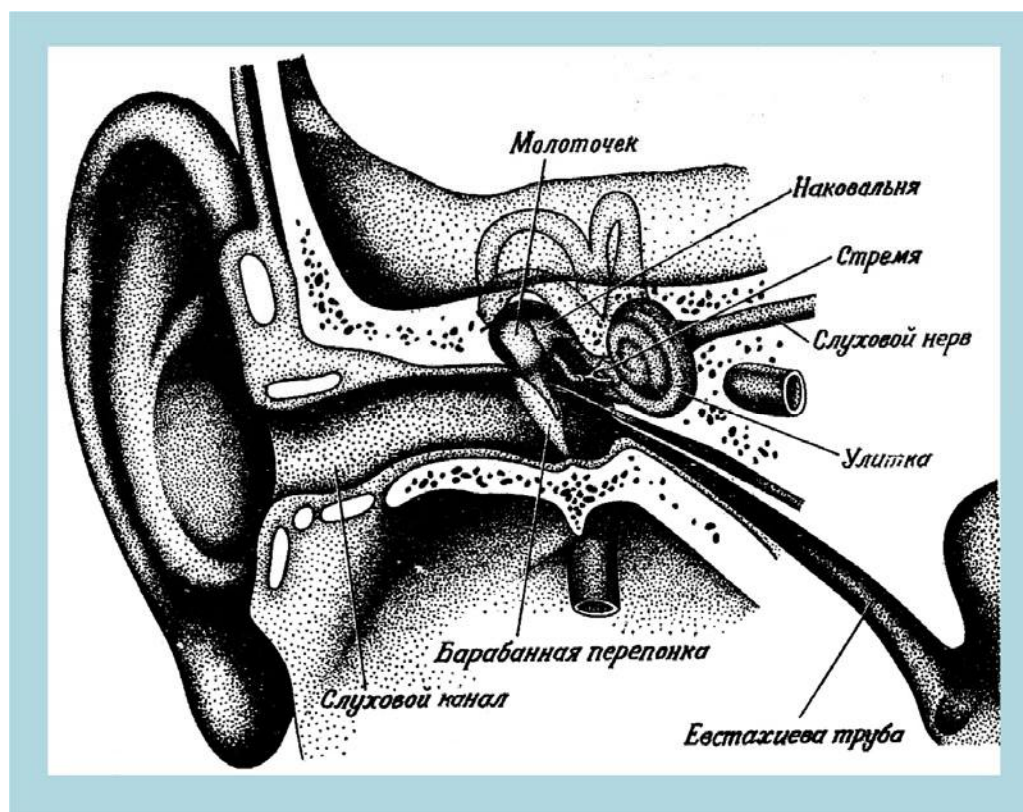


Рис. 11.1. Орган слуха человека [23]

К настоящему времени установлено, что ушная раковина выполняет в основном функции по определению направления на источник звука. Однако, до конца не ясно, какими физическими и физиологическими причинами обусловлена форма ушной раковины. Установлено, что слуховой канал, помимо защитных функций внутреннего уха, является своеобразным резонатором. Резонансные частоты слухового канала лежат в интервале 1000 – 5500 Гц, что определяет диапазон максимальной частотной чувствительности слуха.

Слуховой канал заканчивается барабанной перепонкой, представляющей собой мембрану, которая является, по сути, чувствительным элементом уха, потому что приходит в колебательное состояние при падении на неё акустических волн.

Среднее ухо представляет собой канал, расположенный в височной кости, в котором находятся, связанные друг с другом, три небольшие косточки: **молоточек, наковальня и стремя** (рис. 11.2). Рукоятка молоточка находится в акустическом контакте с барабанной перепонкой, а головка молоточка соприкасается с наковальней, которая соединена со стремением.

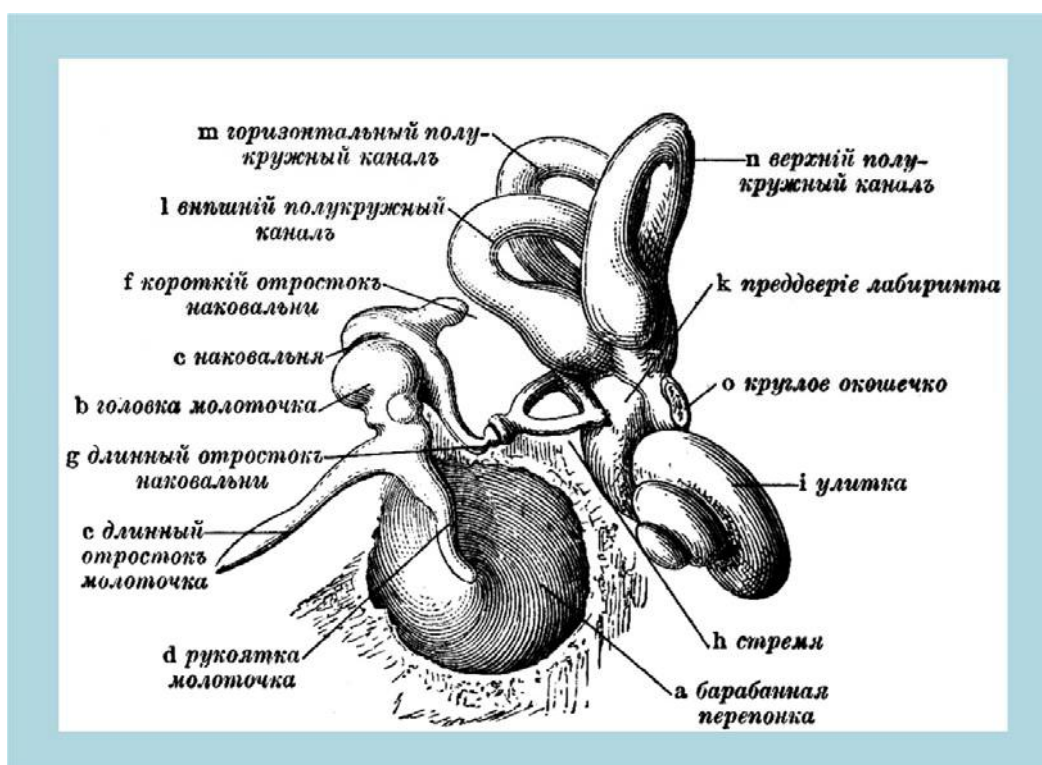


Рис. 11.2. Внутренне ухо [27]

Стремя, в свою очередь, контактирует с овальным окном, которым начинается внутреннее ухо. **Среднее ухо можно рассматривать как концентратор акустической энергии**, падающей на ушную раковину. Система косточек помимо функций передачи колебаний, исполняют роль трансформатора. Во-первых, акустическое давление, приходящееся на относительно большую по площади барабанную перепонку, трансформируется таким образом, что, в конечном счете, передаётся стремением на существенно меньшую площадь овальной поверхности окна, что увеличивает значение эффективных сил. Площадь овального окна примерно в 10 – 30 раз меньше площади барабанной перепонки, поэтому и давление на него во столько же раз больше. Во-вторых, система «молоточек – наковальня – стремя» работают наподобие механического рычага, примерно, в три раза увеличивая мощность колебаний. Таким образом «конструкция» среднего уха обеспечивает увеличение давления почти на два порядка (примерно в $\cong 90$ раз).

Поднятие уровня давления необходимо потому, что дальнейшее распространение волн происходит в жидкости. По сути, увеличение давления компенсирует эффекты отражения на границе сред с различными акустическими сопротивлениями. Среднее ухо, наряду с уже упомянутыми функциями, выполняет предохранительную роль. **Дело в том, что все три косточки снабжены микро мышцами.** В обычном режиме колебания, практически, непосредствен-

но передаются по рассмотренной схеме, при высоких значениях акустического давления (взлетающий реактивный самолёт, дискотека) под действием микро мышц ось вращения стремени смещается, уменьшая тем самым силу давления на овальное окно. Если уровень шума продолжает возрастать, то мышцы барабанной перепонки сообщают её большее натяжение, понижая тем самым, чувствительность. Если человек длительное время находится в области интенсивных или сверх интенсивных акустических полей, то защитные функции среднего уха слабеют, что чревато частичной, временной или полной потерей слуха.

Следует заметить, что процессы, протекающие в наружном и среднем ухе, можно считать в достаточной степени изученными, чего нельзя сказать о дальнейшем ходе акустических событий во внутреннем ухе. От овального окна акустические волны распространяются в жидкой среде (перилимфе), которой заполнена улитка. Улитка практически по всей длине разделена барабанной лестницей на две части (рис. 11.3).

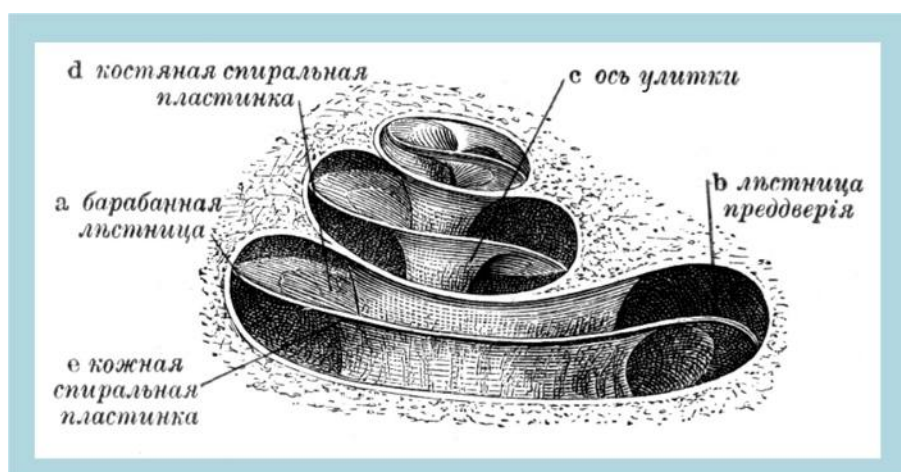


Рис. 11.3. Полость улитки [27]

Звуковые волны, попавшие на овальное окно, доходят до перегородки, огибают её и далее распространяются почти к тому же месту, где они впервые коснулись перегородки, но уже с другой её стороны. В конце концов, волны рассеиваются круглым окошечком улитки. Перегородка улитки имеет переменное сечение, она более натянута в области овального окошечка и «прослаблена» к хвостовой части. Кстати, за исследования акустических свойств улитки Георг фон Бекеши из Будапешта в 1961г. был удостоен Нобелевской премии [23]. Бекеши исследовал структурные особенности и механизм взаимодействия среднего и внутреннего уха. Учёным было показано, что акустическими колебаниями на поверхности основной мембраны создаётся волнообразная рябь, причём гребни волн определённых частот лежат в определённых участках мембраны. Волны с малыми длинами волн (высокочастотные колебания) создают максимум в более тонких областях мембраны с большим натяжением, т.е. вблизи овального окна. Низкочастотные волны группируются в хвостовой части улитки, где мембрана более «дряблая» и утолщённая. Такое устройство улитки позволяет на качественном уровне объяснить, каким образом человек различает отдельные частоты.

Таинство превращения акустических волн, в то, что мы чувствуем как речь, музыку или шум происходит в органе Корти, находящемся над верхней частью основной мембраны и представляющем собой набор из 23500 «мясистых» ячеек, расположенных в четыре ряда по его длине (рис. 11.4). Над органом Корти находится текториальная мембрана, которая, так же как и орган Корти погружена в жидкость, именуемую физиологами эндолимфой. Эти два органа внутреннего уха отделены от остального содержания улитки мембраной Райсснера. Внутри органа Корти имеются волоски, которые, практически, пронизывают поверхность текториальной мембраны. Основная мембрана, на которой расположен орган Корти, вместе с волосистыми ячейками шарнирно подвешен на текториальной мембране.

Деформация основной мембраны вызывает изгибы волосков, которые соединяют две мембраны. Вследствие изгиба волосков, как предполагают учёные, «включаются» электрохимические реакции в клетках, которые вырабатывают электрические импульсы.

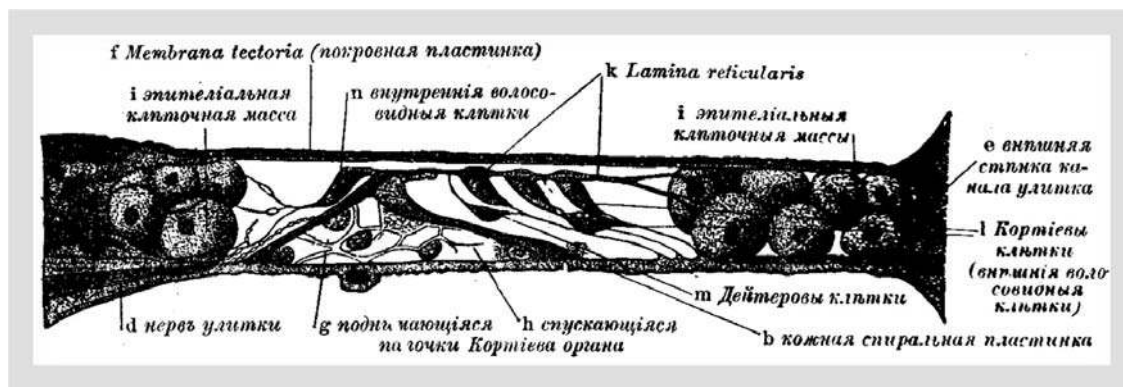


Рис. 11.4. Поперечный разрез органа Корти [27]

Следует подчеркнуть, всё что касается «акустической» стороны функционирования органа слуха, в большей или меньшей степени выяснено. В прошлом веке даже была предпринята достаточно удачная попытка моделирования уха, как акустического приёмника. А вот, что касается преобразования «акустики» в «электричество» – тёмный лес. Наука о человеческом организме с позиций его физического устройства находится на дальних подступах к пониманию сути происходящего. Для физиологов оказалось вполне достаточным выяснить, что орган Корти играет роль электродинамического преобразователя, каковым является, например, микрофон. Но в основе принципа действия микрофона, лежит закон электромагнитной индукции Майкла Фарадея. В простейшем случае катушка, соединённая с мембраной, под воздействием акустического переменного давления перемещается в кольцевом зазоре постоянного магнита. В катушке возникает ЭДС индукции, которую далее усиливают, ещё раз преобразуют, теперь уже обратно в более мощный акустический сигнал. Исключая нюансы, которые присутствуют в любой отрасли человеческих знаний, основные принципы электродинамических преобразований установлены. Что же касается органов слуха, сотворённых природой за миллионы лет усовершенствований, то тут приходится ограничиваться общими фразами. Известно, что внутренние клетки в виде волосков генерируют электрические импульсы, которые каким-то образом в нашем мозге воспринимаются либо как милые нашему существу голоса и мелодии или – «как железом по стеклу». Сущность и природа кодировки акустической информации в органе слуха не установлены, хотя над этим вопросом ломают головы во многих странах мира учёные различных специализаций. К настоящему времени общей картины нет. Установлены некоторые частности, которые часто только усложняли задачи. Так, например, было установлено, что волосистые ячейки генерируют электрические импульсы и в абсолютной тишине, т.е. в отсутствие акустических полей.

Нельзя утверждать, что попыток создания теории слуха не предпринималось. Крупный физик и врач Г. Гельмгольц (1821 – 1894) в течение длительного времени исследовал строение внутреннего уха и даже сделал попытку разработки резонансной теории слуха. Согласно этой теории волокна основной мембраны представляют собой набор большого числа резонаторов, настроенных на разные частоты, и именно они возбуждают соответственные отделы слухового нерва. Это предположение не подтвердилось. Поскольку волокна расположены в жидкости, то их резонансные колебания невозможны. Упомянувшийся ранее нами Бекеш, в 1948 г. убедительно доказал, что от частоты воспринимаемого звука, зависит какая группа волокон возбуждается в кортиевом органе. От 23 500 волосковых клеток в общей сложности от них отходит 3000 нервных волокон, т.е. количество типов раздражителей фантастически велико. По мнению акустиков и физиологов именно наличие как минимум $7 \cdot 10^7$ вариантов реагирования на различные звуки, обеспечивает восприятие весьма тонких особенностей звука, как по его силе, так и по спектральному составу.

11.2. Интенсивности источников. Порог слышимости

Чувствительность слуха человека поистине огромна. На частоте 1000 Гц человек способен различать звук, когда амплитуда акустического давления достигает величины $2,84 \cdot 10^5$ Па, т.е. при эффективном значении $2 \cdot 10^5$ Па, что составляет только $2 \cdot 10^{-10}$ атмосферного давления. Интенсивность плоской волны при этом составляет $2 \cdot 10^{-12}$ Вт/м². Удивительным, является то, что смещение частиц среды при этом составляет величину в десятую долю диаметра молекулы. Следует иметь в виду, что пороги слышимости у отдельных людей могут сильно отличаться, в зависимости от возраста и состояния организма.

Прежде чем приступить к обсуждению особенностей порога слышимости, покажем интенсивность различных источников известных звуков (рис. 1.15). На рис.11.6 приведенная статистическая острота слуха группы американцев.

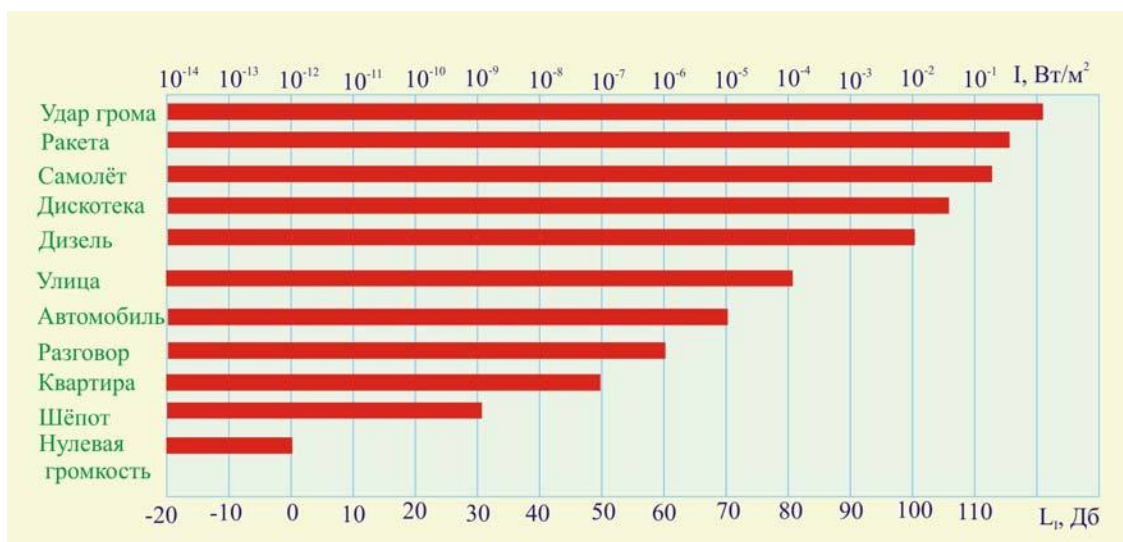


Рис. 11.5. Интенсивности различных источников акустических полей [23]

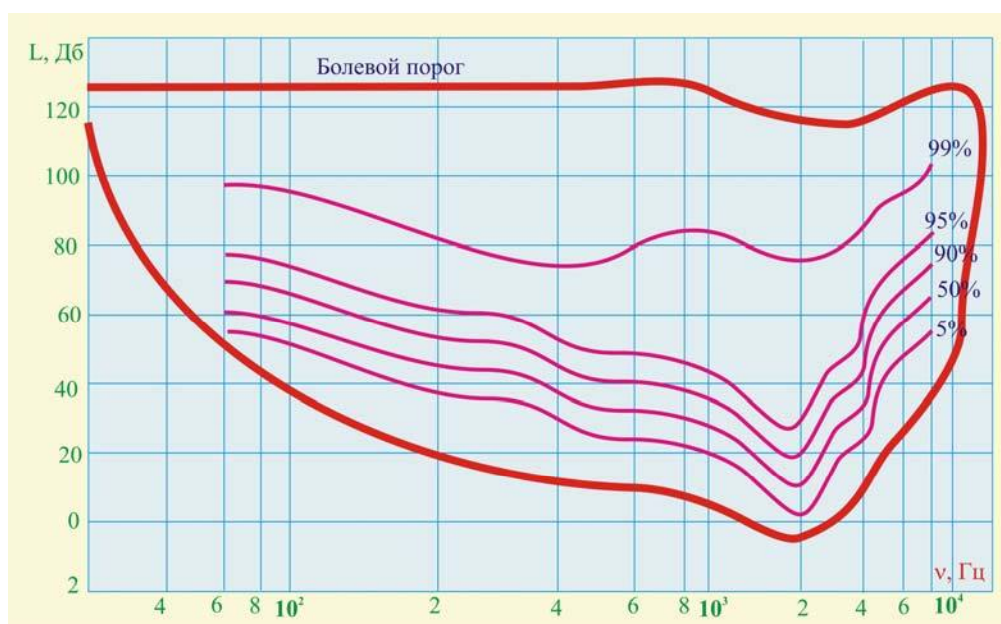


Рис. 11.6. Острота слуха группы американцев [23]

Кривые, приведенные на рис. 11.6 показывают наименьшую величину интенсивности акустических волн, которую различает определённый процент людей испытуемой группы. Жирная кривая соответствует 1% всех участвующих в эксперименте людей, она соответствует понятию «идеального» слуха, которым обладают профессиональные музыканты, настройщики музыкальных инструментов, гидроакустики.

Анализ кривых рис. 11.7 показывает, что чувствительность слуха (порог слышимости) зависит существенным образом от частоты. Наибольшая чувствительность слуха у большинства людей проявляется в диапазоне частот 2000 – 4000 Гц. На низких, так же как и на высоких частотах, чувствительность слуха падает. На частоте 50 Гц чувствительность слуха уменьшается примерно в $5 \cdot 10^5$ раз, а на частоте 20 кГц – в 10^6 раз, по сравнению с чувствительностью на базовой частоте 1 кГц. На сколько бы не пытались увеличивать интенсивность акустических волн на частоте 20 кГц услышать его смогут менее 1% людей. Так же обстоит дело и с частотами 15 – 20 Гц. В связи с такими особенностями слуха при конструировании звуковоспроизводящей аппаратуры приходится частотную характеристику «поднимать» на высоких и низких частотах. Для этих целей, для индивидуальной настройки частотных характеристик воспроизводящей аппаратуры служат регуляторы тембра или эквалайзеры. Следует заметить, что сверхнизкие частоты от 10 до 15 Гц воспринимаются уже не органами слуха, а поверхностью тела, костями и внутренними органами.

Устроители современных дискотек усвоили, что наибольшее воздействие на неокрепшую психику тинэйджеров оказывает акустическое поле с уровнем интенсивности порядка 90 – 110 дБ. При этом желательно «поддавать» побольше именно низких частот в области 30 – 60 Гц. Именно на этих частотах все регуляторы среднего и внутреннего уха исчерпывают свои возможности и появляются болевые ощущения, повышается артериальное давление, т.е. отдыхается, что называется, – по полной программе.

Звуковое давление, при котором наступает болевое ощущение, называется болевым порогом. Давление, соответствующее болевому порогу примерно в $3 \cdot 10^6$ раз больше, чем на пороге слышимости.

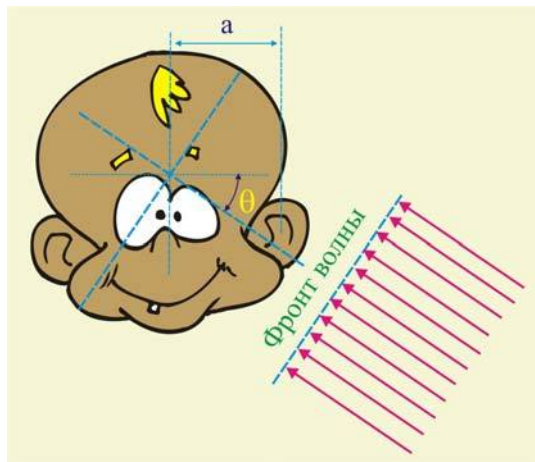


Рис. 11.7. Бинауральный эффект

Одним из основных свойств слуха, является способность определять направление на источник акустических волн. Это – так называемый **бинауральный эффект**. Дело в том, что восприятие азимутального направления прихода звука по отношению к положению головы (рис. 11.7), происходит вследствие способности органа слуха человека, и не только, определять разность фаз или времени прихода колебаний к левому и правому уху. К ушной раковине, расположенной дальше от источника запаздывание по отношению к ближней раковине составит

$$\tau = \frac{a(\theta + \sin \theta)}{c}.$$

Различают фазовый и амплитудный бинауральный эффект. Амплитудный эффект заключается в свойстве слуха анализировать разность интенсивностей волн, пришедших в правое и левое ухо. При восприятии шумов в низкочастотной области и не периодических звуковых импульсов превалирует фазовый бинауральный эффект. Способность определять направление даёт возможность сосредоточиться на нужном направлении в присутствии экранирующих шумов и звуков. В многолюдной «говорящей одновременно» помещении или при наличии шумов различного происхождения, мы можем слышать интересующего нас собеседника.

12. Шумы

12.1 Шумы транспортных средств

Синусоидальные акустические волны и их созвучия состоят из дискретных спектральных составляющих; наряду с ними существует большое количество акустических раздражителей, спектр которых в большей или меньшей степени непрерывен. Это шумы. Природные и техногенные процессы генерируют бесчисленное множество всевозможных шумов, которые отличаются друг от друга не только интенсивностью, но и полосой частот, в которую укладываются составляющие их волны [28].

Рассмотрим акустические шумы, у которых интенсивность всех составляющих частот одинаковы по интенсивности. Такая совокупность акустических волн называется **белым шумом**. Уравнение давления в белом шуме можно представить следующим образом

$$p(t) = \sum_{\nu_{\min}}^{\nu_{\max}} p_{0(\nu)} \cos(\omega_{\nu} t + \varphi_{\nu}), \quad (11.1)$$

где $p_{0(\nu)}$ – амплитудное значение акустического давления на частоте ν , ω_{ν} – циклическая частота, φ_{ν} – начальная фаза колебаний частоты ν . Величина суммарного давления определится как

$$p = 2,4 \cdot 10^{-9} S(0,707 p_0)^2, \quad \text{Вт}. \quad (11.2)$$

в этом случае интенсивность шума составит

$$J = \frac{p_0}{S} = 2,4 \cdot 10^{-5} (0,707 p_0)^2, \quad \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}. \quad (11.3)$$

применительно к минимальному значению воспринимаемого давления $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Па, пороговая интенсивность составит $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м² (10^{-16} Вт/см²). При анализе физиологического воздействия шумов целесообразно рассматривать не величины интенсивности, а **спектральную плотность интенсивности**

$$R = \frac{dI}{d\nu}. \quad (11.4)$$

Так же как и для интенсивности, спектральную плотность принято измерять в логарифмических единицах, при этом в качестве пороговой величины спектральной плотности принимается отношение

$$R_0 = \frac{\Delta I}{\Delta \nu}. \quad (11.5)$$

При выборе $\Delta \nu = 1$ Гц

$$R_0 = 10^{-16} \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2 \text{Гц}}. \quad (11.6)$$

Уровень спектральной плотности в этом случае определится как

$$L_{\text{ш}} = 10 \lg \frac{R}{R_0} = 10 \lg \frac{dI}{d\nu} \cdot 10^{16}, \quad \text{Дб}. \quad (11.7)$$

Акустические раздражения высокой интенсивности шумоподобными полями могут возникать мгновенно, например, при взрывах, что может привести к временному оглушению, а иногда и к повреждению барабанных перепонки. При менее интенсивных шумах сужаются или перекрываются кровеносные сосуды внутреннего уха, при этом нарушается обмен веществ и появляется усталость слуховых клеток органа Корти [29]. Длительное воздействие

шума высокой интенсивности на органы слуха сопровождается подъёмом порога слышимости от 2 кГц до 6 кГц. Причиной таких негативных изменений является дегенерация волосковых клеток, начинающаяся как гистологические изменения с возможным обрывом.

Установлено, что восьмичасовое воздействие шума интенсивностью 90 дБ приводит к тугоухости 5% подвергающихся шумовому воздействию. При уровнях шума 95 дБ процент частичных поражений слуха составляет уже 10%. Негативное воздействие акустического шума наблюдается не только на органы слуха. Дело в том, что волокна слуховых нервов достигают центральных областей продолговатых областей мозга, откуда раздражения в виде электрических импульсов распространяются далее. Эти важные области мозга соседствуют с центрами управления мускулами век, дыханием, процессом кровообращения, координируют реакции. Другими словами, изолированные раздражения одного органа влекут за собой комплексную реакцию организма. Влияние шума на вегетативную нервную систему наиболее выпукло проявляется на изменении функционирования системы кровообращения, увеличение артериального давления и частоты сердечных сокращений, обусловленных сокращением ударного объёма сердца и повышением периферического сопротивления кровеносных сосудов. При воздействии высокоинтенсивного шума наблюдается расширение зрачков, что вызывает уменьшение глубины резкости.

Одним из самых распространённых источников шума, длительно воздействующих на органы слуха, являются шумы и вибрации двигателей, которыми оборудованы практически все транспортные наземные, водные и воздушные средства. В частности, двигатели внутреннего сгорания (ДВС), которые наиболее распространены, можно отнести к источникам высокоинтенсивного шума.

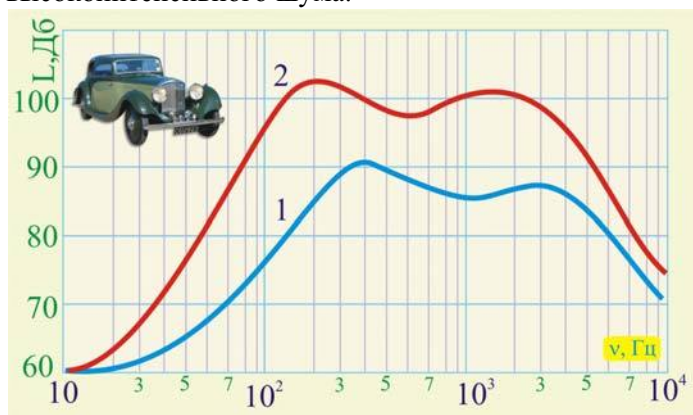


Рис. 12.1. Уровни шума и вибраций ДВС

На рис. 12.1 приведены результаты измерения уровня шума двух типов двигателей внутреннего сгорания. Кривая 1 получена для карбюраторного двигателя мощностью 95 л.с. при частоте вращения коленчатого вала $n = 2500$ об/мин. Кривая 2 отображает акустическое излучение дизельного двигателя мощностью 150 л.с. при частоте вращения 1500 об/мин. Главной причиной акустического излучения ДВС является сам принцип их действия, заключающийся в последо-

вательности небольших взрывов топливной смеси. Кроме того, работа двигателя сопровождается взаимным перемещением множества деталей друг относительно друга с достаточно высокими скоростями и ускорениями, что так же приводит к появлению акустического излучения. Достаточно серьёзный вклад в общий уровень шума вносят аэродинамические источники при пульсирующем выхлопе отработанных газов. В отсутствие глушителей шум выхлопа является самым высокоинтенсивным источником шума двигателя, на него расходуется примерно 0,1% всей мощности. В абсолютном исчислении эта мощность кажется незначительной, но следует иметь в виду, что 1 Вт акустической мощности создаёт уровень акустического давления в 92 дБ на расстоянии 10 м.

Шум, создаваемый остальными конструктивными элементами ДВС на 20 – 30 дБ ниже аэродинамических шумов, особенно шума выхлопа. Однако интенсивность аэродинамических шумов снижается достаточно простыми и экономичными средствами путём использования эффективных глушителей. Несмотря на то, что шумы механического происхождения уступают по интенсивности аэродинамическим шумам, средства борьбы с ними более сложны и дорогостоящи. Дело в том, что ускоренное возвратно-поступательное движение отдельных элементов двигателя вызывает вибрации конструкции автомобиля, которые через опоры и кинематические элементы передаются деталям кузова, превращающимся вследствие этого в самостоятельные вторичные излучатели, особенно если частота возбуждающей силы совпадает с одной из собственных частот элемента кузова или салона.

Рассмотрим более подробно причины возникновения шума выхлопа. Процесс выброса отработанных газов происходит в виде генерирования высокоскоростного потока с развитой турбулентностью. В первом приближении отверстие, через которое удаляются отработанные газы можно представить в виде точечного источника сферических волн

$$p(x, y, z, t) = \frac{\rho s}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial t} v_s \left(t - \frac{r}{c} \right) = \frac{\rho}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial t} q \left(t - \frac{r}{c} \right), \quad (12.1)$$

где s – площадь излучающего отверстия, r – расстояние между точками излучения и приёма, q – величина объёмного потока, c – скорость звука. Уравнение (11.8), описывающее общий случай излучения сферических волн применительно к выхлопу можно переписать следующим образом

$$p(r, t) = \frac{\rho_0 s}{4\pi r} \frac{\partial v}{\partial t} \left(t - \frac{r}{c_0} \right), \quad (12.2)$$

где ρ_0 – плотность окружающего воздуха, v – скорость газов в сечении выхлопного отверстия, c_0 – скорость звука в воздухе. Как видно из уравнения (12.2) величина акустического давления зависит от производной скорости по времени, т.е. от величины ускорения потока. В этой связи необходимо заметить, что низкочастотная составляющая шума выхлопа будет зависеть от числа цилиндров. Многоцилиндровые четырёхтактные двигатели (четыре цилиндра и более) обладают существенно меньшим уровнем шума выхлопа в области низких частот.

В современных двигателях выхлопные газы после выпускного клапана не попадают сразу в атмосферу, а по трубопроводу поступают к глушителю. Трубопровод с глушителем можно рассматривать как акустическую передающую цепь, оказывающую существенное влияние на мощность и спектральный состав шума выхлопа. Естественно, что организация на пути выхлопных газов искусственного аэродинамического сопротивления сопряжено с определёнными потерями мощности. **В двухтактных двигателях, которыми снабжены некоторые типы мотоциклов, снегоходов и гидроциклов потери полезной мощности достигают 10%. В четырёхтактных двигателях потери несколько меньше, они не превосходят 5 – 7% общей мощности двигателя.**

Автомобильные глушители, по существу, представляют собой преобразователи акустической энергии в другие её виды. Самыми эффективными являются **активные глушители**, внутренняя поверхность которых покрывается звукопоглощающими материалами. Такие конструкции применяются редко на дорогостоящих марках автомобилей, потому что внутренняя облицовка глушителя должна быть длительное время устойчива к высоким температурам и воздействиям агрессивной среды. Повсеместное распространение получили более экономичные **реактивные глушители**, представляющие собой комбинацию последовательно соединённых камер, предназначенных для последовательного снижения скорости потока выхлопных газов и организации серии отражений звуковых волн за счёт перепада давлений. подбирая соответствующим образом геометрию камер добиваются подавление интенсивности колебаний давления в потоке в некоторых полосах частот. Преобразование акустической энергии в тепловую энергию происходит в реактивных глушителях за счёт трения потока об элементы конструкции, в частности при прохождении через перфорированные стенки. Многочисленные отверстия в ограждающих поверхностях способствуют преобразованию масштаба турбулентности. Относительно крупномасштабные пульсации давления при прохождении перфорации трансформируются в мелкомасштабные пульсации давления, спектр излучения которых располагается в области более высоких частот. Уровень снижения амплитуды акустического давления глушителем определяется эмпирической формулой

$$\Delta L = \text{const} + 10 \lg \Delta p,$$

где Δp – потери давления в системе выхлопа.

Суммарный шум от дизельного двигателя обусловлен, наряду с механическими причинами, процессами взрывообразного воспламенения топлива. К механическим причинам относят удары клапанов о посадочные места, удары деталей топливного насоса при впрыске топлива, вибрации в зубчатых и ремённых передачах и т.п. У дизельных моторов одним из основных источников шума является процессы сгорания топлива. На рис. 12.2 приведены

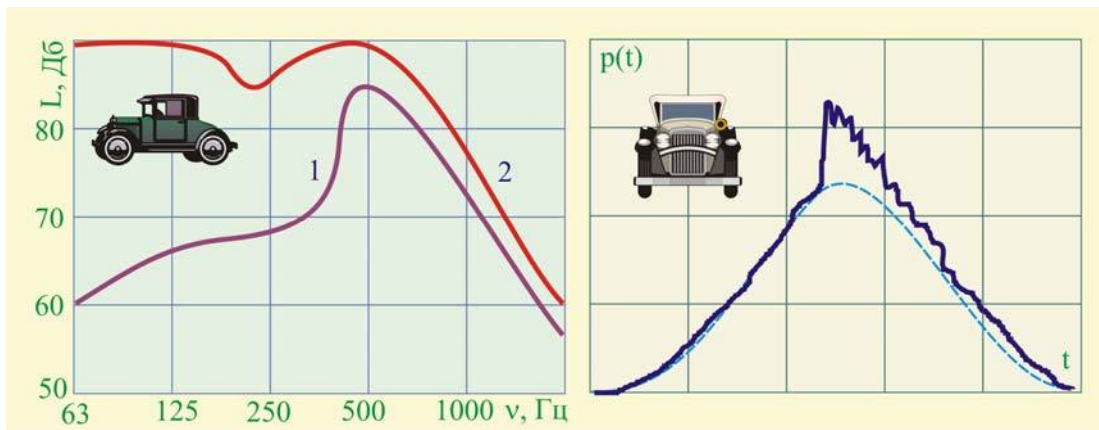


Рис. 12.2. Уровень вибраций автомобильного дизеля

уровни вибраций автомобильного дизеля при частоте вращения коленвала 1200 об/мин (левый график, кривая 1), кривая 2 соответствует вибрациям топливного насоса при работе в том же режиме. Правый график рис 12.2 построен для изменения акустического давления за период, соответствующий одному рабочему циклу цилиндра, причём пик давления соответствует моменту воспламенения топливной смеси. Пунктирная кривая получена при измерении шума всасывания [29].

На основании многочисленных замеров установлены эмпирические зависимости соотношений основных силовых характеристик двигателей и уровня создаваемого ими шума. Для дизельного двигателя уровень шума на расстоянии 1 м рассчитывается по формуле

$$L = 54 + 10 \lg(nN^{0,55}) + 30 \lg\left(\frac{n_n}{n}\right), \text{ Дб}, \quad (12.3)$$

где N – номинальная мощность дизеля в Квт, n – рабочая частота вращения коленвала, n_n – номинальная частота вращения при которой развивается мощность N . Шум карбюраторных двигателей при высоких оборотах практически такой же как и у дизельных двигателей, однако, на низких оборотах, особенно на холостых оборотах, становится значительно меньше, при этом уравнение (12.3) переписывается с учётом более яркой зависимости уровня шума от нагрузки

$$L = 54 + 10 \lg(nN^{0,55}) + 50 \lg\left(\frac{n_n}{n}\right), \text{ Дб}. \quad (12.4)$$

Ещё одним источником высокоинтенсивных акустических шумов являются воздушные транспортные средства, в частности пассажирские авиалайнеры. Основными источниками шума в турбореактивной авиации являются силовые агрегаты (турбина, компрессор, воздуходувки) и аэродинамические источники (реактивная струя, шум обтекания фюзеляжа). На рис. 12.3 приведена зависимость уровня суммарного шума в кабине современного широкофюзеляжного пассажирского воздушного судна, летящего на высоте 10 км со скоростью 900 км/час [30]. Как видно из приведенных данных, максимальный уровень шума наблюдается в области всасывания воздуха и выброса реактивной струи. Основной областью интенсивного шума реактивной струи является зона её турбулентного смешения с разреженной атмосферой. Суммарная акустическая мощность N_A , излучаемая реактивной струей в соответствии с теорией вихреобразования Лайтхилла [29] определяется уравнением

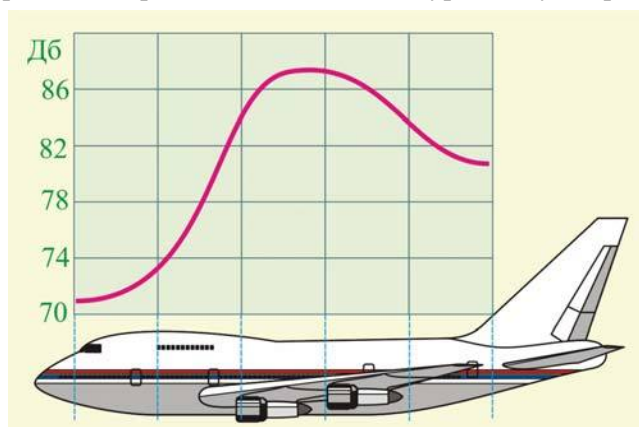


Рис. 12.3. Шум в салоне самолёта

$$N_A \approx 10^{-4} \left(\frac{1}{2} \rho_s v_s \frac{S}{c_0^5} \right), \quad (12.5)$$

где ρ_s – плотность среды в зоне смешения (вблизи среза сопла), v_s – скорость истечения струи, S – площадь поперечного сечения сопла, c_0 – скорость звука в невозмущённой воздушной среде на данной высоте полёта.

Наибольшие уровни шумов наблюдаются на участках разгона и взлёта самолетов. На рис. 12.4 приведена частотная зависимость взлётного уровня шума, измеренная в дальнем поле, на расстоянии 15 м от влетающего лайнера с двумя турбореактивными двигателями. Максимальные уровни шума наблюдаются в полосе частот 63 Гц – 1000 кГц. В настоящее время проблемам акустического шума пассажирских самолётов уделяется не меньшее влияние, чем их лётным характеристикам. Существуют международные нормы предельных уровней шумов, особенно при заходе на посадку, потому что в большинстве своём взлётно-посадочные полосы находятся в непосредственной близости от густонаселённых районов мегаполисов.

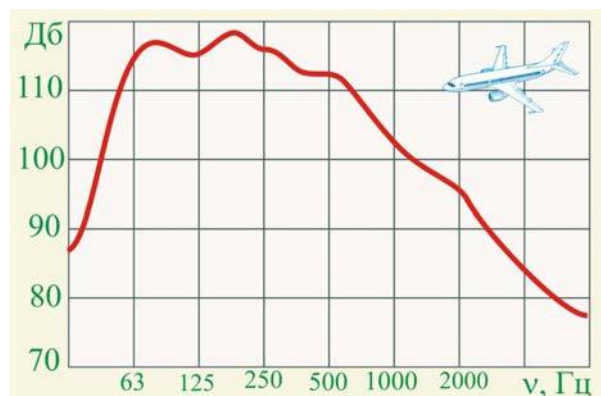


Рис. 12.4. Уровни шума авиалайнера на взлёте

Морские транспортные средства, в частности и суда рыбопромыслового флота, так же являются источниками акустических шумов. Акустические поля судов достаточно полно изучены применительно к судам военного назначения, где уровень шума и его спектральный состав являются основополагающими при исполнении целого ряда специфических функциональных задач. Существенно меньше сведений об акустическом излучении в гидросферу гражданских судов, в частности судов рыбопромыслового флота. Немногочисленные работы по акустике рыбопромысловых судов посвящены в основном анализу шума с позиций помехозащищённости рыбопоисковой и навигационной гидроакустической аппаратуры.

Проблема излучения судна в акустическом диапазоне частот состоит из двух основных задач. Во-первых, защита команды, пассажиров, перевозимых грузов и внутрисудового оборудования от шума энергетических установок, вспомогательных механизмов и гребных винтов. Акустический высокоинтенсивный судовый шум относится к категории вредных для человека излучений. При акустических измерениях сложилась практика использования для оценки уровня шума коэффициент излучения

$$\eta = \frac{N}{N_e}; \quad \eta(A) = \frac{N(A)}{N_e}, \quad (12.6)$$

где N_e – номинальная мощность СЭУ, кВт; N – суммарная акустическая мощность источника; $N(A)$ – мощность, полученная при измерениях акустического давления на расстоянии $r = 1$ м, $r = 3$ м, $r = 10$ м от излучающей поверхности. Поскольку динамический диапазон акустических давлений в полосе частот занимает несколько порядков, то акустические величины принято представлять в логарифмическом масштабе

$$L_\eta = 10 \lg \frac{N}{N_e}; \quad L_\eta(A) = 10 \lg \frac{N(A)}{N_e} \quad (12.7)$$

и исчислять в децибелах. В подавляющем большинстве известных работ проблема акустического излучения рыболовных судов рассматривается исключительно с позиций безопасности экипажа и помехоустойчивости бортовой рыбопоисковой аппаратуры. Вместе с тем уровни шума внутри судна и наведённые вибрации корпуса делают необходимым рассматривать его как достаточно мощный источник высокоинтенсивного акустического излучения в окружающую водную среду [31].

В качестве примера на рис. 12.5 приведены усреднённые уровни шума в машинных и жилых помещениях судов с низкооборотными и среднеоборотными дизельными силовыми установками. Как видно из приведенных данных, уровень шума среднеоборотных дизелей на

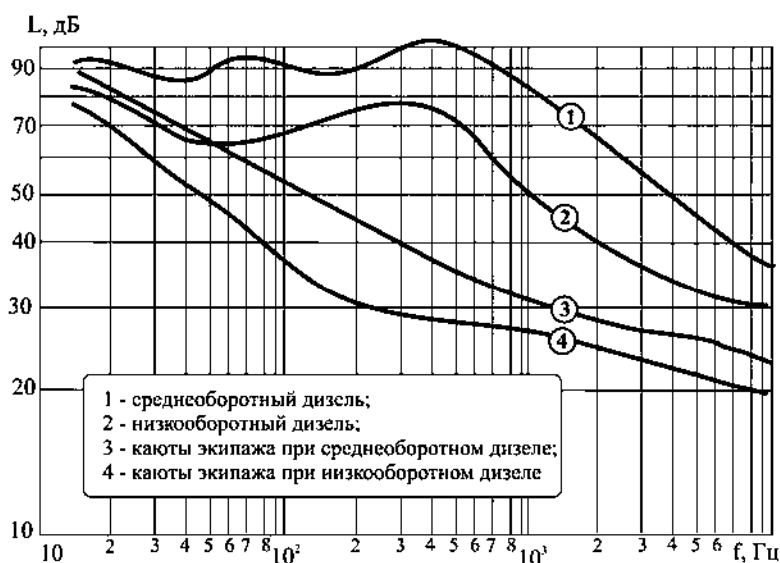


Рис. 12.5. Усреднённые спектры уровня судового шума
 величина L превышала болевой порог и составляла ≈ 110 дБ.
 Было установлено, что математическое ожидание коэффициента акустического излучения подчиняется линейному закону

$$L_{\eta} = 10 \lg \left(\frac{n}{n_0} \right) - 91, \text{ дБ},$$

где $n_0 = 1,67 \cdot 10^{-2}$ об/с; n – рабочая частота вращения коленвала дизеля. Последние два уравнения дают основание уровень излучаемого дизелем шума определить следующим соотношением:

$$L = 10 \lg n N_e + 58. \quad (12.8)$$

Основными источниками шума и вибраций на судах всех типов являются их силовые установки, механические передачи и гребные винты. Каждый из этих источников помимо воздушных и гидродинамических шумов способствует возникновению вибраций судовых конструкций, которые в свою очередь превращаются во вторичные излучатели. Судовые шумы и вибрации возникают при действии на конструкции динамических сил. Среди многообразия типов динамических сил можно выделить несколько основных.

Первую группу составляют силы механического происхождения, возникновение которых вызвано неуравновешенностью вращающихся частей механизмов, асимметричностью жёсткости роторов, технологическими и сборочными дефектами механической обработки соприкасающихся деталей, а также возмущениями вследствие соударения деталей в поршневых и кривошипно-шатунных механизмах.

Во вторую группу целесообразно объединить силы электромагнитного происхождения, вызываемые нестационарными магнитными полями в электрических машинах. Переменные во времени магнитные поля вызывают колебания элементов электрических машин, в частности, вследствие магнитострикционного эффекта.

Третья группа сил обусловлена аэро- и гидродинамическими явлениями, наблюдающимися в насосах, турбинах, компрессорах, трубопроводах, запорной арматуре и т. п.

Все три типа сил, в конечном счете, по отношению к элементам конструкций, способных совершать колебания, являются внешними возмущающими. Колебания конструкций становятся возможными при наличии у них упругих свойств, которые формируют возвращающие силы. В общем случае элемент судовой конструкции обладает, как и всякое свободное твёрдое тело шестью степенями свободы $i = 6$. К таким системам относятся устройства, соединённые с палубой или переборками через виброизолирующие конструкции.

На рис. 12.9 приведена экспериментальная зависимость интегрального уровня шума судовых механических источников, полученная при заглублении измерительного гидрофона на глубину $h \approx 5$ м в частотном диапазоне 48 Гц – 37 кГц. Распределение получено для по-

частотах порядка $f = 500$ Гц достигает величины $L \approx 100$ дБ. По данным лаборатории «Noise» CIMAC, сотрудниками которой были проведены исследования 200 типов дизелей мощностью от 8 до 6000 кВт с частотой вращения коленчатого вала от $n_{\min} = 5$ об/с до $n_{\max} = 50$ об/с, из общего числа обследованных устройств $\approx 70\%$ имели максимальный уровень шума $L \approx 95 - 105$ дБ, а у отдельных образцов

коящегося судна на фиксированном расстоянии $X \cong 50$ м от центра его масс. Во время измерений основной дизель и вспомогательные дизели работали в режиме номинальных оборотов.

Как и следовало ожидать, акустическое излучение судна, обусловленное механическими источниками, обладает направленными свойствами с, практически симметричными максимумами, расположенными на нормали к бортам. Спектр шума механических источников по форме отличался от спектров, измеренных во внутрисудовых помещениях. Максимальный уровень шума в воде наблюдался в области частот 250 – 450 Гц, причём при $f > 0,8$ кГц уровень падал примерно со скоростью 10 дБ/окт.

Наиболее интенсивные акустические шумы обусловлены работой судового движителя и сопровождающими работу винтов гидродинамическими явлениями. Гребной винт вследствие конечного числа лопастей создаёт в жидкости периодические разрежения и сжатия, частота которых определяется в виде произведения угловой скорости вращения на число лопастей z . Изменение давления в жидкости вследствие её сжимаемости приводит к возникновению волн акустического диапазона, именуемых звуком вращения гребного винта. Теоретический анализ звука вращения был выполнен отечественным исследователем Л.Я. Гутиным, который получил решение для скорости поступательного движения винта, существенно меньшей скорости звука, т. е. для числа Маха $M = v_{sh}/c_0 \rightarrow 0$, что вполне справедливо для судовых винтов.

На лопасти винта при его вращении действуют периодические силы, которые можно представить как сумму двух составляющих: силу упора элемента лопасти dp_z и силу сопротивления, приложенную к элементу лопасти dT_z и направленную по касательной к окружности, описываемой выделенным элементом. В соответствии с третьим законом Ньютона, лопасть действует на окружающую её жидкость.

Для судового винта с фиксированным радиусом R и числом лопастей z , угловой скорости вращения ω акустическое давление будет иметь максимум на частоте $f_{Rot} = 2\pi/\omega z$ в соответствии с поведением функции Бесселя. Для проверки теоретических представлений Гутина, которые были получены для воздушных винтов, нами были проведены эксперименты по измерению шума моделей гребных винтов в заглушенном гидроакустическом бассейне. На рис. 12.10 приведена структурная схема установки.

В гидроакустическом бассейне 1 со звукопоглощающим покрытием 2 на подъёмно-поворотном устройстве размещался привод модели, состоящий из привода постоянного тока 3, включающего в себя регулируемый источник питания 4, электродвигатель 5 и электронный счётчик оборотов 6. На вал электропривода насаживалась модель винта 7, частота вращения которых регистрировалась цифровым частотомером 8. Схема регистрации акустического шума состояла из набора измерительных калиброванных гидрофонов 9, широкополосного усилителя 10, последовательного и параллельного анализаторов спектра 11, 12, осциллографа 13 и самописца уровня 14. Измерения уровня шума производились при двух положениях гидрофона в плоскости вращения модели на оси вращения (рис. 12.11).

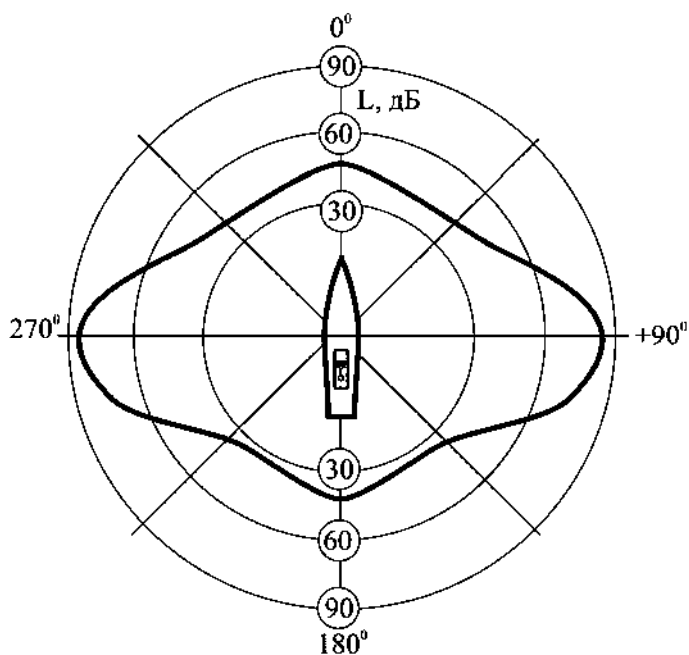


Рис. 12.9. Уровень акустических шумов механического и электромагнитного происхождения судна типа БАТМ пр. 1288

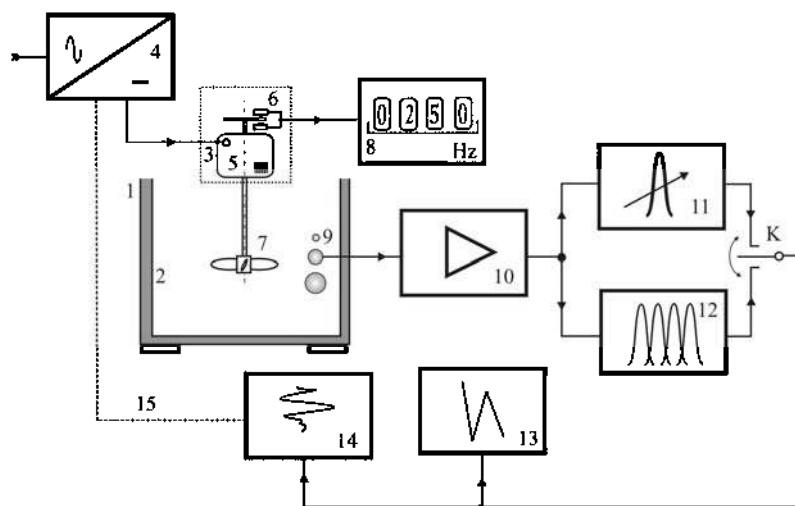


Рис.12. 10. Структурная схема установки для исследования акустического излучения моделями судовых движителей

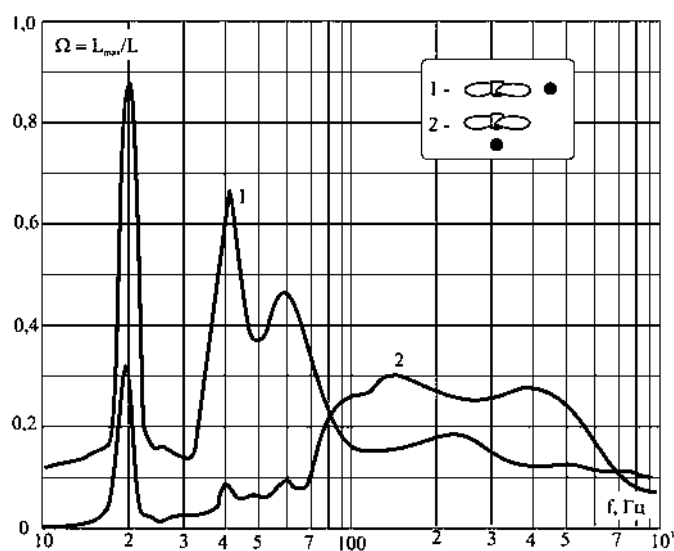


Рис. 12.11. Спектральные характеристики звука вращения моделей гребного винта

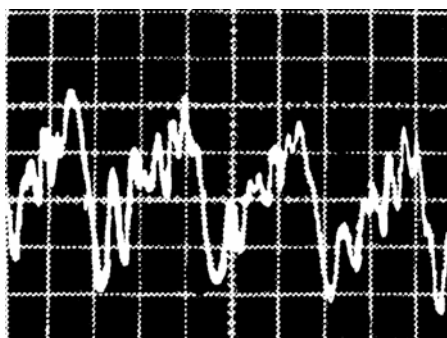


Рис. 12.12. Осциллограмма звука вращения модели судового винта

Как видно из приведенных данных, спектр шума имеет явно выраженные максимумы в низкочастотной области, вызванные периодическим вытеснением жидкости из области вращения модели и высокочастотную составляющую, турбулентного происхождения. На рис. 12.12 приведена осциллограмма звука вращения, на которой отчетливо просматриваются первые четыре гармоники звука вращения. При увеличении частоты вращения модели спектр шума видоизменяется.

На рисунке 12.13 представлены спектры шума трёхлопастной модели для разных режимов обтекания.

Кривая 1 получена в дальнем поле излучения для модели диаметром $D = 0,15$ м с $z = 3$. Спектральная зависимость 1 получена при значении центробежного критерия Рейнольдса

$$Re_1 = \frac{nD^2}{\nu} = 2,23 \cdot 10^4,$$

где n – частота вращения лопасти; D – диаметр модели; ν – коэффициент кинематической вязкости воды. Кривые 2, 3 соответствуют

$Re_2 = 4,5 \cdot 10^4$, $Re_3 = 6,75 \cdot 10^4$. Обсуждаемые зависимости получены в турбулентном режиме обтекания лопастей.

Существенно отметить, что даже на модели регистрировались низкочастотные составляющие шума. На частоте $f = 1$ кГц, длина волны в воде составит $\lambda = 1,5$ м.

В случае движущегося судна можно выделить три характерных вида высокоинтенсивных шумов:

- работающие судовые механизмы, основные и вспомогательные;
- гребной винт;
- гидродинамические шумы турбулентного происхождения;

- кавитационный шум, обусловленный разрывами сплошности воды, как правило, на кромках лопастей гребного винта;
- шумы, генерируемые носовым и кормовым бурунами.

Наибольшее воздействие на биологические объекты производят шумы инфразвукового диапазона частот, которые имеют свойство распространяться на значительные расстояния. На рис. 12.14 приведены качественные спектральные распределения шумов корабельного и биологического происхождения.

Кривая 1 характеризует уровень шума крупнотоннажного судна типа БАТМ (пр. 1288), кривые 2, 3 соответствуют звукам, издаваемым рыбными скоплениями, кривая 4 получена при исследовании звуковых сигналов, издаваемых креветками.

Как видно из приведенных данных, уровень шума, генерируемого морскими организмами, значительно ниже судовых шумов во всём диапазоне частот. Акустические сигналы отдельных видов рыб изучались для создания искусственных излучателей, имитирующих звуки биологического происхождения. Эти работы,

имевшие практические результаты, проводились с целью создания акустических приманок. Кроме того, акустические сигналы успешно используются для отпугивания молоди рыб от водосбросов в районе плотин гидроэлектростанций. Другими словами, данных о влиянии акустического шума на морские биологические объекты достаточно, чтобы сделать вывод, что судовые шумы являются с экологических позиций факторами отрицательными.

К настоящему времени сложилась достаточно парадоксальная ситуация: акустические шумы искусственного происхождения, в частности судового, рассматриваются исключительно как препятствующие эффективному ведению промысла. Вместе с тем приведенные выше данные показывают, что присутствие судов в бионасыщенных зонах создают акустические условия, которые нельзя рассматривать как экологически нейтральные.

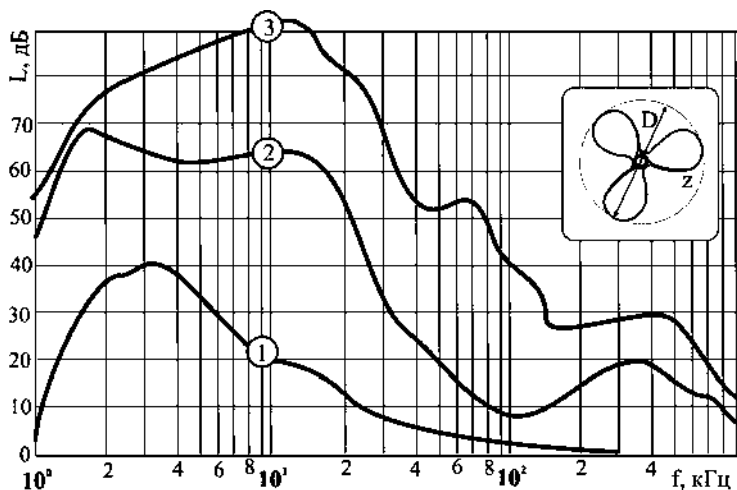


Рис. 12.13. Спектр шума при различной частоте вращения судового винта

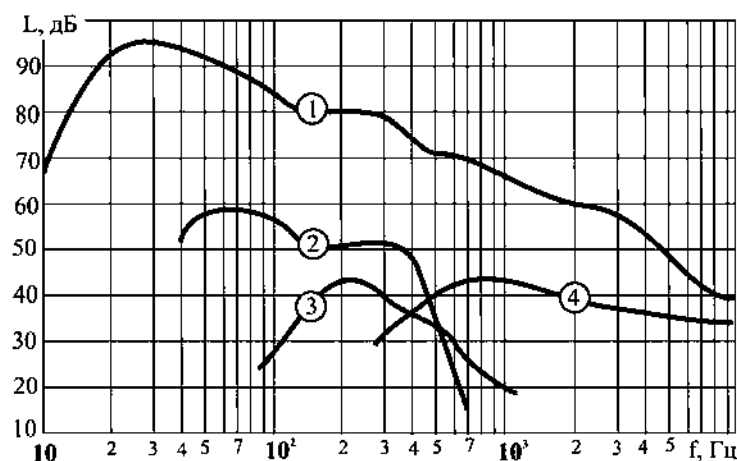


Рис. 11.18. Сравнение спектров биологических судовых шумов

13. Волны на поверхности жидкости

13.1 Гравитационно-капиллярные волны

Волновое движение возникает на поверхности жидкостей, когда меняются под действием внешних причин формы её границ. Формирование волн этого типа происходит за счёт действия сил тяжести и поверхностного натяжения, поэтому эти волны часто называют гравитационно-капиллярными. Если какое либо воздействие от порыва ветра на поверхности океана до тривиального булыжника в луже нарушает равновесное состояние поверхностного слоя жидкости, то указанные силы, стремясь восстановить состояние равновесия, передают от частицы к частице движение, которое и является, по сути, волновым. Возникающее волновое движение, строго говоря, охватывает все слои жидкости, но в первом приближении, вполне достаточном для элементарного рассмотрения, считать, что волновое движение сосредоточено в поверхностном слое. Однако следует оговориться, что такое становится возможным в глубокой воде, когда высота слоя жидкости больше длины волн.

Всё многообразие форм и размеров волн на поверхности жидкости можно условно свести к четырём основным типам (рис.13.1). На больших глубинах в открытом море при сильном ветре образуются волны, профиль которых не является обычной гармонической функцией (рис. 3.1, а). Эти волны описываются гиперболическими функциями.

После прекращения ветра на глубокой воде ещё довольно продолжительное время существуют волны, именуемые мёртвой зыбью (рис. 13.1, б), профиль этих волн описывается трохоидой, которая представляет собой траекторию точки, расположенной на катящейся окружности.

Существенно отличны от остальных волны, набегające на мелководье (рис. 13.1, в). По мере уменьшения глубины профили волны меняются за счёт того, что условия движения вершины волн отличаются от условий перемещения подошвы, которая тормозится дном.

Совершенно загадочными являются одиночные волны – солитоны (рис.3.1,г), изучение которых началось совсем недавно, всего 150 лет назад. Первое объяснение этого феномена появилось и того позже, в основе теории солитонов лежит эффект «взаимодействия» нелинейности и дисперсии.

Начнём рассмотрение гравитационно-капиллярных волн с мёртвой зыби. На рис. 13.2 показано, каким образом можно получить трохоиду. Выделим на окружности радиуса R произвольную точку A , находящуюся на расстоянии $R/2$ от центра и проследим за её траекторией при качении колеса по горизонтальной поверхности скоростью. Крутизна трохоиды определяется очевидным соотношением

$$\zeta = \frac{R}{2\pi R} = \frac{1}{2\pi}. \quad (13.1)$$

Основы теории гравитационно-капиллярных волн были заложены в работах Джона Уильяма Стретта (лорд Рэлей) (1842 – 1919) и Джозефа Джона Томсона (лорд Кельвин) (1856 – 1940). Был рассмотрен простейший случай. Считалось, что движение поверхности жидкости является плоским, при этом частицы жидкости движутся по круговым траекториям, профиль волны аппроксимируется синусоидой.

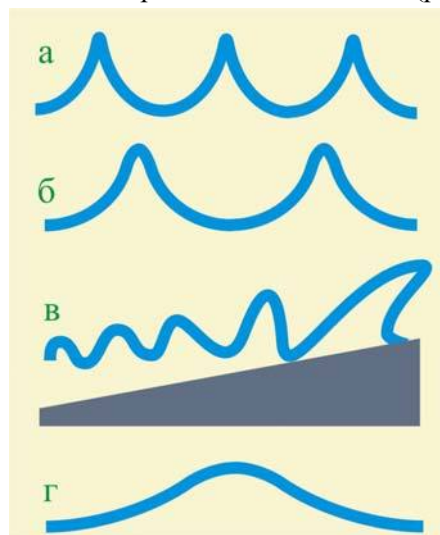


Рис. 13.1. Профили волн

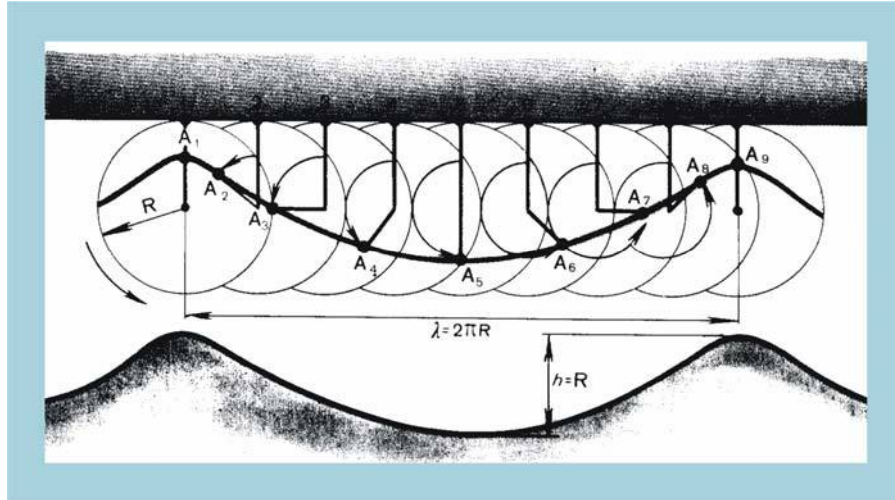


Рис. 13.2. Схема возникновения трохоиды [32]

Разлагая плоское движение на два более простых (рис. 13.3), возможно для них записать следующие уравнения движения

$$x = ct; \quad y = r \sin \frac{2\pi ct}{\lambda}. \quad (13.2)$$

Уравнение траектории в этом случае представится как

$$y = r \sin \frac{2\pi x}{\lambda}. \quad (13.3)$$

Тонкий слой на поверхности жидкости можно считать приближённо трубкой тока, т.е. объём, в котором скорость всех частиц жидкости одинакова. Для трубки тока можно использовать уравнение Даниила Бернулли. Для точек А и В уравнение Бернулли будет иметь вид

$$P_A + \frac{\rho(c-v)^2}{2} + 2\rho gr = P_B + \frac{\rho(c+v)^2}{2}$$

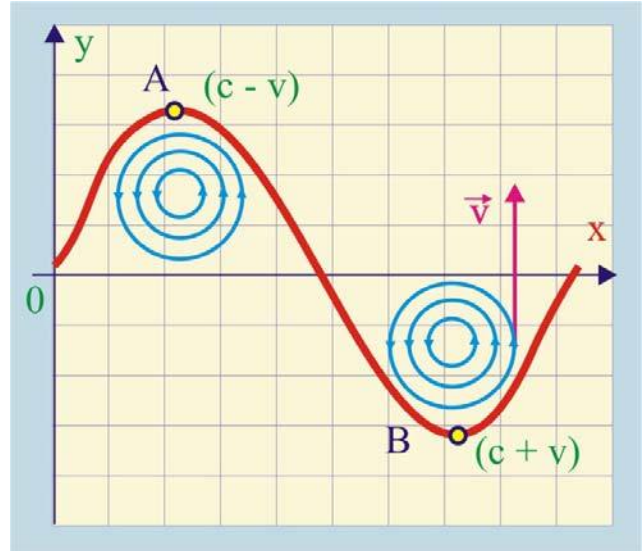


Рис. 13.3. Разложение плоского движения

$$2\rho c^2 = 2\rho gr + (P_A - P_B), \quad (13.4)$$

где ρ – плотность жидкости, c – скорость распространения волны вдоль оси ox , v – линейная скорость вращательного движения, P_A , P_B – давления в точках А и В, которые можно представить в виде суммы и разности атмосферного давления P_0 и лапласовского давлений P_L

$$P_A = P_0 + \sigma k; \quad P_B = P_0 - \sigma k,$$

в данном случае безразмерная величина

$$k = \left| \frac{d^2 y}{dt^2} \right| = \frac{4\pi r^2}{\lambda^2}, \quad (13.5)$$

является параметром кривизны. С учётом сделанных преобразований, уравнение (13.4) можно переписать следующим образом

$$P_A = P_0 + \frac{4\pi\sigma r}{\lambda^2}, \quad P_B = P_0 - \frac{4\pi\sigma r}{\lambda^2}, \quad (13.6)$$

$$\rho c^2 = \rho g r + \frac{4\pi\sigma}{\lambda^2}, \Rightarrow c = \sqrt{gr + \frac{4\pi\sigma}{\lambda^2}}. \quad (13.7)$$

Так как $\lambda = 2\pi r$, то

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}}. \quad (13.8)$$

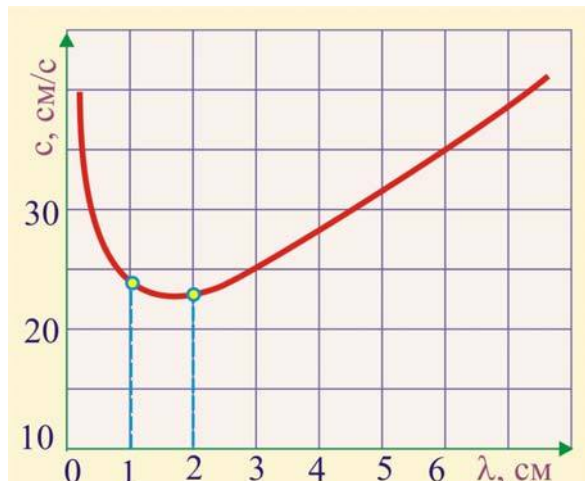
Полученное уравнение демонстрирует зависимость фазовой скорости гравитационно-капиллярных волн от длины волны (частоты), что указывает, на наличие дисперсии. Уравнение (13.8) впервые было получено лордом Кельвином при решении волнового уравнения. Подкоренное выражение состоит из двух слагаемых, одно из которых определяет вклад гравитационных сил, а второе сил, вызванных поверхностным натяжением. Если волны достаточно длинные, т.е.

$$\frac{g\lambda}{2\pi} \gg \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}, \quad (13.9)$$

$$c_{\text{Грав}} \cong \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \quad (13.10)$$

Волны, удовлетворяющие условию (3.9) называются гравитационными волнами. В другом крайнем случае, для относительно коротких капиллярных волн

$$c_{\text{Капил}} \cong \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}}. \quad (13.11)$$



На рис. 13.4, в качестве примера, показана зависимость фазовой скорости вол на поверхности жидкости от их длины для глубокой воды. Очевидно, что кривая $c = f(\lambda)$ имеет две асимптоты, одна из которых соответствует случаю гравитационных волн (13.10), а вторая – капиллярных волн (13.11).

Волны на поверхности морей и океанов, вызванные природными факторами, как правило, достаточно длинные, т.е. это гравитационные волны, потому, что влияние сил поверхностного натяжения не существенно, превалирующую роль играют силы инерциального происхождения.

Рассмотренная модель образования волн во многом является условной. Эксперименты, проведенные в реальных морских условиях, по данным академика Шулейкина [32], показали, что трохоидальный и синусоидальный профиль волн на

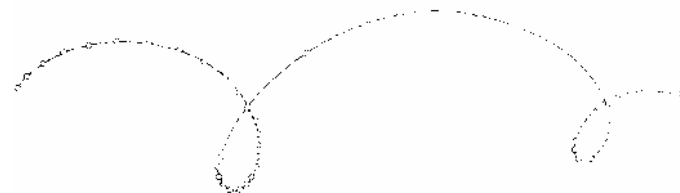


Рис.13.5. Траектория движения точки [32]

глубокой воде не наблюдается. На рис. 13.5 показана траектория светящейся точки, помещённой на плавающем поплавке. Кружочками отмечены середины отрезков, полученных при киносъёмке в те промежутки времени, когда обтюратор открывал доступ света на фотоплёнку. Полученная траектория движения далека от трохоиды: на плоское движение, рассмотренное выше в элементарной теории, накладывается «волновое» течение, обусловленное эффектом Стокса.

13.2. Ветровые волны

Несмотря на отмеченные недостатки, рассмотренная выше элементарная теория успешно может использоваться для приближённых оценок параметров морских ветровых волн, что вполне удовлетворяет большинству практических задач. Так, например, для глубокой воды период волн T , их длина и скорость определяются соотношениями

$$T = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}} \cong 0,8\sqrt{\lambda}; \quad \lambda = \frac{gT^2}{2\pi}. \quad (13.12)$$

$$c = \frac{\lambda}{T} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \cong 1,25\sqrt{\lambda} \cong 1,56T. \quad (13.13)$$

Исследование морских волн конечной амплитуды показало, что скорость их распространения зависит так же и от высоты волн h , несколько увеличиваясь с возрастанием h .

Суммарная энергия, приходящаяся на единицу площади взволнованной морской поверхности, определяется уравнением

$$E_{\Sigma} \cong \frac{1}{8}\rho gh^2 \frac{1}{8}\gamma h^2, \quad (13.14)$$

где $\gamma = 10^4$ Н вес 1 м^3 воды. При высоте волн $h = 0,5$ м суммарная энергия составляет 312 Дж, это на 1 м^2 , что примерно соответствует энергии кирпича, поднятого над поверхностью земли на высоту 10 м. А волны метровой высоты на площади 1 м^2 соответствуют энергетически кирпичу, вознесённому на 42 м. Не трудно пересчитать энергию волн на 1 км^2 и т.д. Энергия волн переносится в направлении их распространения с групповой скоростью, равной половине фазовой

$$u = 0,5c. \quad (13.15)$$

Полученные при этом цифры завораживают своими потенциальными возможностями в плане перспективного использования. Однако всё не так просто. Идея волновых электростанций не нова, но пока сложна в реализации, да и нефти ещё есть некоторое количество.

Для жидкости конечной глубины H период и фазовая скорость волн определяется более сложными уравнениями, потому что траектории движения частиц становятся ещё более экзотическими

$$T = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g\text{th}\frac{2\pi H}{\lambda}}}. \quad (3.16)$$

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\text{th}\frac{2\pi H}{\lambda}}. \quad (3.17)$$

Очевидно, для большой глубины, т.е. когда отношение $H \gg \lambda$ велико, гиперболический тангенс

$$\text{th}\frac{2\pi H}{\lambda} \cong \frac{2\pi H}{\lambda},$$

в этом случае фазовая скорость волн из (3.17) определяется как

$$c = \sqrt{gH}. \quad (3.18)$$

Скорость теперь не зависит от длины вол, следовательно, **перенос энергии осуществляется с фазовой скоростью.**

На мелководье групповая скорость волн определяется через гиперболический синус

$$u = \frac{c}{2} \left(1 + \frac{2\chi H}{\operatorname{sh}(2\chi H)} \right), \quad (3.19)$$

где $\chi = 2\pi/\lambda$ – частота формы волны. Из уравнения (3.19) следует зависимость групповой скорости волн от глубины моря, кроме того, видно, что величина u может меняться в пределах

$$0,5c \leq u \leq c. \quad (3.20)$$

Перемещение энергии с фазовой скоростью имеет место и у одиночных волн, возникающих в мелководных каналах и устьях рек при движении судов. Одиночные волны полностью располагаются над поверхностью воды, образуя подобие перемещающегося бугра. Частицы жидкости в такой волне движутся по полуорбитам, фазовая скорость одиночной волны равна

$$c = \sqrt{g(H+h)}. \quad (3.21)$$

Самая большая высота ветровых волн в океане наблюдается в области формирования ураганов, когда в атмосфере появляются протяжённые пространства пониженного давления, в которых происходит вихревые перемещения значительных масс влажного воздуха с высокими скоростями. Последнее обстоятельство способствует формированию в океане ветровых волн значительной высоты.

На рис. 13.6 приведены изобары (линии равного давления) для типичного тропического урагана с центром вихревого движения в области о. Куба.

При прохождении рассматриваемого урагана в течение 11 – 12 часов развивались волны высотой до 12,6 м, их длина достигала 230 м (период – 12,1 с), а максимальная высота составляла, примерно 12,6 м. Скорость ветра в области центра урагана увеличивалась порывами до 60 м/с. Перемещение волн по океанической поверхности происходило со скоростью 19 м/с.

На рис. 13.7 приведены данные академика Шулейкина В.В. [32], полученные при измерениях скорости ветра v и высоты волн h в зависимости от времени прохождения зоны минимального давления в атмосферном вихре. Как видно, скорость ветра в данном случае увеличивалась от состояния штиля до максимального значения за 12 часов и за такое же время спадала (симметричный атмосферный вихрь) до, практически, нулевого значения.

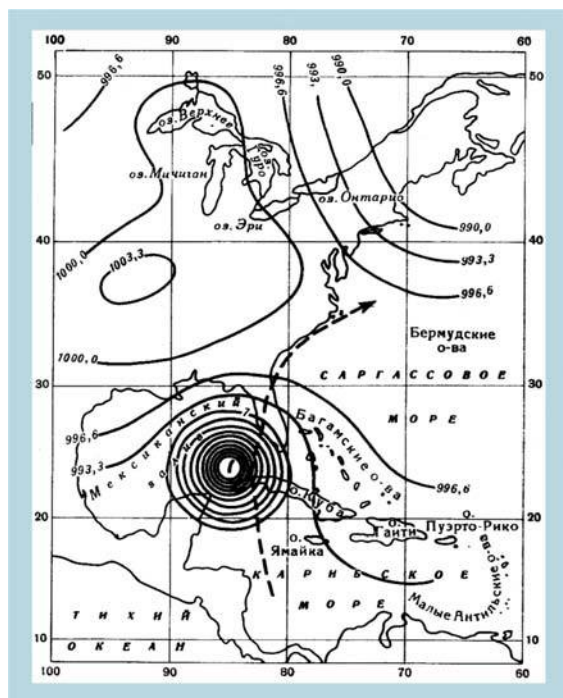


Рис. 13.6. Изобары урагана [32]

ветра в области центра урагана увеличивалась порывами до 60 м/с. Перемещение волн по

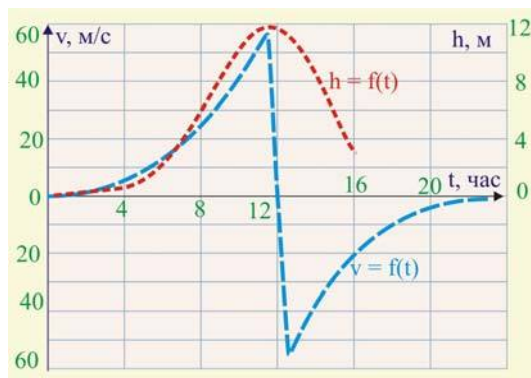


Рис. 13.7. Изменение скорости и высоты волн

13.3. Корабельные волны

При движении судов поверхность воды деформируется, и частицы жидкости, будучи выведенными из положения равновесия, под действием силы тяжести начинают совершать колебательные движения, которые, распространяясь вокруг, образуют систему гравитационных волн, распространяющихся далеко за судном.

Глобально, причиной образования корабельных волн являются дополнительные скорости, вызванные судном. На рис. 13.8 приведена спутниковая фотография группы из пяти быстроходных военных судов, на которой отчётливо просматривается система кильватерных следов. Картина волн, занимающих пространство, существенно превышающее масштабы кораблей, позволяет на качественном уровне установить их периодичность и особенности геометрии.



Рис. 13.8. Кильватерные следы кораблей

При перемещении судна глубоко погруженного в воду, вдоль его корпуса устанавливается распределение давлений: в носовой и кормовой частях судна создаётся повышенное давление (рис. 13.9), а в средней части – пониженное. Напомним, что в механике сплошных сред давление следует рассматривать как систему распределённых сил. Изменение давления, как правило, сопровождается перемещением сплошной среды. Так как на невозмущённой поверхности жидкости давление постоянно и равно атмосферному давлению P_0 , то согласно уравнению Эйлера – Бернулли

$$P_0 + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g z = \text{const}, \quad (3.22)$$

в кормовой и носовой оконечности корпуса судна уровень жидкости должен повышаться, а в средней части понижаться. Вследствие инерциальных свойств масс воды форма поверхно-

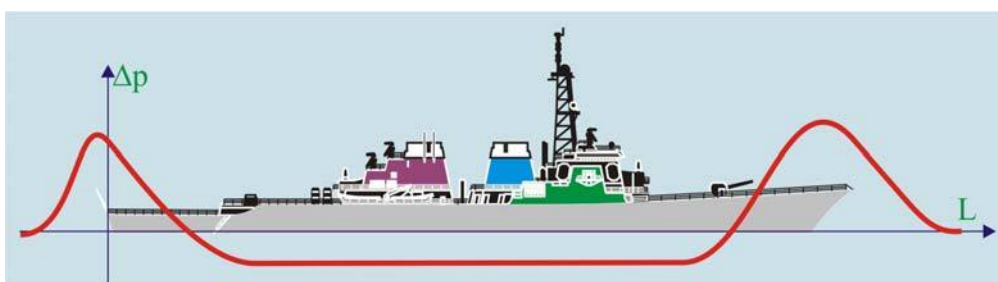


Рис.13.9. Распределение давления воды вдоль борта судна

сти не будет в точности следовать уравнению (3.22).

На рис. 3.10 показана зависимость высоты волны (профиль носовой и кормовой волн) в зависимости от горизонтально координате, совпадающей с нулевым уровнем поверхности поверхности, т.е. минимуму потенциальной энергии.

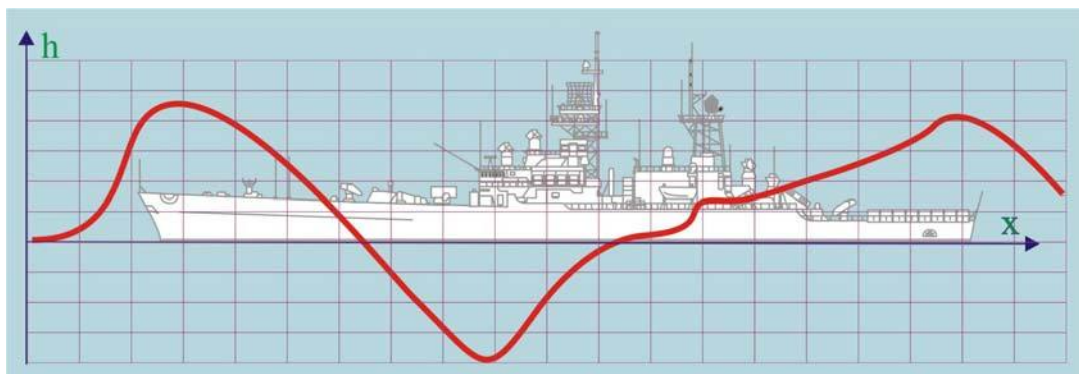


Рис. 13.10. Профиль волны вдоль борта корабля

Волны, образуемые равномерно движущимся судном в спокойной воде, перемещаются вместе с корпусом с такой же скоростью и не меняют своей относительной конфигурации. Корабельные волны можно условно поделить на две группы: расходящиеся волны, образующие характерный конус и поперечные волны, заполняющие площадь конуса. Расходящиеся волны располагаются симметрично по обе стороны корпуса рядами, состоящими из отдельных сравнительно коротких гребней (рис. 13.11) волн. Середины гребней расходящихся волн лежат на одной прямой линии, составляющих с диаметральной плоскостью угол α . При движении по глубокой воде величина этого угла слабо зависит от скорости судна и лежит обычно в зависимости от остроты обводов носовой ветви ватерлинии в пределах $\alpha \approx 18 - 20^\circ$. Угол β между направлением гребней расходящихся волн и диаметральной плоскостью равен приблизительно 2α . При перемещении судна в неограниченном фарватере расходящиеся кормовые и носовые волны не взаимодействуют, распространяясь, независимо друг от друга.

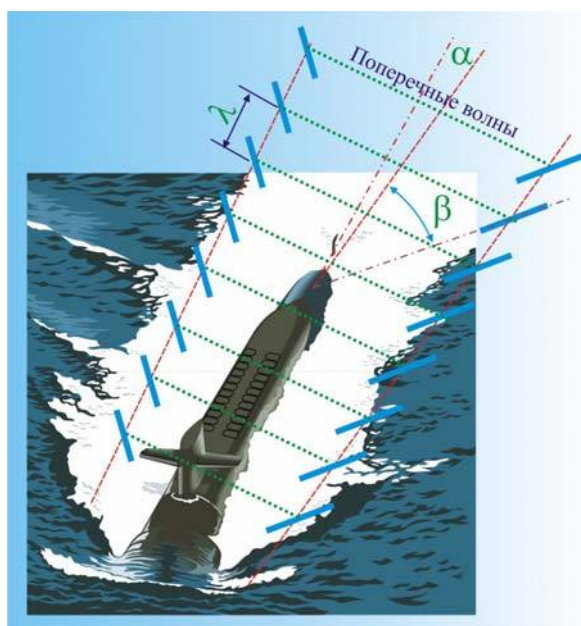


Рис. 3.11. Образование кильватерных волн

Первая поперечная носовая волна возникает в непосредственной близости от форштевня, а первая поперечная кормовая волна располагается несколько впереди ахтерштевня. Гребни поперечных волн отстоят друг от друга на расстоянии λ , являющемся длиной этих волн. Длина поперечных волн связана со скоростью судна v_0 следующим соотношением

$$\lambda = \frac{2\pi v_0^2}{g}. \quad (13.23)$$

Картина волн за кормой судна представляется типичным интерференционным взаимодействием поперечных кормовых и носовых волн. На ограниченной глубине H процесс волнообразования изменяется. При скоростях судна боль-

ших критической скорости $v_k = \sqrt{gH}$ резко увеличивается угол α и может достигать своей предельной величины $\alpha \approx 90^\circ$. В этом случае судно «тащит» за собой две одиночные поперечные волны, кормовую и носовую, которые имеют вид выпученности над поверхностью. Скорость переноса энергии этой волной равна скорости её распространения.

В заключение отметим, что образование волн за движущимся судном является показателем несовершенства конструкции транспортного средства. Бурун за кормой – это напрасно израсходованные тонны топлива: красиво, но совершенно бесполезно.

Основу теории составляли общие уравнения гидродинамики, решения которых имели период, близкий к периоду собственных колебаний океана.

Со временем уравнения Лапласа были распространены и на жидкие внутренние слои земной структуры. Эти уравнения предсказывали приливные волны в жидких слоях нашей планеты. По современным данным температура внутри нашей планеты не однородна (рис.

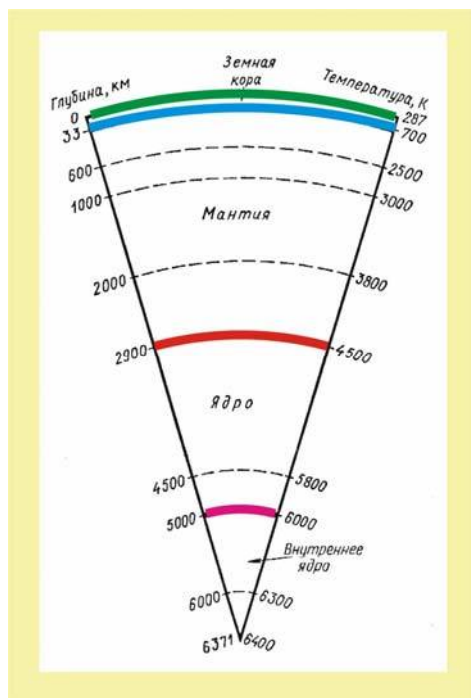


Рис.13.13. Температурное поле Земли

13.13), предполагается, что начиная, примерно, с 1000 К вещество находится в пластическом и жидком состояниях. В 50-е гг. прошлого века эти волны были обнаружены экспериментально. Под действием приливных сил Земля периодически деформируется, причём смещение земной поверхности может достигать 50 см. Установлено, что земные приливные волны в Азии меньше, чем в Европе. Наличие приливных внутренних волн сказывается на угловой скорости вращения Земли.

Приливные волны на поверхностях морей и океанов описываются обычным волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = gH \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (13.27)$$

где $\sqrt{gH} = c$ – фазовая скорость волн. Для полусуточного прилива, когда $T = 12$ ч 25 мин наблюдаются следующие значения длин волн в зависимости от глубины (табл. 13.1)

Таблица 13.1

Н, м	с, м/с	λ , км	Н, м	с, м/с	λ , км
10	9,9	444	1000	99	4440
50	21	992	5000	210	9920
100	31	1400	10000	310	14000
500	70	3130			

Необходимо отметить, что даже для максимально возможной глубины 10000 м длина волны составляет 14000 км, что в 1400 раз превышает глубину, в более мелкой воде разница становится ещё более значительной. Энергия приливных волн вычисляется из условия постоянства смещений частиц воды, находящихся на одной вертикали. Применительно к каналу шириной b на элементарном участке dx потенциальная энергия может быть вычислена через элементарную работу, совершаемую при подъёме массы $m_b = \rho b y$, на высоту $0,5y$, т.е. на высоту центра тяжести слоя воды, находящегося над не взволнованной поверхностью. На расстоянии λ потенциальная энергия определится интегралом вида

$$\Pi = \frac{1}{2} \rho g b \int_0^\lambda y^2 dx. \quad (13.28)$$

Кинетическая энергия той же массы воды определится как

$$K = \frac{1}{2} \rho H b \int_0^\lambda \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 dx. \quad (13.29)$$

Полная энергия приливной волны, как и положено законом сохранения энергии, равна сумме кинетической и потенциальной Энергий, т.е.

$$E = K + \Pi; \quad \Rightarrow \quad K = \Pi = 0,5E. \quad (13.30)$$

13.5. Некоторые особенности волн цунами

Самостоятельный интерес представляют волны, вызванные подводными землетрясениями. Цунами представляют собой длинные океанские волны, возникающие, главным образом, при подводных извержениях вулканов и землетрясениях, когда на достаточно больших площадях происходит смещение дна. Длина волн цунами изменяется от десятков до сотен километров.

Механизм образования волн цунами в упрощённом варианте можно представить следующим образом. Предположим, что участок океанского дна сместился вверх. Ввиду не сжимаемости воды на поверхности возникнет холм небольшой высоты (рис. 13.14). Развитие волны можно условно разделить на четыре этапа: первый этап – зарождение волны, образование над поверхностью океана холма; второй этап – перемещение волны по поверхности океана; третий этап – взаимодействие волны с береговой линией; четвёртый этап – перемещение водных масс над берегом (рис. 13.15).

При рассмотрении особенностей перемещения этих волн необходимо обязательно учитывать их гигантскую длину. Для цунами все океаны и моря представляют собой мелководье, поэтому скорость распространения описывается уравнением

$$c = \sqrt{gH}. \quad (13.31)$$

При глубине океана 2000 м, что вполне реально в условиях камчатского шельфа, средняя скорость цунами оказывается равной

$$c = \sqrt{10 \cdot 2000} \cong 141 \text{ м/с} \cong 510 \text{ км/ч},$$

т.е. скорость волны соизмерима со скоростью современных летательных аппаратов.

Энергия цунами определяется амплитудой и длиной волны, которые в свою очередь, зависят от силы подземных толчков и от того, на сколько близко от поверхности дна находится эпицентр землетрясения. На рис. 2.46 показана динамика распространения волны цунами, возникшей 22 мая 1960 г. вблизи берегов Чили. Побережья Камчатки эта волна достигнет примерно через 18 часов. К Новой Зеландии и к югу Японии волна подкатит через 22 часа.

В открытом море волна цунами совершенно не опасна, она воспринимается в виде плавного подъёма и, не менее плавного опускания судна на высоту волны (порядка 1–4 метра) относительно статического уровня. Приближение волны к берегу характеризуется уменьшением её длины и увеличением амплитуды. При изменении глубины с H_1 до H_2 изменение скорости составит

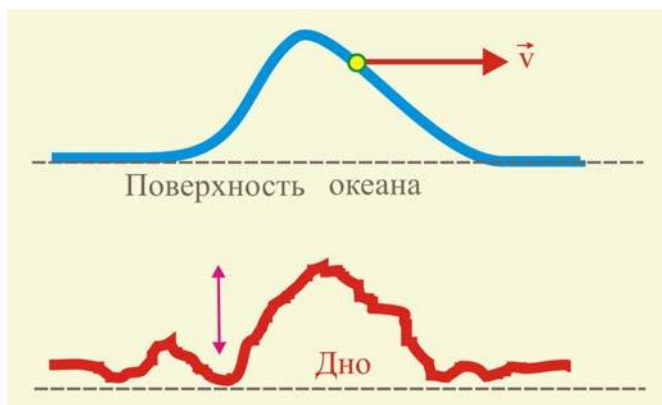


Рис. 13.14. Механизм образования цунами



Рис. 13.15. Форма волны цунами при выходе на берег

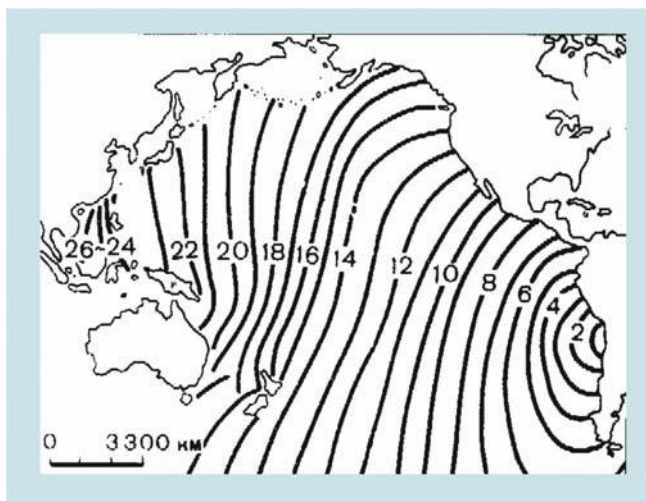


Рис. 13.16. Распространение цунами

$$\Delta c = \sqrt{gH_1} - \sqrt{gH_2}. \quad (13.32)$$

Длина волны, при этом, изменится на величину

$$\Delta \lambda = T(\sqrt{gH_1} - \sqrt{gH_2}). \quad (13.33)$$

Определим далее энергию волны, для чего рассмотрим её гребень шириной L , длиной $\lambda/2$ и высотой h . Масса воды, в этой полуволне, находящейся выше уровня невозмущённой поверхности определится как

$$m = \rho L(\lambda/2)h. \quad (13.34)$$

Потенциальную энергию этой части волны можно определить в предположении, что её центр масс поднимается на высоту $h/2$

$$\Pi = \left(\frac{\rho L h \lambda}{2} \right) \cdot g \frac{h}{2} = \frac{\rho g L h^2 \lambda}{4}. \quad (13.35)$$

На самом деле гребень не является прямоугольным параллелепипедом, т.е. в уравнении (13.35) необходимо добавить коэффициент формы $\alpha < 1/4$

$$\Pi = \alpha \rho g L h^2 \lambda. \quad (13.36)$$

В первом приближении можно считать, что при подходе к берегу будут меняться параметры волны от h_1, λ_1 до h_2, λ_2 , а запасённая в ней энергия сохранится, т.е.

$$h_1^2 \lambda_1 \cong h_2^2 \lambda_2. \quad (13.37)$$

Из уравнения (13.31) определим величину λ

$$c = \lambda v = \frac{\lambda}{T}; \Rightarrow \lambda = T \sqrt{gH},$$

и подставим в уравнение (13.37)

$h_1^2 \sqrt{H_1} = h_2^2 \sqrt{H_2}$, откуда следует, что

$$\frac{h_2}{h_1} = \sqrt[4]{\frac{H_1}{H_2}}. \quad (13.38)$$

Определим изменение высоты волны, которая зародилась на глубине $H_1 = 5000$ м, и подошла к берегу, где глубина составляет $H_2 = 50$ м. Если на глубокой воде $h_1 = 2$ м при $\lambda_1 = 10000$ м, то при приближении к берегу скорость волны с $c_1 = 1000$ км/ч уменьшится до $c_2 = 100$ км/ч, а высота волны возрастёт до $h_2 = 6,3$ м.



Рис. 13.17. Выход цунами на берег

Таким образом, на стометровом отрезке в соответствии с уравнением (13.37) волна обладает при подходе к берегу энергией порядка $1 \cdot 10^{11}$ Дж, это эквивалентно потенциальной энергии массы в $1 \cdot 10^6$ кг, поднятой на высоту 10 км (рис. 13.17).

Динамика цунами существенно отличается от динамики ветровых волн. Скорость установившихся штормовых волн составляет примерно 0,8 от скорости ветра. При восьми балльном шторме скорость ветра достигает 40 м/с (144 км/ч), это, несомненно, скорость внушительная, но всё равно гораздо меньшая скорости цунами, кото-

рые могут проходить до 1000 км за один час. К тому же, длина штормовых волн не превышает 500 м, в то время как волны цунами могут легко достигать длины в 10 км. А вот высота штормовых волн больше. В открытом океане штормовые волны могут иметь высоту до 20 м, а цунами, только 3 – 5 м. Естественно, что крутизна, наконец-то это слово употребилось в его исконном смысле, штормовых волн больше, поэтому они представляют для всего плавающего большую опасность. В табл. 13.2 приведены сравнительные характеристики ветровых волн и волн цунами.

Таблица 13.2

Параметры	Ветровые волны	Цунами
Скорость распространения	до 100 км/час	до 1000 км/час
Длина волны	до 0.5 км	до 1000 км
Период	до 20 секунд	до 2.5 часов
Глубина проникновения	до 300 м	до самого дна
Высота волны в открытом море	до 30 м	до 2 м
Высота волны у побережья	до 4 м	до 70 м

Цунами представляется весьма сложным физическим многофакторным явлением планетарного масштаба. Изучение механизмов возникновения и протекания этого природного явления показало, что для успешного решения задач защитного характера необходимы совместные усилия вулканологов, сейсмологов, физиков, математиков и океанологов. Совместными усилиями было установлено, в частности, что землетрясения, возбуждающие волны цунами вызывают не только перемещения горных пород на дне океана, но и волновые движения в атмосфере. Частично энергия колебаний атмосферы передаётся поверхности океана, за счёт относительно высокочастотного периодического изменения атмосферного давления. При возрастании давления уровень океана понижается, при уменьшении давления, наоборот – уровень увеличивается. Образуются волны малой амплитуды, но с огромными длинами волн, что не позволяет сбрасывать их со счетов, как потенциальную опасность.

Самым последним катастрофическим проявлением грозных сил Земли стало землетрясение и последующее за ним цунами, произошедшее 26 декабря 2004 г. вблизи острова Суматра. На рис. 13.18, 13.19 показаны спутниковые характеристики катастрофических событий.



Рис. 13.18. Землетрясение 26. 12. 04 вблизи о. Суматра [34]

От этого цунами пострадало население семи стран, в общей сложности погибло и про-

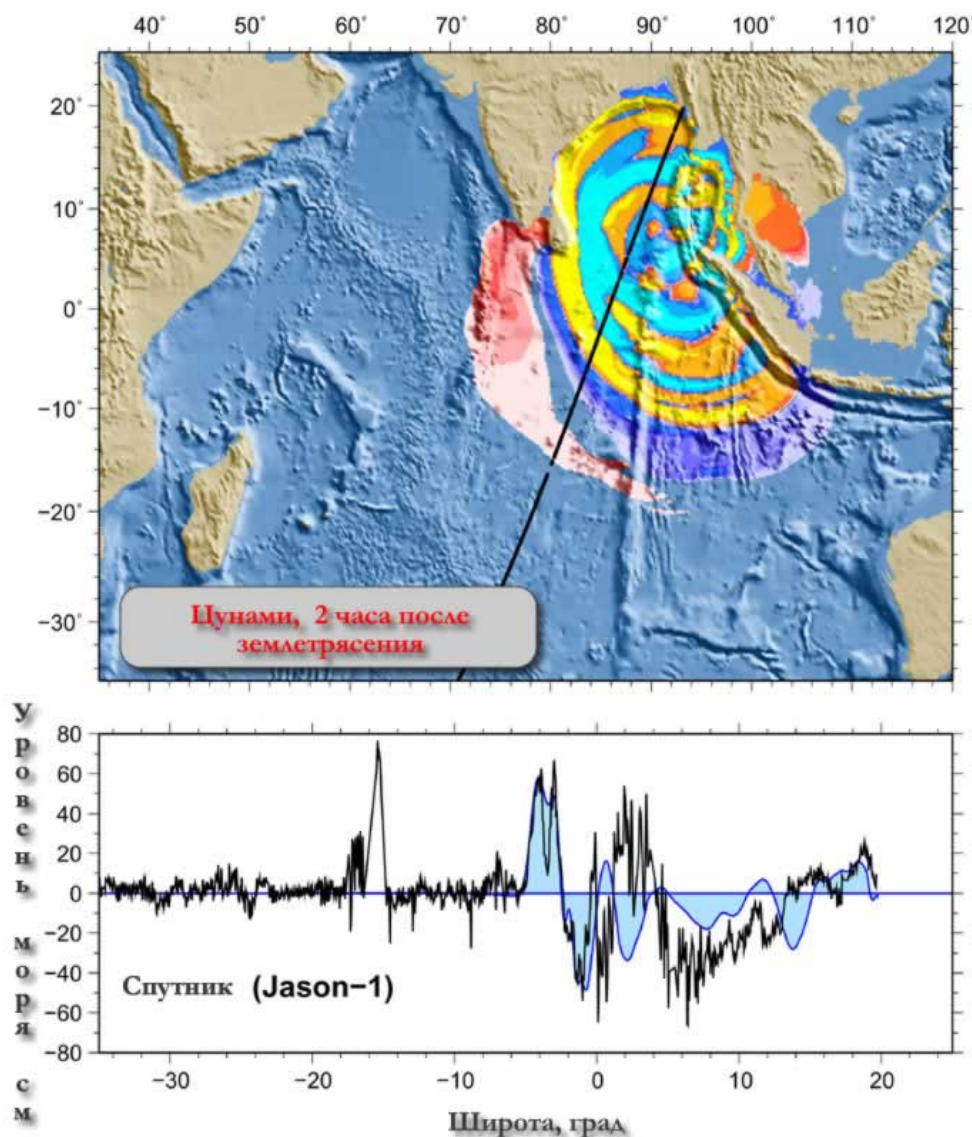


Рис.13.19. Уровень поверхности океана вблизи о. Суматра [34]

пало без вести более 240 тыс. человек, захоронено 113 913 человек. Разрушены многие прибрежные города.

Как утверждают очевидцы, многочисленные жертвы были вызваны неадекватным поведением людей. Так, например, на острове Пхукет за 20 мин. до цунами вода отошла от обычной своей линии на 800 м, обнажив дно. Островитяне не придумали ни чего лучше, как собирать на отливе рыбу и прочую морскую живность.

К настоящему времени зарегистрировано более 1000 случаев цунами, из которых более 100 – с катастрофическими последствиями, вызвавших полное уничтожение строительных сооружений и смыв почвенно-растительного покрова. Более 80% цунами возникают на периферии Тихого океана, включая западный склон Курило-Камчатского жёлоба. Исходя из закономерностей возникновения и распространения цунами, проведено районирование побережья по степени угрозы.

14. Волновые явления и эффекты

14.1. Явление дифракции

Явление дифракции заключается в изменении направления распространения волн при встрече с препятствием. Чаще всего при этом подразумевают интерференционные процессы, сопровождающие огибание препятствий. Строго говоря, явление дифракции сопровождает буквально все волновые процессы, являясь, по сути, визитной карточкой этого типа движения материи. Однако наблюдение дифракционных волновых картин становится возможным только в том случае, когда характерные размеры препятствия соизмеримы с длиной волны или меньше этой длины. Явление дифракции зарегистрировано для всего диапазона упругих волн, от инфразвукового диапазона до волн в гиперзвуковой области, включая акустические, гравитационные и сейсмические волны. На рис. 14.1 приведены картины прохождения гравитационно-капиллярных волн через щели различной ширины, наглядно видно, что явление искривления первоначального направления плоской волны тем проявляется сильнее, чем уже щель, т.е. чем её размеры более близки к длине падающей волны.

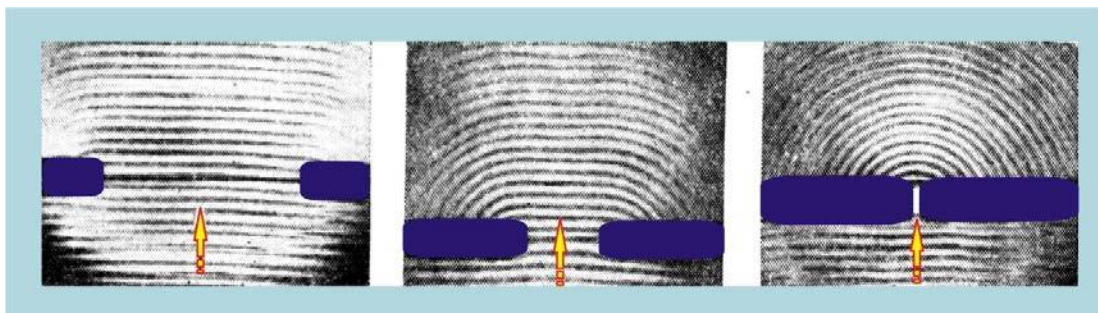


Рис. 14.1. Прохождение плоской упругой волны при различных размерах отверстия [35]

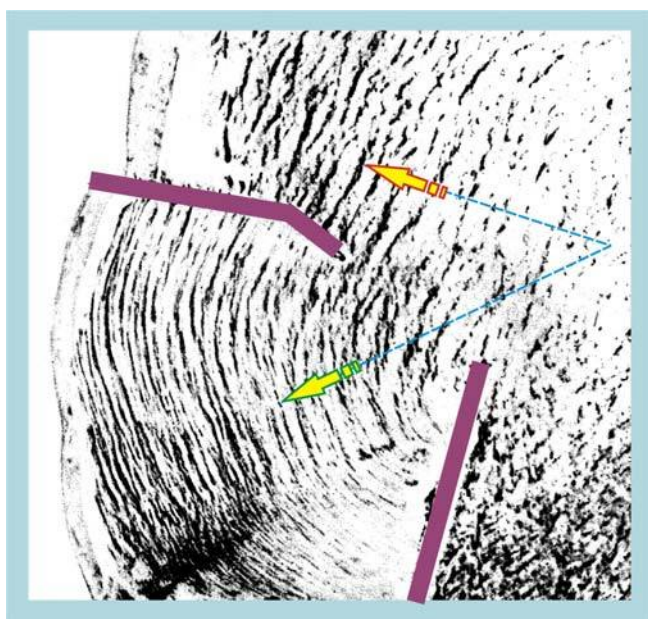


Рис. 14.2. Дифракция ветровых волн при прохождении дамбовых заграждений [21]

На рис. 14.2 показана картина дифракции ветровых волн при их прохождении системы двух дамб, предназначенных для защиты береговой черты от ветровых волн. Необходимо обратить внимание, что вследствие дифракции волн изменяется не только высота волн, но и их длина, что особенно важно с позиций защиты от разрушения причальных устройств и укрывающихся за дамбами судов.

Различают два вида дифракции: **дифракцию Френеля**, наблюдающуюся при взаимодействии с препятствиями сферических волн и **дифракцию Фраунгофера**, имеющую место при распространении плоских волн. Математическое решение задач первого типа представляется более сложной. Выражение для интенсивности

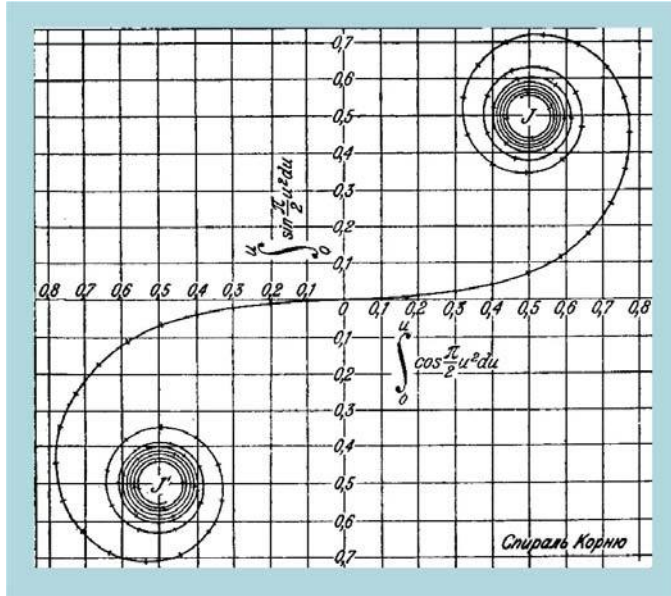


Рис. 14.3. Спираль Карно [36]

дифрагирующей волны J записывается в виде уравнения [36]

$$J = A^2(C^2 + S^2), \quad (14.1)$$

где A – постоянная величина, значения C и S находятся через интегралы Френеля. В координатах ξ , η интегралы имеют вид:

$$\xi = \int_0^u \cos \frac{\pi}{2} u^2 du; \quad (14.2)$$

$$\eta = \int_0^u \sin \frac{\pi}{2} u^2 du,$$

где u – в данном случае рассматривается как элемент дуги некоторой кривой, полученной в рассматриваемой координатной системе. Тангенс угла наклона α этой кривой к оси ξ определяется как

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} u^2 \right), \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} u^2. \quad (14.3)$$

Радиус же кривизны элемента дуги u запишется как

$$\rho = \frac{du}{d\alpha} = \frac{1}{\pi u}, \quad (14.4)$$

т.е. радиус кривизны кривой обратно пропорционален длине дуги. Поскольку

$$d\xi^2 + d\eta^2 = du^2,$$

то обсуждаемая кривая должна асимптотически закручиваться вокруг точек с координатами

$$\left\{ \begin{array}{l} K \left(+\frac{1}{2}; +\frac{1}{2} \right); \\ M \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right). \end{array} \right\}$$

Такая кривая была впервые построена Карно для интерпретации интегралов Фурье. Спираль Карно позволяет достаточно просто представлять общий характер дифракционной картины. Более точное решение предложено Кирхгофом, который ввёл понятие объёмной волновой функции Φ . Кирхгоф, используя теорему Грина, свёл к функции на произвольной поверхности, охватывающей данную точку наблюдения. Значение волновой функции по Кирхгофу в этой точке определяется уравнением

$$\Phi_0 = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} - \cos(\vec{n}; \vec{r}) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Phi}{r} \right) \right) \right] dS, \quad (14.5)$$

где интегрирование производится по всей поверхности S , $\vec{r}$ – расстояние от некоторой точки на поверхности до точки наблюдения, $\vec{n}$ – внешняя нормаль к поверхности. Уравнение Кирхгофа полностью заменяет принцип Гюйгенса-Френеля и позволяет получать количественные параметры волнового взаимодействия. Применительно к упругим волнам применение уравнения Кирхгофа встречает трудности в части задания величины Φ и $\partial \Phi / \partial n$ на вспомогательной поверхности, причём с уменьшением длины волны эти неопределённости уменьшают своё значение.

Дифракционные эффекты применительно к упругим волнам акустического и ультразвукового диапазона проявляются в виде: расхождение областей; распространяющихся волн при удалении от излучателя, при прохождении волнами отверстий в экранах; загибание акустических волн в область тени позади препятствий, больших по сравнению с длиной волны;

отсутствие тени позади препятствий, малых по сравнению с длиной волны. Кроме того, акустические поля дифрагируют на неоднородностях среды, в которой распространяются.

Для объектов превосходящих по размерам длину волны, степень отклонения от геометрической картины характеризуется значением волнового параметра

$$\wp = \sqrt{\frac{\lambda r}{D}}, \quad (14.6)$$

где D – поперечный размер объекта, r – расстояние наблюдения от объекта. Так, например, вблизи излучателя, работающего в поршневом режиме (излучение плоских волн) при $\wp \ll 1$ (ближняя или прожекторная зона излучения) поле образовано в основном цилиндрическим пучком лучей, исходящих от излучающей поверхности и имеет характер плоской волны с интенсивностью, постоянной по всему сечению и слабо зависящей от расстояния, т.е. в полном соответствии с законами геометрической акустики. Дифракционные эффекты проявляются только размыванием границ пучка. По мере удаления от поверхности излучателя дифракционные эффекты усиливаются, и при $\wp \approx 1$ поле теряет характер плоской волны и начинает представлять собой сложную интерференционную картину. На ещё больших расстояниях, при $\wp \gg 1$ (дальняя зона излучения) пучок трансформируется в сферически расходящуюся волну с интенсивностью, как и положено, убывающей обратно пропорционально квадрату расстояния и угловым распределением интенсивности, не зависящим от расстояния. В этой области поле снова начинает подчиняться законам геометрической акустики. Аналогичная дифракционная картина наблюдается при вырезании из плоской волны пучка (рис. 14.1).

Явлением дифракции, в частности, объясняется появление направленных свойств излучателей. Угловая ширина главного лепестка (угловое распределение интенсивности поля) вдали от поверхности поршневого излучателя составляет по порядку величины λ/D . Для сужения диаграммы направленности необходимо увеличивать размеры излучателя или уменьшать длину волны.

На рис. 14.4 приведены линии равного давления, заимствованные из учебника по акустике Л.Ф. Лепендина [37], для излучателя плоских волн цилиндрическим излучателем. Цифры на графике отражают отношение максимальной амплитуды давления к давлению в плоской волне. Плоскость, соответствующая приведенным данным находится в ближнем поле излучателя. Характерно, что если перемещать контрольную плоскость по нормали к излучателю, то обнаружится непостоянство амплитуды и фазы излучаемых волн, как это имеет место в идеальной плоской волне.

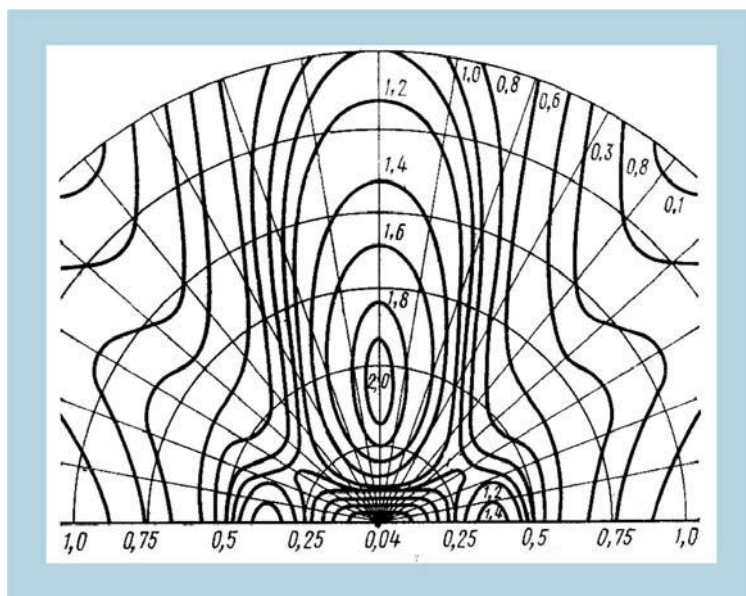


Рис. 14.4. Уровни равного давления [37]

14.2. Эффект Доплера

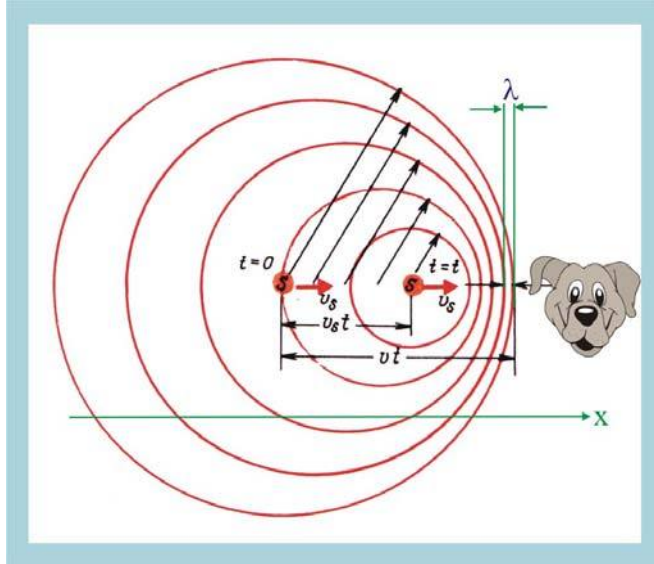


Рис. 14.5. Движущийся источник волн [38]

На практике можно наблюдать изменение частоты звука, издаваемого гудком железнодорожного локомотива при его прохождении мимо слушателя. При приближении источника частота кажется более высокой, а при удалении частота понижается. **Зависимость частоты движущегося источника акустических волн от взаимной скорости перемещения источника и приёмника волн была впервые установлена австрийским физиком Иоганном Доплером (1803 – 1853).** Вначале эффект был описан применительно к волнам акустического диапазона, а позже было установлено, что он наблюдается для всех типов волн, включая электромагнитные волны.

Пусть источник сферических волн S постоянных по частоте и амплитуде движется с постоянной скоростью v_s в направлении к внимательному слушателю (рис. 14.5). Рассмотрим проекцию волновой картины на плоскость, в которой располагается наблюдатель и вектор скорости источника. Если подвижную систему отсчёта (ПСК) связать с движущимся источником, то измерения зафиксируют частоту его колебаний ν_s . За некоторый промежуток времени τ источник испустит количество длин волн, равное

$$N_\lambda = \nu_s \tau. \quad (14.7)$$

В промежутке времени от $t = 0$ до $t = \tau$ будет наблюдаться следующая волновая картина. Волна, испущенная при $t = 0$, пройдёт расстояние

$$x_1 = v\tau, \quad (14.8)$$

где v – скорость волн в данной среде, которая считается независимой от взаимного перемещения источника и приёмника. К моменту окончания промежутка времени τ , т.е. при испускании последней из N_λ волн источник проделает расстояние

$$x_2 = v_s \tau. \quad (14.9)$$

Таким образом, N_λ волн занимают на оси x расстояние

$$\Delta x = v\tau - v_s \tau. \quad (14.10)$$

С точки зрения наблюдателя их длина определится как

$$\lambda_H = \frac{\Delta x}{N_\lambda} = \frac{v\tau - v_s \tau}{\nu_s \tau} = \frac{v - v_s}{\nu_s}. \quad (14.11)$$

Уравнение (14.11) можно переписать следующим образом

$$\nu_H = \frac{v}{\lambda_H} = v \frac{\nu_s}{v - v_s} = \nu_s \frac{v}{v - v_s},$$

или в окончательном виде

$$\nu_H = \frac{\nu_s}{1 - \frac{v_s}{v}}. \quad (14.12)$$

В акустике принято эффект Доплера принято записывать в виде следующего уравнения

$$\nu_{\text{Пр}} = \frac{\nu_{\text{Ис}}}{1 - \frac{\nu_{\text{Ис}}}{c}}, \quad (14.13)$$

где $\nu_{\text{Пр}}$ – частота колебаний, воспринимаемая приёмником, $\nu_{\text{Ис}}$ – частота колебаний, испускаемая источником волн, c – скорость звука. Уравнение эффекта Доплера показывает, что частота звука увеличивается при движении источника в сторону наблюдателя. Если источник станет удаляться, то уравнение (14.13) необходимо переписать следующим образом

$$\nu_{\text{Пр}} = \frac{\nu_{\text{Ис}}}{1 + \frac{\nu_{\text{Ис}}}{c}}, \quad (13.14)$$

что показывает уменьшение частоты принимаемых колебаний по сравнению с частотой источника.

Достаточно просто качественную картину эффекта Доплера можно наблюдать при возбуждении гравитационно-капиллярных волн на поверхности жидкости, заставив источник колебаний перемещаться относительно поверхности жидкости, с которой связана система отсчёта наблюдателя. Отчётливо видно, что имеет место изменение длины волны, в соответствии с уравнением (14.12).

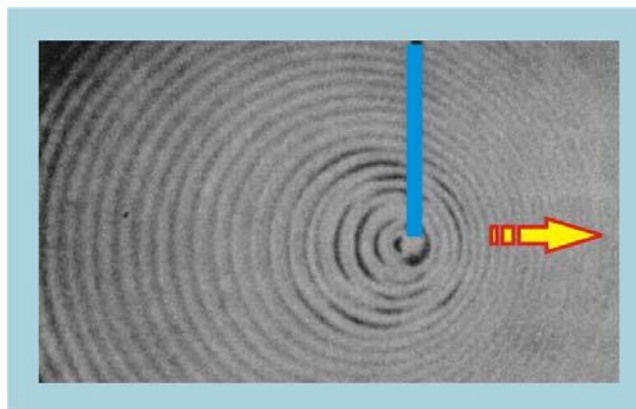


Рис. 14.6. Движущийся источник поверхностных волн [38]

Эффект Доплера весьма успешно использовался до появления лазерных приборов работниками ГИБДД в «любимых» автолюбителями приборах, именуемых в простонародии «фарами» (рис. 14.7).

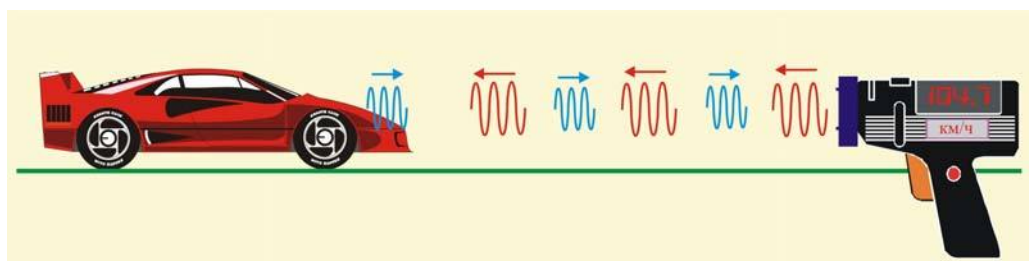


Рис. 14.7. Доплеровский измеритель скорости

Волновой импульс фиксированной частоты излучался в направлении движущегося транспортного средства, отражался от него и снова попадал на приёмник, совмещённый с излучателем. Автомобиль в данном случае является вторичным движущимся источником. В зависимости от скорости движения автомобиля меняется частота принимаемого сигнала, далее изменение частоты посредством электроники поступает на измеритель скорости

$$\nu_{\text{Авт}} = \frac{c(\nu_{\text{Отр}} - \nu_{\text{Ист}})}{\nu_{\text{Отр}}}, \quad (14.15)$$

где $\nu_{\text{Авт}}$ – скорость автомобиля, $\nu_{\text{Ист}}$ – частота источника волнового импульса, $\nu_{\text{Отр}}$ – частота отражённого от автомобиля сигнала. Подобные системы, доплеровские лаги использовались до появления спутниковых навигационных систем для определения скорости судов относительно воды.

14.3. Звуковой удар

Когда скорости летательных аппаратов достигли, а затем и превзошли скорость звука в воздухе, то появился термин «преодолеть звуковой барьер», а вместе с этим термином возникло понятие – звуковой удар, которое проявлялось для наблюдателей, находящихся на земле в виде интенсивного броска акустического давления, воспринимаемого в виде грома.

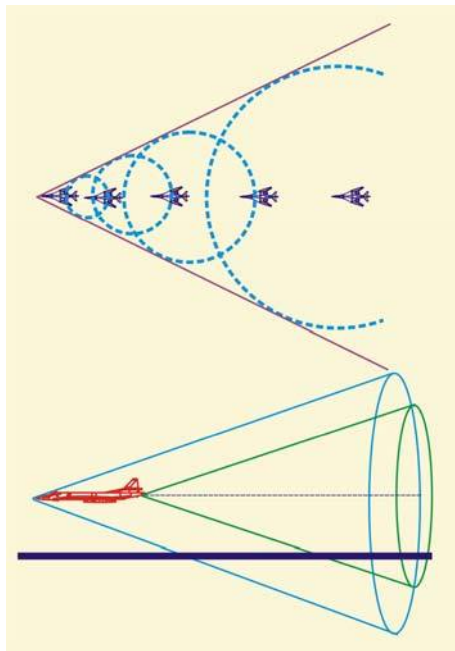


Рис. 14.8. Схема возникновения ударных волн

По первости считали, что звуковой удар возникает в момент преодоления самолетом скорости звука. Оказалось всё не так просто, самолёт, летящий со сверхзвуковой скоростью «тащит» за собой многократно повторяющиеся ударные волны, которые облучают полосу шириной до 50 км километров (рис. 14.8).

Создаваемый самолётом аэродинамический поток за счёт значительных перепадов давления приводит к образованию несколько ударных волн, наиболее интенсивными из которых являются волны, возникающие при обтекании носовых областей, крыльевых профилей и хвостового оперения (рис. 14.9). При распространении от самолёта волны накладываются друг на друга, что приводит к резкому увеличению давления в начале и конце этой группы волн. Такие **перепады давления, т.е. скачки уплотнения, называют ударными волнами**. Возникающая система волн, имеющая практически коническую форму, сопровождает самолёт при его сверхзвуковом движении. Достигшие поверхности земли волны отражаются и рассеиваются. Временное распределение давления в виде суммы падающих и отражённых волн воспринимается наблюдателями как ударная волна. В нижней части рис. 14.9 приведена временная зависимость давления.

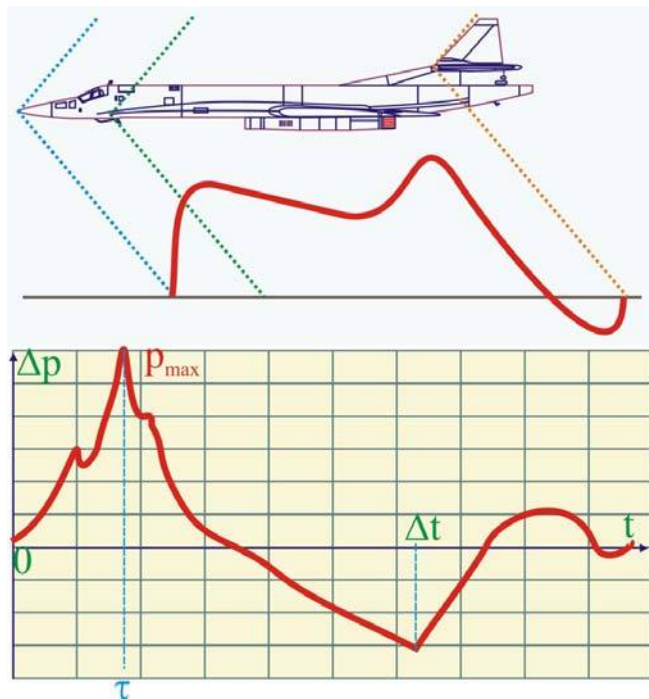


Рис. 14.9. Образование ударных волн

Время Δt от начала удара до второго пика называется общей длительностью звукового удара. Ввиду сходства графика зависимости давления от времени с написанием латинской буквой N этот тип волн получил название N – образной волны давления. Промежуток времени τ измеряется обычно в пределах 1 – 30 мс, в то время как Δt равно 100 – 400 мс. Вследствие столь большой разницы во времени между двумя бросками давления ударная волна на земле воспринимается в виде сдвоенного громоподобного звукового импульса. В ряде случаев при наличии на поверхности земли отражающих и поглощающих

щих поверхностей в виде лесных массивов, строений, распаханной земли и т.д. звуковой удар может восприниматься в виде одиночного импульса давления.

Наибольшее значение максимального броска давления наблюдается при взлёте самолёта, горизонтальный полёт характеризуется уменьшением интенсивности ударной волны (рис. 14.10). Значение максимума давления в ударной волне, в общем случае, зависит от числа Маха (отношение скорости самолёта к скорости звука в воздухе) и геометрии планера.

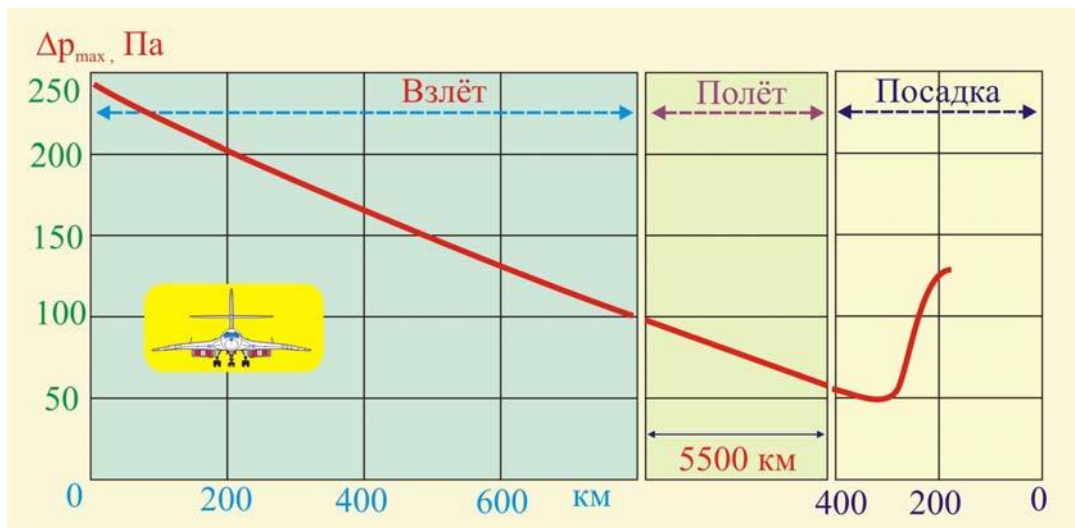


Рис. 14.10. Расчётное максимальное избыточное давление в ударной волне для стратегического бомбардировщика Ту – 160

Воздействие звукового удара на человеческий организм характеризуется более всего психологическими свойствами, нежели физиологическими, так называемый, «эффект испуга». Воздействие звукового удара сопровождается учащением дыхания, нарушением сердечной деятельности, нарушением мышечных реакций. Упрощённая оценка громкости звукового удара может быть произведена по приближённому уравнению [29]

$$L = [79 + 20 \lg(\Delta p_{max} - 12,5 \lg \tau)], \text{ Дб}, \quad (14.16)$$

где Δp_{max} – максимальное избыточное давление, Н/м², τ – время нарастания давления, мс. Естественно, что громкость ударной волны нарастает с увеличением Δp_{max} и уменьшается с увеличением промежутка времени τ .

Специальные исследования, проведенные на мысе Канавэрал, показали, что при пролёте на сверхзвуке звена сверхзвуковых истребителей вдоль земной поверхности распространяются ударные волны, провоцирующие небольшие землетрясения. Уменьшение интенсивности ударной волны достигается несколькими способами компоновки фюзеляжей и крыльевых оперений. Прежде всего хорошие результаты (снижение Δp_{max} до 17%) даёт смещение крыла к хвостовой части фюзеляжа, кроме того, при уменьшении относительной толщины крыла удаётся снизить величину Δp_{max} на 11%. Фюзеляжу самолёта придаётся иглообразная форма. Отечественными конструкторами первыми в мире начали использоваться летательные аппараты с изменяемой стреловидностью крыла, эта характеристика (наряду с аэродинамикой) позволяет снижать интенсивность звукового удара (рис. 14.11).

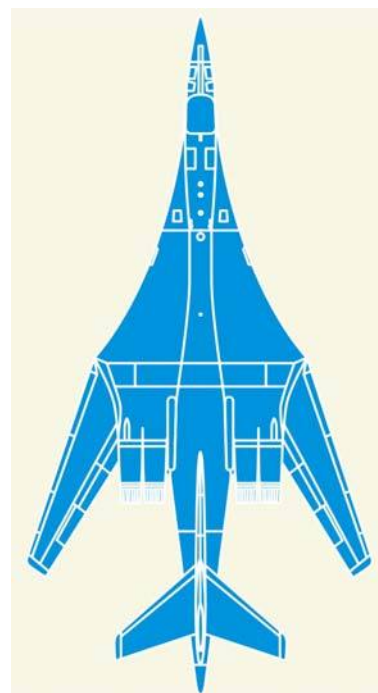


Рис. 14.11. Изменяемая геометрия крыла самолёта

15. Эхолокация

15.1. Вводные замечания

Явление эхолокации в природе было достаточно подробно исследовано сравнительно недавно, около 70 лет назад, хотя интерес к использованию акустических волн для ориентации некоторых представителей фауны возник в XVIII столетии и связан с исследованиями итальянского учёного Лазаро Спалланциани (1729 – 1799). Этот, знаменитый в своё время учёный, был универсален в выборе областей приложений своего таланта и энциклопедических знаний [39]. В разное время он заведовал кафедрами высшей математики, физики, логики, естественных наук и даже греческого языка. На протяжении всей своей творческой биографии Спалланциани исследовал феномен регенерации органов у некоторых типов достаточно высокоорганизованных животных. Именно Спалланциани обнаружил, что оторванный у ящерицы хвост через некоторое время отрастает снова, такое же наблюдалось и с лапами тритона. Им были проведены и подробно описаны многочисленные эксперименты с



Рис. 15.1. Полёт во тьме

хвостами и лапами. Спалланциани был, так же, первым, кто успешно провёл искусственное осеменение млекопитающих. В возрасте 64 лет исследователь заинтересовался способами ориентации ночных животных.

Спалланциани обратил внимание на то, что в абсолютно тёмной комнате летучие мыши летают, свободно ориентируясь в обстановке, в то время как совы и филины становятся совершенно беспомощными. Серия остроумно спланированных экспериментов позволила Спалланциани получить уникальные сведения об особенностях ориентации в пространстве летучих мышей (рис. 15.1). К сожалению, учёный результаты своих экспериментов не публиковал, сведения о них сохранились только в виде многочисленных писем коллегам – биологам.

В начальной стадии экспериментов Спалланциани предполагал, что уникальные способности мышей обусловлены исключительно необыкновенной остротой зрения. Однако когда на головки животных были надеты светонепроницаемые колпачки, они стали наткаться на предметы и стены. Казалось бы, загадка рукокрылых была решена. Однако светопроницаемые колпачки привели к тому же результату, мыши теряли способность обнаруживать предметы в темноте. Далее была проведена хирургическая операция по удалению органов зрения. Будучи лишёнными глаз, мыши, оправившись после операции, прекрасно летали по тёмной комнате, не натываясь на предметы. Оповестив о полученных результатах своих коллег, он попросил повторить его опыты и поделиться результатами. Швейцарский энтомолог (специалист по насекомым) Шарль Жюрин в 1794 г. провёл серию экспериментов, в ходе которых выяснилось, что если мышкам плотно закупорить уши воском или другим подобным материалом, то они напрочь теряли свои способности ориентироваться в темноте. Был сделан вывод, что органы слуха животных обладают свойствами зрения, о чём Жюрин оповестил учёный мир в своей публикации в 1798 г.

Спалланциани, ознакомившись с последними результатами из Швейцарии, решил их уточнить. Он изготовил миниатюрные тонкостенные латунные трубочки и поместил их в

слуховые проходы. Стоило закрыть внешние торцы трубочек, и мыши теряли способность ориентироваться. При открытых торцах даже ослеплённые мыши летали, свободно ориентируясь в затемнённом пространстве. Спалланциани тем самым подтвердил догадку Жюрина, о превалирующей роли слухового аппарата мышей при выборе траектории их движения в темноте. Выводы Спалланциани и Жюрина не встретили поддержки среди коллег, которые усомнились в достоверности гипотезы. Полёт мышей протекал бесшумно, поэтому, по мнению большинства учёных, об использовании слуха в этой ситуации было предполагать некорректно. Развязалась многолетняя научная дискуссия. К сожалению ни эксперименты Спалланциани, ни опыты Жюриана, ни работы их многочисленных последователей не смогли с точки зрения биологии объяснить суть наблюдаемого феномена.

Впервые предположение о звуковой локации у летучих мышей высказал знаменитый изобретатель пулемёта Х. Максим в 1912 г. Идея об эхолокации у Максима возникла после трагической гибели «Титаника», столкнувшегося с айсбергом. Максим ошибочно полагал, что мыши используют низкочастотные сигналы с частотой порядка 15 Гц и соответственно длиной волны 24 м, генерируемые при взмахе их крыльев.

Это заблуждение развеял английский нейрофизиолог Хартридж. Однажды ночью в домашний кабинет Хартриджа в погоне за насекомыми в форточку влетело несколько летучих мышей, принявшихся гоняться за крылатыми кровопийцами – комарами. Хартридж закрыл форточку и погасил свет, охота тем временем продолжалась. Хартридж начал экспериментировать. Он, прикрывая двери из кабинета в смежную комнату, обнаружил, что летающие животные очень точно определяют ширину оставленной щели и никогда не пытаются пролететь её, когда ширина пространства между дверью и притолокой меньше их размеров. Стало ясно, что мыши используют для своих ориентационных целей высокочастотные колебания, длины волн которых меньше ширины оставляемых для их пролёта щелей. С другой стороны, поскольку человеком испускаемые мышками сигналы не воспринимаются, то они должны быть выше 20 кГц. Это произошло уже в 1920 г. Будучи занят другими плановыми исследованиями, Хартридж не стал проводить дальнейших исследований.

Центр исследований «мышинного феномена» переместился в Америку, где в физической лаборатории Гарвардского университета в 1937 г. был построен прибор для приёма и анализа акустических волн ультразвукового диапазона. Прибор состоял из пьезокварцевого микрофона, расположенного в фокусе параболического отражателя, узкополосного усилителя и самописца уровня, посредством которого записывался уровень принимаемого сигнала в логарифмическом масштабе на бумажную ленту. В устройстве использовался перенос частоты по супергетеродинной схеме. Ультразвуковые частоты преобразовывались в звуковую частоту 1 кГц, амплитуду которой можно было измерять стандартными методами и средствами. Подобное преобразование происходит в радиоприёмниках, где из высокочастотной модулированной электромагнитной волны детектируется низкочастотная огибающая. Прибор Г. Пирса (он был руководителем проекта) работал в диапазоне частот 10 – 80 кГц. Используемый усилитель мог изменять полосу пропускаемых частот, что позволяло оценивать частотные параметры принимаемых сигналов.

Именно ультразвуковым приёмником Г. Пирса удалось впервые зарегистрировать ультразвуковые импульсы, излучаемые летучими мышами. В своём дневнике учёный – акустик Гриффин записал: «Как только я поднёс летучих мышей к аппарату Пирса, сразу же обнаружилось, что они излучают множество звуков, но почти все эти звуки попадают в диапазон частот, лежащих выше порога слышимости человека» [39].

Пирс и Гриффин установили, что мыши издают звуки в диапазоне 30 – 70 кГц, причём максимальная интенсивность имела место в диапазоне частот 45 – 50 кГц. Кроме того, эти учёные выяснили, что летучие мыши испускают не тональные, а импульсные сигналы, длительность которых составляет 100 – 200 мс. Позже было установлено, что эхолокацию используют кроме мышей некоторые птицы, например ночные птицы гуахаро, стрижи саланганы и некоторые особи из подотряда крыланов. Однако буквально сенсацией явились данные об использовании эхолокации некоторыми видами морских млекопитающих, китами, дельфинами и др.

15.2. Воздушная эхолокация

Интерес учёных к воздушной эхолокации выразился, прежде всего, в подробном исследовании типа излучаемых и принимаемых этими животными акустических сигналов. Появился новый раздел акустики – биоакустика, в рамках которой изучались способности живой материи излучать и принимать акустические волны. Рукокрылые (рис. 15.2) стали объектом пристального внимания и подражания.



Рис. 15.2. *Barbastella barbastellus*

В ходе исследований было установлено, что мыши в качестве зондирующих сигналов используют короткие в несколько миллисекунд частотно-модулированные импульсы, частота в которых изменяется по закону, близкому к линейному (рис. 15.3). Частота, при этом изменяется на одну октаву в сторону уменьшения.

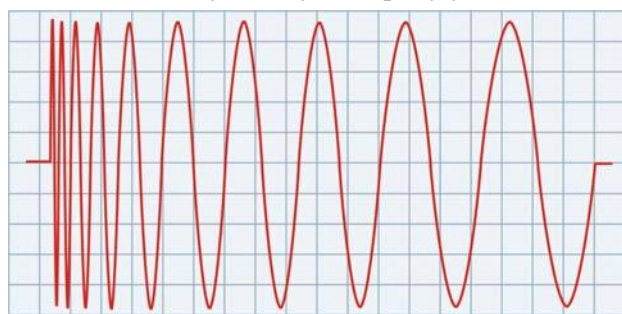


Рис. 15.3. Частотно-модулированный сигнал

Некоторые животные испускают сигналы в виде более продолжительных импульсов длительностью 10 – 100 мс с постоянной частотой заполнения. Встречались особи, использующие комбинированные типы сигналов. В зависимости от ситуации рукокрылыми используются как короткие высокочастотные тональные импульсы, так и более продолжительные по времени частотно-модулированные колебания.

Особую группу, с позиций классификации излучаемых сигналов представляют американские листоносы и вампиры. Они издают менее интенсивные колебания ультразвукового диапазона, в этой связи их прозвали – шептунами, в которых присутствует целый набор частот, с присутствием вторых и третьих гармоник, которые появляются и исчезают в процессе излучения отдельных импульсов.

Следует отметить, что до выяснения акустического феномена летучих мышей, считалось, что акустические колебания ультразвукового диапазона встречаются в живой природе крайне редко. Человек эгоистичен даже в мелочах. Поскольку я не слышу, значит, этого не существует. Известные подходы с позиций венца Природы. Оказалось, что ультразвуковые волны

излучают как беспозвоночные, так и позвоночные живые организмы. Выяснилось, что человек обитает в большей степени в мире ультразвуков, нежели в мире воспринимаемых им звуков. Молния, гром, сильный ветер, снежные бураны, горные овалы, землетрясения – вот не полный перечень природных явлений, при течении которых излучаются волны ультразвукового диапазона. В живой природе источников ультразвука тоже, хоть отбавляй. Так, например прямокрылые сверчки и цикады на расстоянии полуметра создают уровень акустического давления на ультразвуке порядка 90 дБ. Оказалось, что все природные источники, включая джунгли и океаны, создают естественный ультразвуковой фон.

Приведём пример из собственного опыта. В одной из гидроакустических лабораторий исследовались явления дифракции на ультразвуковых излучателях, размещённых на цилиндрических телах. Устройства предназначались для использования в водной среде. Эксперименты в воде было решено проводить (они стоят больших денег) после модельных испытаний в воздухе. В качестве полигона был выбран отдалённый от городского шума массив кустарника, преимущественно орешника и шиповника, которые достаточно хорошо поглощали и рассеивали рабочие частоты излучения, порядка 30 кГц. Суть эксперимента заключалась в следующем (рис. 15.4), цилиндрическая модель обтекаемого тела вращалась вокруг своей оси, при этом пьезокерамическая антенна *И* излучала тональный сигнал, который принимался остронаправленным микрофоном *Пр* и далее через селективный (настраиваемый в узкой полосе частот) усилитель уже электрическое напряжение подавалось на самописец уровня, который и выписывал диаграмму направленности, т.е. зависимость уровня создаваемого антенной акустического давления от угла поворота цилиндра вокруг собственной оси. Оказалось, что на частоте 30 кГц в дневное время измерения проводить невозможно. Спустя некоторое время после развёртывания аппаратуры, откуда-то налетели птицы, воробьи (1), щуры (2), стрижи (2) и начали интенсивно общаться, создавая на рабочей частоте помеху. Пришлось перенести эксперименты на тёмное время, когда наши пернатые соседи отходили на ночной покой. Правда, ночь тоже были некоторые помехи от комаров, но гораздо меньшие по уровню создаваемого на рабочей частоте акустического давления.

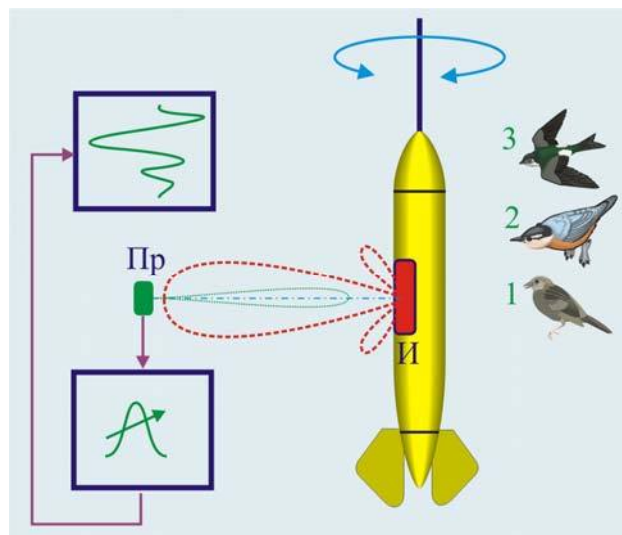


Рис. 15.4. Измерение диаграммы направленности

Но вернёмся к летучим мышам. Акустический локационный аппарат этих животных эволюционировал, естественно, исходя из влияния внешней среды, и необходимости к ней приспособиться. Значительное число пород летучих мышей питаются насекомыми, иные предпочитают мелкую рыбёшку, когда есть такая возможность. Предположим, что характерный размер мышиной добычи составляет $D \cong 2,5 \cdot 10^{-3}$ м, для обнаружения её длина излучаемой волны должно выполняться условие $\lambda < D$. Для обнаружения такой «цели» в режиме тонального сигнала частота должна быть более 135 кГц. При импульсном режиме излучения в сочетании с частотной модуляцией, надёжное обнаружение возможно и в более низкой полосе частот. Длительность излучаемых акустических импульсов у различных пород мышей варьируется от 0,19 мс до 6,5 мс, причём частота колебаний, например, у гладконосых представителей (*Vespertilionidae*), во время излучения одного импульса изменяется в пределах от 43 – 23 кГц, до 130 – 16 кГц (рис.15.5). Форма импульсов гладконосых летучих мышей разнообразна, причём форма часто изменяется от импульса к импульсу. В большинстве своём импульсы начинаются с незначительных амплитуд, которые нелинейно возрастают, в пределах импульса иногда меняется их амплитуда, затем следует резкий спад. Максимальная длительность излучаемых импульсов не превышает 10 мс, вместе с тем, исследователями отмечено, что если впереди летящей мыши пустое пространство, то длительность импульсов

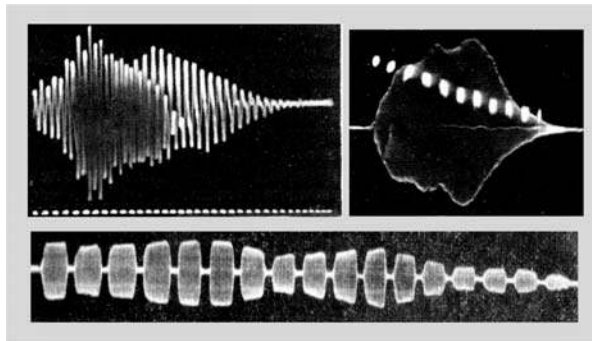


Рис. 15.5. Осциллограммы импульсов [39]

дает на одну две октавы. При длительности зондирующего импульса 2 мс и периоде колебаний $2 \cdot 10^{-5}$ с ($\nu = 50$ кГц) изменение частоты должно протекать весьма быстро, эквивалентно двойному диапазону частот, воспринимаемых человеческим ухом.

Заполнение импульса, в большинстве своём, носит гармонический характер, однако встречаются колебания с изломами, что говорит о присутствии в колебаниях гармоник, вторых и третьих, что повышает частотное заполнение зондирующих импульсов до 240 – 300 кГц, что значительно повышает разрешающую способность мышиноного локационного аппарата. Некоторые исследователи уверены, что в спектре излучаемых сигналов присутствуют гармоники выше третьей, но их регистрация была затруднена применяемой аппаратурой.

Интенсивность излучения в период следования импульса высокая. На расстоянии 5 – 10 см уровень акустического давления составляет 109 дБ. Если бы излучение рукокрылых находилось в воспринимаемом человеком звуковым диапазоне, то оно воспринималось бы как серия пистолетных выстрелов на близком расстоянии.



Рис. 14.6. *Rhinolophus ferrum-equinum* [39]

две сросшиеся пластины с контуром в форме запятой. Поверхность подковы при излучении импульса изменяет волнообразно свою форму с частотой посылаемого сигнала. Предполагают, что изменение формы излучающей поверхности, что способствует формированию диаграммы направленности. Было отмечено, что расстояние между ноздрями подковоноса всегда составляло половину длины волны. Излучатель подковоноса устроен по принципу двух когерентных источников волн, расположенных в горизонтальной плоскости на расстоянии половины длины излучаемой волны. В результате интерференции волн формируется узкая диаграмма направленности, дающая возможность определять положение цели по интенсивности отражённого сигнала. Первичным источником ультразвуковых колебаний у рукокрылых служит гортань, характеризующаяся относительно большими размерами и сильно развитой мускулатурой, приводящей в колебательное состояние окостенелые образования.

Приём отражённых ультразвуковых импульсов осуществляется слуховым анализатором, состоящим из сложной формы ушных раковин и звукового прохода, барабанной перепонки и слуховых косточек и улитки с кортиевым органом, всё как у людей, только орган слуха мышей настроен на ультразвуковой диапазон частот.

уменьшается до 2 – 5 мс. При обнаружении цели, например в образе кровососа (комара) мыши значительно укорачивают импульсы, понижая их длительность до 0,5 – 0,2 мс.

Для импульсов гладконосов, как впрочем, и для некоторых других пород, как отмечалось ранее, характерно использование частотной модуляции. В начале импульса его заполнение более высокое (рис. 15.3), за короткую длительность отдельно взятого импульса частота заполнения па-

Излучение ультразвука большинством пород летучих мышей производится при колебаниях ноздрей, хотя некоторые породы могут излучать как ноздрями, так и ртом. На рис. 14.6 показан большой подковонос. Его дугообразные излучающие ноздри расположены в глубине подковы – носового листка, на котором выделяются три составные части. В верхней части ноздрей расположен ланцет – узкий кожный вырост, заострённый на конце в виде козырька. Для чего ланцет сотворён природой пока до конца не ясно, есть предположение, что ланцет предназначен для определения направления ветра. Подкова, представляющая

15.3. Эхолокация в воде

Прежде чем приступить к обсуждению акустических свойств китообразных, приведём некоторые общие сведения об этих удивительных и во многом загадочных морских животных. Размеры этих морских млекопитающих лежат в широких пределах от 0,9 до 33 м, масса китообразных (рис. 15.6) колеблется от 30 кг до 140 т. Эти гиганты в планетарном масштабе отличные пловцы с формой туловища, идеально приспособленного с позиций гидродинамики для передвижения в воде с большими скоростями (рис. 15.7). Основным движителем китообразных является хвост, снабжённый мощной мускулатурой. Эти животные, считавшиеся определённое время рыбами, были на протяжении всей истории человечества под пристальным вниманием. Ещё древние мудрые греки, как впрочем, и другие приморские народы обожествляли дельфинов, считая их своими братьями по разуму. В одно недавнее время даже культивировались гипотезы о непосредственном родстве человека и китообразных, в частности дельфинов. Дело в том, что из всех других многочисленных представителей животного мира у дельфинов наиболее развит мозг, чем так любит кичиться венец природы. Тем не менее это сходство не помешало в течение многих лет вести активный промысел китов всех пород и дельфинов, – царь окружающего пространства, одним словом.

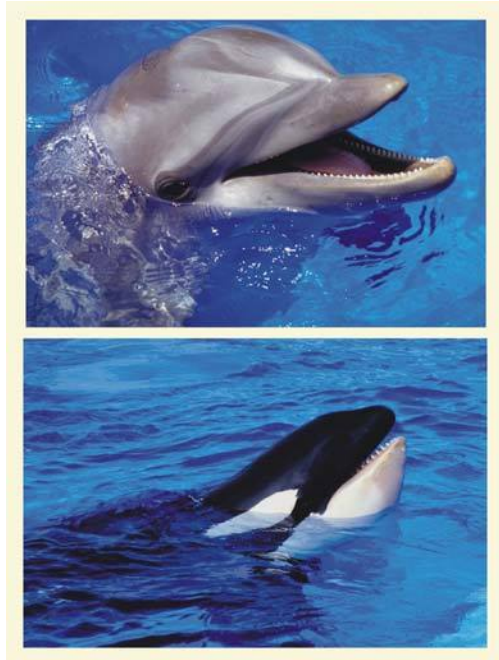


Рис. 15. 7. Китообразные

Современных китообразных принято делить на два подотряда – усатых и зубатых китов (рис. 15.8). У усатых китов зубы отсутствуют вообще, природа заменила их системой из 130 – 400 роговых пластин с каждой стороны челюсти, которая образует своеобразное сито, пропускающее воду и задерживающее мелких обитателей моря, являющихся основным кормом. Язык усатых китов выполняет, наряду с прочим, роль поршня, выталкивающего воду за пределы ротовой полости. Усатые киты насчитывают 9 видов, которые объединяются в три семейства: полосатики, гладкие киты и серые киты. Наибольшие скорости, до 40 км/час развивают полосатые киты, имеющие стремительные обводы. На их горле и брюхе расположено от 12 до 120 продольных глубоких складок. Гладкие киты представляют неторопливыми и степенными, они передвигаются со скоростью до 17 км/час. Семейство серых китов занимает промежуточное положение между первыми двумя и имеет длину 14 – 15 м.

Зубатые киты включают четыре семейства и представлены более 50 видами, из которых 23 обитают в территориальных водах России. Длина зубатых китов, в целом, меньше чем усатых и колеблется от 0,9 до 21 м. Рот китов наполнен до 240 конических зубов. В отличие от усатых китов с двумя дыхалами, у зубатых одно дыхало.

Наибольшее по составу семейство – дельфины, в него входит 20 родов животных, размерами до 10 м, которые могут двигаться в воде достаточно длительное время со скоростями 45 км/час и более. Дельфины, как в прочем и другие китообразные обитают, с позиций комфортности, в идеальной среде с незначительно меняющейся температурой и обилием пищи. Глобальных врагов, кроме естественно человека, у дельфинов нет. Их скоростные характеристики и высокая общественная организация делают их мало уязвимыми даже для таких опасных хищников как касатки и акулы.

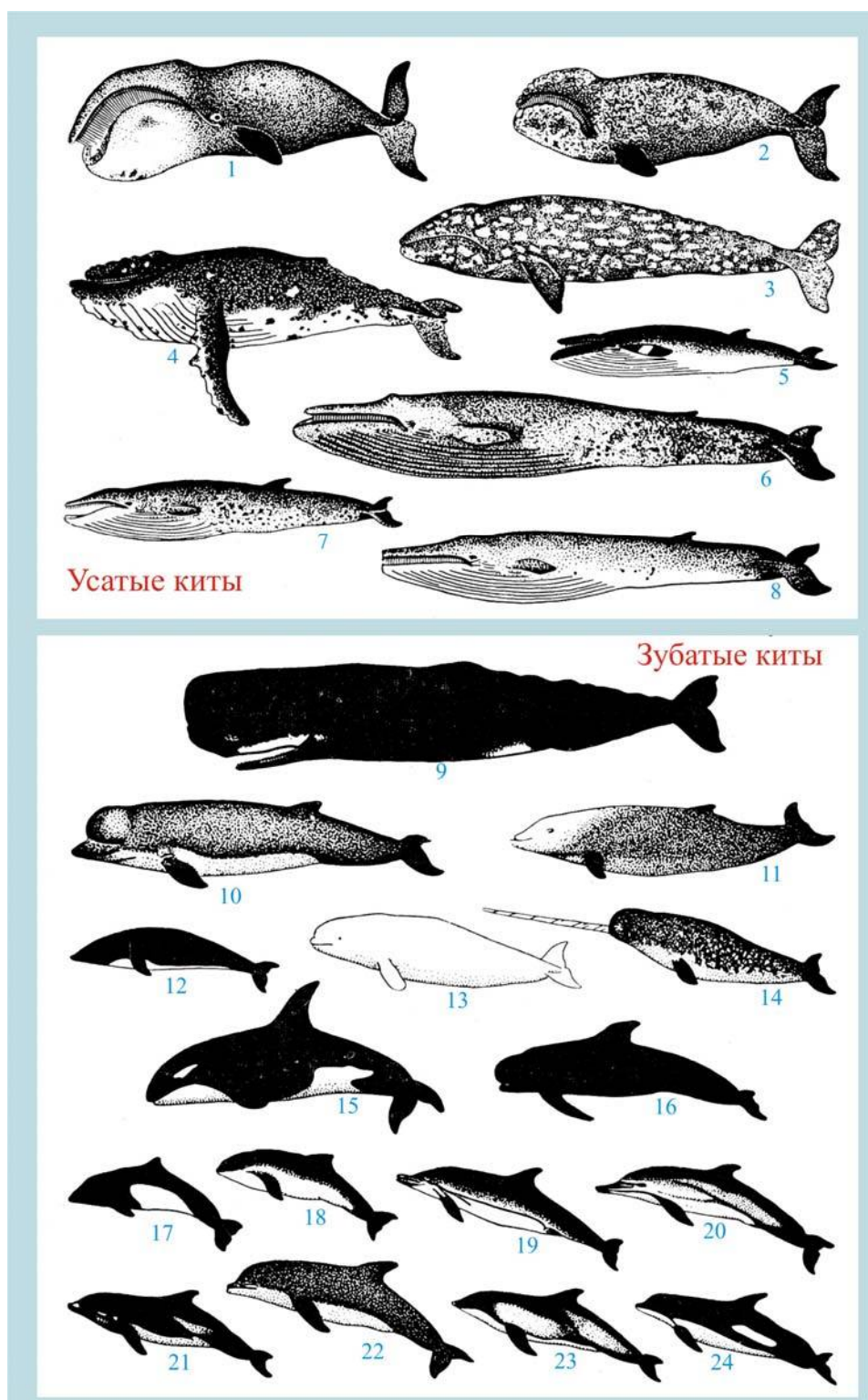


Рис. 15.8. Классификация китообразных: 1 – гренландский кит; 2 – южный кит; 3 – серый кит; 4 – горбач; 5 – малый полосатик; 6 – блювал (синий кит); 7 – сейвал, 8 – финвал; 9 – кашалот, 10 – бутылконос, 11 – клюворыл; 12 – китовидный дельфин; 13 – белуха; 14 – нарвал; 15 – касатка; 16 – гринда; 17 – белокрылая морская свинья; 18 – обыкновенная морская свинья; 19 – полосатый продельфин; 20 – обыкновенный дельфин – белобочка; 21 – белоносый дельфин; 22 – афалина; 23 – тихоокеанский белобокий дельфин; 24 – белобокий дельфин [39].

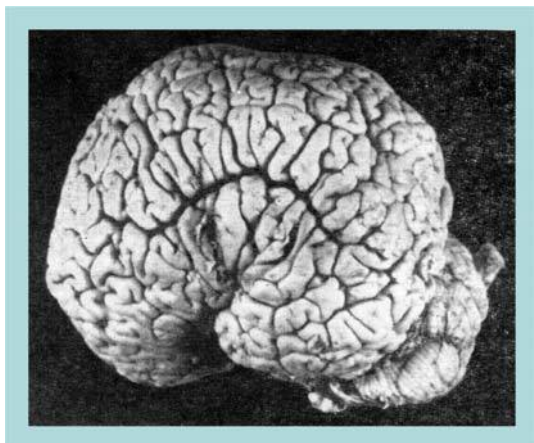
Китообразные, являясь млекопитающими, имеют внутренние органы, существенно отличающиеся от аналогичных органов сухопутных животных. Практически все китообразные имеют теплоёмкость в 20 раз превышающую теплоёмкость воздуха, что немаловажно для сохранения постоянства температуры тела, т.е. для терморегуляции. Кроме того, погружение на глубины до 500 м и более, сделало необходимым оптимизацию формы тела и специальных гидростатических компенсационных органов и механизмов.

Как отмечено выше, китообразные имеют уникальные для обитателей Мирового океана скоростные характеристики, соотносящиеся с их пищевыми устремлениями: ихтиофаги; планктофаги; теутофаги и бентофаги. Самыми быстроходными являются ихтиофаги и теутофаги. Сейвал способен развивать скорость до 15 км/час, финвал до 17 км/час, дельфины демонстрируют скорости до 50 км/час и выше. Описаны многочисленные случаи, когда стая дельфинов обгоняла военные катера, движущиеся с такой скоростью. Но является ли это пределом их возможностей? Киты, наряду со скоростными характеристиками обладают завораживающими протяжённостями своих маршрутов перемещения по водам Мирового океана. Синие киты, например, проходят расстояние 9 тыс. км, перемещаясь в богатые пищей воды Антарктики. Для кашалотов путешествия в 5 – 9 тыс. км не представляются уникальными, такими же странниками являются и финвалы. Дельфины на столь далёкие расстояния, как правило, не мигрируют, однако было зарегистрировано несколько случаев временного присутствия черноморских афалин в большом количестве в районе Бермудских островов.

Секрет быстроходности китообразных, помимо совершенного движителя и уникальной гидродинамической формы обеспечивается необыкновенными свойствами приповерхностных слоёв тела. Дело в том, что практически все китообразные, а дельфины особенно, обладают аномально малым сопротивлением туловища при движении. Заинтересовавшись этим феноменом, учёные обнаружили, что изготовленные в натуральную величину модели дельфинов, покрытые полиуретаном при помещении их в гидролоток, обладают большим гидродинамическим сопротивлением, чем живые подопытные особи. При съёмке дельфинов скоростной кинокамерой с длиннофокусной оптикой в стробоскопическом режиме освещения выяснилось, поверхность кожного покрова дельфинов совершает сложные волнообразные движения. Более тщательные исследования позволили установить, что природа наградила дельфинов свойством управлять своим пограничным слоем, т.е. гидродинамическим режимом движения тонкой прослойки жидкости, прилегающей к туловищу. Именно в пограничном слое обтекаемого тела при его турбулизации образуются микровихри, которые, развиваясь, создают дополнительное волновое сопротивление движению, унося с собой в кильватерном следе часть энергии встречного потока. Волнообразное движение поверхности туловища гасит возникающие вихревые движения в пограничном слое, обеспечивая ламинарный режим движения прилегающих слоёв жидкости.

Дельфины, как впрочем, и прочие китообразные, имеют особое устройство дыхательного аппарата. При погружении на глубины происходит регуляция кровотока таким образом, что артериальная кровь поступает в органы центральной нервной системы и органы чувств, обеспечивая их высокую работоспособность, большинство же мышц переводится на экономный режим кислородного питания. Мышцы китообразных содержат большое количество миоглобина, способного консервировать кислород, этим и определяется красно-коричневый, а иногда даже чёрный цвет мышечной ткани. Кроме того, эти морские животные обладают бидикардией, т.е. способностью изменять в широких пределах частоту сердечных сокращений. Так, например, афалины (рис. 15.8, 22) при нырянии изменяют частоту сердечных сокращений с 110 в минуту до 50. Акт захвата воздуха у дельфинов краткосрочен, он длится 0,2 – 0,4 с, у усатых китов, масса которых в целом больше, процесс выдоха и вдоха продолжается до 1,2 с, кроме того, глубоко ныряющие киты, например кашалоты, могут погружаться до 1 км и охотится на глубоководных гигантских кальмаров в течение 1,5 часа.

Все, кто каким либо образом сталкивался с дельфинами, отмечали наличие сенсационных умственных способностей, по-другому это классифицировать просто неразумно. Одно время научный официоз, генетически питаемый идеологией Марксизма-Ленинизма в совокупности с христианской наследственностью, был категоричен и как водится в этих религиях, непримирим, рассматривать китообразных как наших меньших братьев по разуму (а мо-



15.9. Мозг дельфина-белобочки [39]

жет и не младших !?) было запрещено категорически. Это, несмотря на то, что выяснилось, что объём мозга, отнесённый к объёму тела у китообразных, например, у дельфинов, выше чем у человека (рис 15.9). Дельфины способны в единицу времени обрабатывать больший объём информации, чем среднего умственного развития человек.

Дж. Лили, учёный, исследовавший дельфинов всю свою сознательную жизнь, описывает случай, произошедший с его участием в одной из американских лабораторий в 40 годах прошлого века. Решив проверить способности дельфина к дрессуре, пошли проторенной обезьяньей дорожкой. После совершения некого, на-

перёд запланированного учёными действия, подопытный объект получал кормовое поощрение. В бассейне, где жил дельфин, смонтировали устройство, состоящее из сигнализатора, регистратора и «поощрителя». Сигнализатором к началу действия служило акустическое устройство, излучающее краткий импульс. Регистратором реакции дельфина была специальная кнопка, которую кончиком носа мог нажимать дельфин. Кнопкой замыкалась электрическая цепь, включался электромагнит, отодвигалась заслонка и из контейнера – «поощрителя» в бассейн падала наградная рыбка. Пока аквалангисты монтировали установку, дельфин внимательно наблюдал за работой и по своему обыкновению, мешал процессу, пытаясь привлечь людей к игре с ним. Как только техники закончили монтаж, а служители загрузили в контейнер рыбу, включили питание, дельфин, не дожидаясь акустического сигнала, подплыл к кнопке и серией нажатий опустошил контейнер. Проглотив так легко доставшуюся пищу, он преданся своим обычным занятиям. Как потом вспоминал Лили, ему было стыдно за столь низкую оценку интеллектуального потенциала дельфинов.

По отношению к дельфинам в официальной науке до недавнего времени складывалась ситуация по средневековому сценарию, когда стараниями христианской церкви насильственно поддерживалось учение Аристотеля, несмотря на целый ряд абсурдных моментов, включая рассмотрение неподвижной Земли, как центра мироздания. Аналогично и с дельфинами. Даже наблюдаемые неоднократно случаи осознанного поведения в сообществе, рассматривались с позиций развитых животных инстинктов. Так, например, известны многочисленные случаи, когда дельфины оказывали помощь больному или раненому своему товарищу, поддерживая его у поверхности воды, обеспечивая тем самым его дыхание. Не раз спасали дельфины и тонущих людей, помогая им добраться до мелководья.

Водная среда обитания имеет в идеальных приповерхностных условиях предел видимости порядка 60 м, на глубине он существенно сокращается, на расстояниях от поверхности более 400 м солнечный свет практически туда не проникает. В этой связи зрение у китообразных не является основным информационным органом. Основная информация, необходимая для обеспечения жизнедеятельности, поступает у китообразных по акустическому каналу. Орган слуха усатых и зубатых китов особенно хорошо приспособлен для восприятия акустических волн под водой, впрочем, в воздухе они тоже слышат достаточно хорошо. Органы слуха у этих существ дополняются уникальной системой органов, обеспечивающих излучение на значительные расстояния сложных акустических сигналов с использованием всех известных человеку способов кодирования информации. Даже официальной наукой было признано, что акустический аппарат китов и дельфинов успешно решает задачи пространственной ориентации, коммуникации, навигации и распознавания образов.

Ещё во времена Аристотеля (384 – 322 гг. до н.э.), Демокрита (460 – 370 гг. до н.э.) и Плиния (23 – 79 гг. н.э.) была известна способность китов издавать звуки. Но в средние века благодаря победоносному шествию по планете новых религий, сведения мудрых Древних Греков, как в прочем и их гениальные научные труды были утрачены, по крайней мере, в просвещенной Европе, где бесценные фолианты попросту пожгли, как чуждые новой идеологии языческие заблуждения. Насаживалась идея безмолвия Мирового океана. Вспомнили Древ-

них Греков в период второй мировой войны, когда подводные лодки начали оснащать гидроакустической аппаратурой. Богатый мир подводных звуков был открыт заново, как впрочем, и другие известные Грекам и Римлянам законы и явления. Акустические сигналы, издаваемые китами и дельфинами, часто становились причинами всевозможных недоразумений, животных принимали за вражеские субмарины.

Изучение акустических способностей дельфинов (киты по тем временам были уж больно велики для вольерного содержания) началось в 50 годах прошлого века. Первоначально звуки, издаваемые дельфинами, классифицировались исключительно по качественным субъективным признакам. Щелчки, скрипы, свисты, визиг, трели, вой, мяуканье, рык, кваканье, шипение, мычание, вздохи, скрежет, одним словом, все известные человеку звуки, кроме громов и взрывов дельфины и киты издавали. К 60 годам XX в. к исследованиям привлекли специалистов в области гидроакустики с совершенными физическими методиками и современным аппаратным обеспечением. В 1961 г. Лили и Миллер все звуки, издаваемые дельфинами, разбили на три типа. К первому типу американские учёные отнесли свисты, издаваемые в диапазоне частот 4 – 20 кГц, второй тип был представлен короткими широкополосными импульсами, воспринимаемыми как удары бича. Причём щелчки воспроизводились всегда при лоцировании окружающего водного или воздушного пространства. В третью группу сигналов были отнесены сложные комплексные звуки высокой амплитуды, воспринимаемые человеческим слухом как кваканье, мяуканье и лай. Часто подопытные дельфины издавали одновременно все три типа сигналов в невообразимой смеси.

В СССР на чёрном море на базе Сухумского филиала акустического института АН СССР была создана лаборатория подводной биоакустики, которая занималась исследованиями уникальных гидроакустических способностей дельфинов. Результаты исследований, которые, в большинстве своём, носили, по очевидным причинам, закрытый характер не публиковались в открытой печати. Тем не менее, некоторыми сведениями, не касающимися приложений к подводному флоту, учёные делились со студентами старших курсов, специализирующихся в области гидроакустики. Они рассказывали, что в излучаемых дельфинами сигналах были обнаружены все известные в радиолокации и гидролокации типы модуляции. В излучаемых сигналах были классифицированы: амплитудная и частотная модуляция, фазовая манипуляция (изменение фазы сигнала по заданному закону в процессе излучения импульса), а так же их многочисленные комбинации. Многие акустические свойства дельфинов были, с позиций физики были необъяснимы. Например, говорили о серии экспериментов по распознаванию пластин, изготовленных из разных металлов. Понятно, что алюминиевая и стальная пластины равного размера и толщины, даже покрашенные в один цвет, могут быть распознаны вследствие различия их акустического сопротивления ($R_A = \rho c$), а вот как дельфинам удавалось распознавать латунные и бронзовые пластины, у которых специально выбирались одинаковые акустические сопротивления, понять так и не удалось. По человеческим гидроакустическим представлениям, с тем набором сигналом, которые освоил человек, этого сделать невозможно. Но тем не менее!

С биологических позиций акустические сигналы условно подразделялись на три группы. К первой группе относились широкополосные эхолокационные сигналы в виде высокочастотных импульсов, воспринимаемых в виде щелчков. Ко второму типу были отнесены коммуникационные сигналы, издаваемые дельфинами для связи и общения друг с другом, они представляли разного рода свисты в широкой полосе частот и интенсивностей. Третий тип сигналов характеризовал эмоциональное состояние дельфинов. Это были сигналы радости и тревоги, а так же сигналы подражательного характера. Дельфины повторяли практически все сигналы, излучаемые установленными в бассейнах гидроакустическими устройствами. Третий тип сигналов оказался наиболее сложным для осмысления ввиду многообразия и сложности.

В ходе акустических экспериментов было установлено, что в бассейне, как только дельфины слышали всплеск брошенной рыбы, они начинали издавать серию коротких по длительности сигналов, классифицируя цель. Если это была имитация корма, то суэта мгновенно прекращалась, а в случае живой рыбы, реакция была мгновенной. Щелчки представляли собой короткие широкополосные импульсные сигналы, частота следования которых варьировалась в зависимости от ситуации. Длительность локационных сигналов различных пород

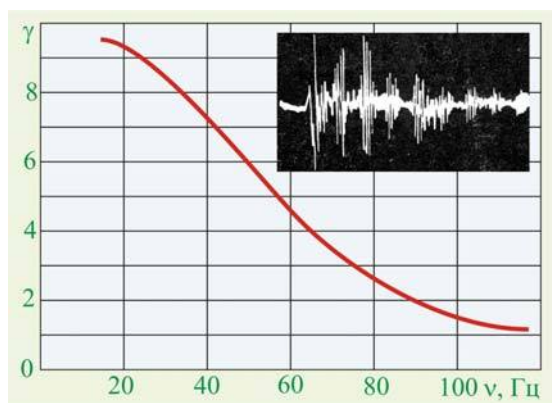


Рис. 15.10. Спектральный состав эхолокационных щелчков

порядка 30 кГц. У других пород дельфинов, например белобочки, максимальная энергия концентрировалась на частотах 14 – 25 кГц. Как было установлено, использование широкополосных сигналов позволяет дельфинам и китам обнаруживать эхосигналы на фоне природных и биологических шумов, кроме того, это даёт возможность наряду с задачами пеленгования определять размеры и физические свойства биологических объектов и даже осуществлять классификацию видового состава. Зарегистрированная частота следования эхолокационных импульсов изменялась в зависимости от обстоятельств и характера решаемых задач в пределах 15 – 400 Гц.

Китообразные способны воспринимать не только звуки и ультразвуки, но и акустические волны инфразвукового диапазона. Ориентации в пространстве способствует особое расположение слуховых органов, которые надёжно изолированы от костей черепа, так что колебания слева и справа могут восприниматься независимо. Среднее и внутреннее ухо изолировано от костей черепа воздушными камерами, заполненные пенообразным веществом и жировой эмульсией. Пена поглощает колебания воспринимаемые костными структурами черепа. Имеется предположение, что помимо уха, дельфины воспринимают волнообразное движение водной среды через вытянутую нижнюю челюсть, близко проходящую кормовой своей частью к органам внутреннего уха и снабжённую разветвлённой системой нервных окончаний. Слуховые косточки среднего уха увеличивают величину давления в 60 раз. Барабанная перепонка напоминает сложенный зонтик. Строение внутреннего уха гораздо сложнее, чем у человека. Улитка, в сравнении с вестибулярной частью лабиринта сильно увеличена и снабжена вторичной спиральной пластиной. Слуховой нерв сильно развит. Звуки дельфины

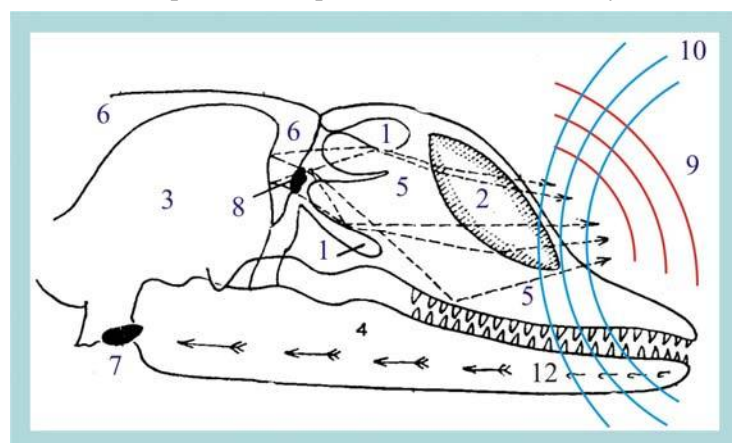


Рис. 15.11. Акустические органы дельфина [40]

производят тремя парами воздушных мешков, связанных с носовым каналом и глоткой. На рис. 15.11 приведена структурная схема акустического органа дельфина на которой приняты следующие обозначения: 1 – воздушные мешки и носовой канал; 2 – жировая подушка; 3 – череп; 4 – нижняя челюсть; 5 – часть головы, лежащая впереди носового канала; 6 – часть головы, лежащая позади носового канала; 7 – барабанная

кость и внутреннее ухо; 8 – губа носовой пробки; 9 – излучаемые акустические волны; 10 – отражённые звуковые волны; 12 – нервные отверстия в нижней челюсти. Три пары воздухоносных полостей т дельфинов расположены в непосредственной близости от наружного носового прохода и сообщаются с ним. Полости имеют различное внутреннее давление и снабжены индивидуальной мышечной системой. Механизм излучения

акустических волн китами и дельфинами до настоящего времени до конца не выяснен. Ясно, что в процессе формирования волн принимают участия воздушные полости и дыхало, однако весьма сложный механизм взаимодействия отдельных органов не позволил установить полную картину их акустического функционирования.

Как у усатых, так и у зубатых китов имеется жировая подушка, которой приписывается роль акустической линзы. Предположительно стенки черепа служат рефлектором, а лобный выступ с жировой подушкой выполняет функции акустического концентратора. Таким образом, голову китообразных можно рассматривать как «акустический прожектор», формирующий диаграмму направленности приёмного и излучающего тракта. Было обнаружено, что при поисках скоплений рыбы киты и дельфины излучают низкочастотные сигналы с широкой диаграммой направленности. При обнаружении цели частота излучаемых сигналов увеличивается, а диаграмма направленности сужается.

На рис. 15.12. приведены экспериментальные диаграммы направленности снятые в круговом бассейне Норрисом и Эвансом [39]. Левая часть рисунка демонстрирует угловое распределение интенсивности излучаемых сигналов, правая часть рисунка характеризует угловой раствор главного лепестка диаграммы направленности на разных частотах.

Несколько слов необходимо ещё сказать о коммуникационных сигналах, наличие которых в лексиконе дельфинов до недавнего времени отрицалась, видимо потому, что этот тип сигналов можно рассматривать как предтечу языкового общения. К сожалению, учёные располагают ограниченным объёмом аппаратного анализа сигналов, полученных в среде их естественного обитания. Надёжные акустические данные относятся в основном к особям, находившимся в неволе. Но даже состояние пленения позволило выяснить, что дельфины способны общаться между собой путём излучения сигналов, воспринимаемых в виде свиста. Колебания в относительно низком частотном диапазоне модулированы по амплитуде и частоте, кроме того, присутствует не до конца понятная фазовая манипуляция. Было установлено, что дельфины обмениваются коммуникационными сигналами, как по очереди, так и одновременно.

Были проведены эксперименты следующего содержания. Группа из десяти дельфинов, состоящая из взрослых и детёнышей была помещена в прибрежный вольер, отгороженный от открытого моря металлической сетью. Далее в вольере взрывали петарды, которые приводили дельфинов в весьма возбуждённое состояние. Во время последнего взрыва в сетке открывался проход, через который мог пройти только один дельфин. Вожака стаи, практически мгновенно обнаружил проход, последовала серия интенсивных и разнообразных по частотному составу свистов. Вся стая сгруппировалась. Первым в образовавшийся проход быстро проследовал взрослый дельфин, за ним эвакуировались самки, потом самцы, и последним вольер покинул самец. Всё это действо проходило настолько быстро, что экспериментаторы смогли воссоздать целостную картину только после сопоставления видео и аудио записей эксперимента. Вот такая у них организация, вот так это «стадо» ведёт себя в экстремальных ситуациях, не теряя самообладания и достоинства. А ведёт ли так себя человек в подобных обстоятельствах?

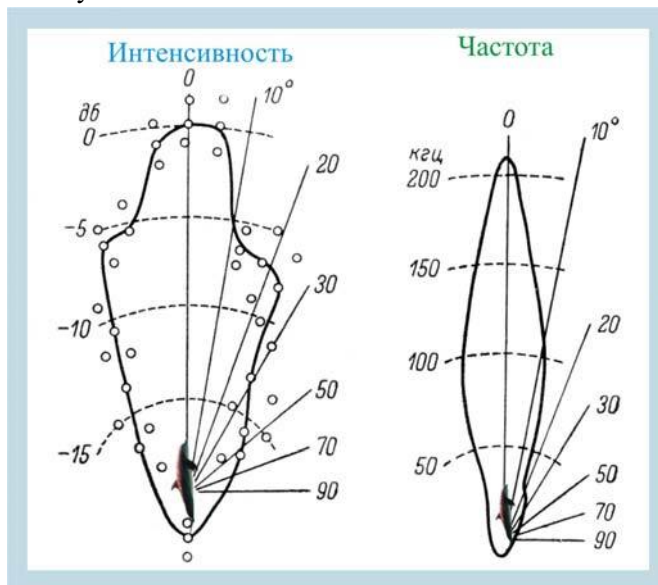


Рис. 15.12. Диаграммы направленного излучения [39]

16. Примеры расчета акустических полей [40 – 48]

16.1. Волны в упругой среде. Акустика

Пример № 1. Задано уравнение плоской бегущей волны $\xi(x, t) = 5 \cdot 10^{-3} \cos(628t - 2x)$, найти частоту колебаний частиц среды ν , длину волны λ , фазовую скорость распространения волны v_f , амплитудное значение скорости $\dot{\xi}_m$ и ускорения $\ddot{\xi}_m$.

1. Циклическая частота колебаний частичек среды при распространении заданной волны $\omega = 628 \text{ с}^{-1}$, при этом частота определится как

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{628}{6,28} = 100 \text{ Гц}. \quad (1)$$

2. Длину волны определим из уравнения волнового числа, при условии, что $k = 2 \text{ м}^{-1}$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = 3,14 \text{ м}. \quad (2)$$

3. Фазовая скорость распространения волны

$$v_f = \lambda \nu = 314 \text{ м/с}. \quad (3)$$

4. Амплитудное значение скорости колеблющихся частиц

$$\dot{\xi}(t) = \frac{d\xi}{dt} = -\omega \xi_m \sin \omega t; \quad \dot{\xi}_m = -\omega \xi_m = 628 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 3,14 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (4)$$

5. Амплитудное значение ускорения

$$\ddot{\xi}_m = \frac{d^2 \xi_m}{dt^2} = -\omega^2 \xi_m = 1,97 \cdot 10^3 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}. \quad (5)$$

Пример №2. Точки некоторой среды совершают незатухающие колебания, которые распространяются с фазовой скоростью v . Получить уравнение волнового движения и показать его физический смысл.

1. При нулевой начальной фазе смещение частиц среды при распространении упругой волны можно записать следующим образом

$$\xi(x, t) = \xi_m \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right] = \xi_m \sin \left(\omega t - \frac{\omega x}{v} \right), \quad (1)$$

$$\xi(x, t) = \xi_m \sin \left[\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{T v} \right] = \xi_m \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} \right). \quad (2)$$

2. Количество длин волн λ , укладывающихся на отрезке 2π , называется волновым числом

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}. \quad (3)$$

3. Введём в уравнение волны волновое число

$$\xi(x, t) = \xi_m \sin(\omega t - kx). \quad (4)$$

4. Найдём частные производные уравнения (3) по времени t и координате x

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = u = \xi_m \omega \cos(\omega t - kx);$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a = -\xi_m \omega^2 \sin(\omega t - kx) = -\omega^2 \xi(x, t);$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \xi_m (-k) \cos(\omega t - kx);$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\xi_m k^2 \sin(\omega t - kx) = -\frac{4\pi^2 v^2}{v^2} \xi(x, t) = \frac{\omega^2}{v^2} \xi(x, t).$$

Ввиду того, что переменные x и t не зависят друг от друга, то, сравнивая (5) и (6) получим

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением плоской бегущей волны. Это уравнение описывает не только распространение плоской волны в упругой среде, но и широкое многообразие других волновых процессов, поэтому называется волновым уравнением.

В частности для акустической волны в твёрдых телах волновое уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2};$$

где E – модуль упругости (модуль Юнга), ρ – плотность среды. Так например, для стали $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\rho = 7800$ кг/м³, скорость звука равна

$$c = \sqrt{E/\rho} \cong 5100 \text{ м/с}.$$

Распространения упругих волн в газах, если считать их идеальными, описывается уравнением адиабаты $PV^\gamma = \text{const}$, из которого следует, что

$$dPV - P\gamma dV = 0.$$

Это уравнение можно преобразовать к виду (2.8), т.е. к волновому уравнению (7), в котором скорость определится как

$$c = \sqrt{(P_0/\rho_0) \cdot \gamma},$$

где $\gamma = c_p/c_v$ – показатель адиабаты, $p_0 = n_0 kT$ – давление в отсутствие волны, ρ_0 – плотность невозмущённого газа, n_0 – концентрация молекул в невозмущённой среде, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К, T – абсолютная температура. С учётом того, что $n_0 = \rho_0/m_0$,

$$p_0 = \rho_0 kT \frac{1}{m_0} = \frac{\rho_0 RT}{\mu};$$

Скорость определится как:

$$c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}};$$

Уравнение (12) показывает, в частности, что скорость звука в газах совпадает со скоростью теплового движения молекул.

Пример № 3. Плоская упругая волна генерируется источником колебаний с частотой $\nu = 200$ Гц с амплитудным значением смещения $\xi_m = 4 \cdot 10^{-3}$ м. Записать уравнение колебаний среды для случая $\xi(0, t)$, если в начальный момент времени смещение максимально. Определить смещение точек среды через время $\tau_1 = 0,1$ с на удалении от источника $x_1 = 1$ м, принимая скорость распространения волнового движения $c = 300$ м/с.

1. Уравнение плоской бегущей волны с учётом приведённых в условии данных, запишется следующим образом

$$\xi(x, t) = \xi_m \cos(\omega t - kx).$$

2. В точке расположения источника при $x = 0$ уравнение (1) примет вид

$$\xi(0, t) = \xi_m \cos \omega t = 4 \cdot 10^{-3} \cos 2\pi \nu t. \quad (2)$$

3. Определим смещение частиц среды в момент времени τ_1 на удалении от источника $x_1 = 1$ м

$$\xi(x_1, \tau_1) = 4 \cdot 10^{-3} \cos(2\pi \nu \tau_1 - kx_1); \quad (3)$$

$$\xi(x_1, \tau_1) = 4 \cdot 10^{-3} \cos\left(2\pi \nu \tau_1 - \frac{2\pi \nu}{c} x_1\right); \quad (4)$$

$$\xi(x_1, \tau_1) = 4 \cdot 10^{-3} \cos\left[2\pi \nu - \frac{x_1}{c}\right]; \quad (5)$$

$$\xi(x_1, \tau_1) = 4 \cdot 10^{-3} \cos\left(6,28 \cdot 100 \cdot 0,1 - \frac{1}{300}\right) = 1,83 \cdot 10^{-3} \text{ м}. \quad (6)$$

Пример № 4. Акустические волны с частотой колебания $\nu = 0,5$ кГц, амплитудой смещения частиц $\xi_m = 2,5 \cdot 10^{-4}$ мм и длиной волны $\lambda = 0,7$ м распространяются в упругой среде. Определить скорость волны v и амплитудное значение колебательной скорости частиц $\dot{\xi}_m$.

1. Определим скорость распространения волны

$$v = \lambda \nu = 350 \text{ м/с}. \quad (1)$$

2. Амплитудное смещение частиц среды найдём из следующих соображений

$$\xi(x, t) = \xi_m \cos(\omega t - kx); \quad (2)$$

$$\dot{\xi}(t) = -2\pi \nu \xi_m \sin(\omega t - kx);$$

$$\dot{\xi}_m = -2\pi \nu \xi_m \cong 0,79 \text{ м/с}. \quad (3)$$

Пример № 5. Плоская волна с периодом $T = 3$ мс с амплитудой колебания частиц среды $\xi_m = 2 \cdot 10^{-4}$ мм и длиной волны $\lambda = 1,2$ м распространяется в упругой среде. Для точек удалённых от источника колебаний на расстояние $x_1 = 2$ м определить в момент времени $\tau = 7$ мс: смещение частиц среды, их скорость и ускорение, считая начальную фазу нулевой.

1. Запишем уравнение плоской волны

$$\xi(x, t) = \xi_m \sin(\omega t - kx). \quad (1)$$

2. Подставим в уравнение (1) заданные величины

$$\xi(x_1, \tau) = \xi_m \sin\left(\frac{2\pi}{T} \tau - \frac{2\pi}{\lambda} x_1\right), \quad (2)$$

$$\xi(x_1, \tau) = 2 \cdot 10^{-4} \sin\left(\frac{6,28}{3 \cdot 10^{-3}} 7 \cdot 10^{-3} - \frac{6,28}{1,2} 2\right) = 175 \text{ мкм}. \quad (3)$$

3. Колебательную скорость частиц среды определим, продифференцировав уравнение (1) по времени

$$\dot{\xi}(x_1, \tau) = \frac{d\xi}{dt} = \frac{2\pi}{T} \xi_m \cos\left(\frac{2\pi}{T} \tau - \frac{2\pi}{\lambda} x_1\right), \quad (4)$$

$$\dot{\xi}(x_1, \tau) = \frac{6,28}{3 \cdot 10^{-3}} 2 \cdot 10^{-4} \cos 6,28 \left(\frac{7 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-3}} - \frac{2}{1,2}\right) = 0,33 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (5)$$

4. Ускорение частиц жидкости

$$\ddot{\xi}(x_1, t) = \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2} \xi_m \sin 2\pi \left(\frac{\tau}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right) = 767 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}. \quad (6)$$

Пример № 6. Упругая волна с амплитудным значением смещения $\xi_m = 0,1$ м распространяется без затухания прямолинейно. Найти величину смещения частиц среды на удалении от источника колебаний $x_1 = 3\lambda/4$ для момента времени $\tau = 0,9 T$.

1. Запишем уравнение смещения для плоской упругой волны

$$\xi(x, t) = \xi_m \sin(\omega t - kx). \quad (1)$$

2. Подставим в уравнение (1) условия прямолинейного распространения волны

$$\xi(x_1, \tau) = \xi_m \sin\left(\frac{2\pi}{T} 0,9 T - \frac{2\pi}{\lambda} \frac{3\lambda}{4}\right) = \xi_m \sin 0,3\pi = 8,1 \cdot 10^{-2} \text{ м}. \quad (2)$$

Пример № 7. Волна, имеющая период $T = 1,2$ с и амплитудное значение смещения частиц среды $\xi_m = 2 \cdot 10^{-2}$ м распространяется прямолинейно со скоростью $v = 15$ м/с. Определить смещение частицы среды, находящейся на расстоянии $x_1 = 45$ м от источника колебаний, если с момента их возникновения прошло $\tau = 4$ с.

1. Запишем уравнение смещения при распространении упругой волны следующим образом

$$\xi(x_1, \tau) = \xi_m \cos\left(\frac{2\pi}{T} \tau - \frac{2\pi}{Tv} x_1\right), \quad (1)$$

$$\xi(x_1, \tau) = 2 \cdot 10^{-2} \cos\left(\frac{6,28}{1,2} 4 - \frac{6,28}{1,2 \cdot 15} 45\right) = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}. \quad (2)$$

Пример № 8. Для точек, находящихся на расстоянии $\Delta x = 0,5$ м друг от друга на прямой, вдоль которой распространяется упругая волна со скоростью $v = 50$ м/с и периодом $T = 5 \cdot 10^{-2}$ с, определить разность фаз колебаний $\Delta\Phi$.

1. Запишем уравнения фазы колебаний для заданных по условию задачи точек

$$\Phi = (\omega t - kx) = \left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{Tv} x\right), \quad (1)$$

$$\Phi_1 = (\omega t - kx_1) = \left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{Tv} x_1\right), \quad (2)$$

$$\Phi_2 = (\omega t - kx_2) = \left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{Tv} x_2\right), \quad (3)$$

2. Определим разность фаз

$$\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = \frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{Tv} x_1 - \frac{2\pi}{T} t + \frac{2\pi}{Tv} x_2 = \frac{2\pi}{Tv} \Delta x = 1,26 \text{ рад } (72,2^\circ). \quad (4)$$

Пример № 9. Упругая волна распространяется вдоль прямой со скоростью $v = 40$ м/с при частоте колебаний частиц среды $\nu = 5$ Гц. Определить разность фаз колебаний между источником и точкой отстоящей от него на расстоянии $x_1 = 2$ м.

1. Запишем уравнение фаз колебаний для источника и заданной точки с учётом того, что $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ м

$$\Phi_1 = \left(2\pi\nu t - \frac{2\pi\nu}{v} x_1\right); \quad \Phi_2 = \left(2\pi\nu t - \frac{2\pi\nu}{v} x_2\right). \quad (1)$$

2. Разность фаз колебаний между рассматриваемыми точками

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi\nu}{v} \Delta x = \frac{6,28 \cdot 5}{40} 2 = 1,57 \text{ рад } (90^\circ). \quad (2)$$

Пример № 10. Волновой фронт распространяется со скоростью $v = 100$ м/с. Наименьшее расстояние между точками среды, колеблющимися синфазно, составляет $\Delta x = 1$ м. Определить частоту колебаний.

1. Расстояние между двумя ближайшими точками, совершающими синфазные колебания, преодолевается волной за время одного полупериода. Зная скорость распространения волнового фронта, можно определить период и частоту колебаний частиц среды

$$T = \frac{2\Delta x}{v}; \quad \nu = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\Delta x} = 50 \text{ Гц}. \quad (1)$$

Пример № 11. При распространении плоской волны частицы среды колеблются с частотой $\nu = 25$ Гц. Частицы среды, отстоящие друг от друга на расстоянии $\Delta x = 0,1$ м, колеблются с разностью фаз $\Delta\Phi = 60^\circ$. Найти скорость распространения волны.

1. Запишем уравнение разности фаз и определим скорость распространения волны

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi\nu}{v} \Delta x, \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi\nu}{v} \Delta x; \quad \Rightarrow \quad v = 6\nu\Delta x = 15 \text{ м/с}. \quad (2)$$

Пример № 12. Звуковая волна в воздухе распространяется со скоростью $v = 340$ м/с, период колебания частиц среды равен $T = 1$ мс. Определить, на каком расстоянии от источника направление движения частиц поменяется на обратное. Как изменится это расстояние при увеличении частоты колебаний источника вдвое?

1. Изменение направления смещения частиц на обратное происходит при изменении фазы на $\Delta\Phi = 180^\circ = \pi$ рад, поэтому уравнение (2) предыдущей задачи возможно записать следующим образом

$$\pi = \frac{2\pi}{Tv} \Delta x; \quad \Delta x_1 = \frac{Tv}{2} = 0,17 \text{ м}. \quad (1)$$

2. При увеличении частоты вдвое период уменьшится тоже в два раза, следовательно, минимальное расстояние между точками среды, колеблющимися в противофазе, составит $\Delta x = 8,5$ см.

Пример № 13. Бегущая акустическая волна описывается уравнением

$$\xi(x, t) = \xi_m \cos(1560t - 5,2x), \quad (1)$$

где величины времени t и расстояния x выражены в секундах и метрах, соответственно. Вычислить частоту колебаний частиц среды ν , скорость распространения волны c и её длину λ .

1. По условию задачи заданы следующие параметры волнового движения: циклическая частота колебаний $\omega = 1560$ рад/с, волновое число $k = 5,2 \text{ м}^{-1}$.

2. Частота колебаний частиц среды относительно положения равновесия

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 248 \text{ Гц}. \quad (2)$$

3. Длина волны определится из следующих соображений

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = 1,21 \text{ м}. \quad (3)$$

4. Скорость распространения волны

$$k = \frac{\omega}{c}; \quad c = \frac{\omega}{k} = 300 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (4)$$

Пример № 14. Акустическая волна, распространяющаяся в воздухе, описывается уравнением

$$\xi(x, t) = 6 \cdot 10^{-5} \cos(1800t - 5,3x), \quad (1)$$

где время t выражено в секундах, расстояние x – в метрах. Найти отношение амплитудного значения смещения частиц среды к длине волны и отношение максимального значения колебательной скорости частиц к скорости распространения волны.

1. Из уравнения (1) следует, что: $\xi_m = 6 \cdot 10^{-5} \text{ м}$; $\omega = 1800 \text{ рад/с}$; $k = 5,3 \text{ м}^{-1}$, поэтому длину волны можно определить следующим образом

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 1,18 \text{ м}. \quad (2)$$

2. Отношение амплитуды смещения частиц при колебаниях к длине волны, таким образом, будет равно

$$\frac{\xi_m}{\lambda} = \frac{6 \cdot 10^{-5}}{1,18} = 5,1 \cdot 10^{-5}. \quad (3)$$

3. Определим амплитудное значение колебательной скорости

$$\dot{\xi}_m = \frac{d\xi(x, t)}{dt} = -\omega \xi_m = 1800 \cdot 6 \cdot 10^{-5} = 0,11 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (4)$$

4. Скорость распространения волны

$$c = \frac{\omega}{k} = 340 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (5)$$

5. Отношение амплитудного значения колебательной скорости к скорости распространения волны

$$\frac{\dot{\xi}_m}{c} = \frac{0,11}{340} = 3,24 \cdot 10^{-4}. \quad (6)$$

Пример № 15. Плоская акустическая волна, распространяющаяся со скоростью c возбуждает колебания частиц упругой среды с циклической частотой ω . Направление распространения волны составляет углы α , β и γ с осями декартовой системы координат X , Y , Z . Определить разность фаз колебаний точек среды с координатами $\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\{x_2, y_2, z_2\}$.

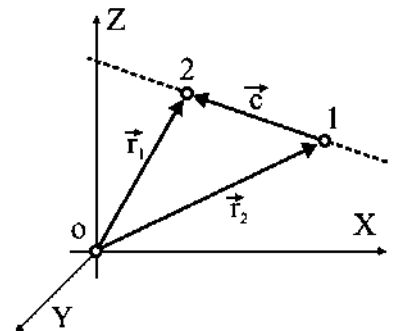
1. Фаза в общем случае распространения волны вдоль одной из осей определяется уравнением

$$\Phi = \omega t - \frac{\omega}{c} x. \quad (1)$$

Для выделенных в пространстве точек 1 и 2 величины ω и t будут одинаковыми, т.е разность фаз $\Delta\Phi$ определяется в данном случае только координатами точек. В векторном представлении

$$\Delta\Phi = \vec{k}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \quad (2)$$

где $\vec{k} = k\vec{n}$ – волновой вектор, определяемый в виде скаляр-



ного произведения волнового числа k на единичный вектор $\vec{n}$, перпендикулярный волновой поверхности, $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ – радиус-векторы точек.

2. Запишем разность векторов в скалярной форме через направляющие косинусы

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = (x_1 - x_2)\cos\alpha + (y_1 - y_2)\cos\beta + (z_1 - z_2)\cos\gamma. \quad (3)$$

3. Подставим уравнение (2) в соотношение (1) с учётом значения модуля волнового вектора $k = \omega/c$

$$\Delta\Phi = \frac{\omega}{c} |(x_1 - x_2)\cos\alpha + (y_1 - y_2)\cos\beta + (z_1 - z_2)\cos\gamma|. \quad (4)$$

Пример № 16. Найти волновой вектор $\vec{k}$ и скорость распространения волны, заданной уравнением

$$\xi(x, y, z, t) = \xi_m \cos(\omega t - \alpha x - \beta y - \gamma z). \quad (1)$$

1. По условию заданы проекции волнового вектора $k_x = \alpha$, $k_y = \beta$, $k_z = \gamma$, поэтому, используя единичные векторы $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ волновой вектор можно представить следующим образом

$$|\vec{k}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}, \quad \vec{k} = \alpha\vec{e}_x + \beta\vec{e}_y + \gamma\vec{e}_z. \quad (2)$$

2. Скорость распространения волны

$$c = \frac{\omega}{|\vec{k}|} = \frac{\omega}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}. \quad (3)$$

Пример № 17. Плоская акустическая волна распространяется со скоростью c , имеющей на оси декартовой системы координат, проекции $\{c_x, c_y, c_z\}$. Записать уравнение волнового вектора, если циклическая частота колебаний частиц среды равна ω .

1. Модуль вектора скорости через его проекции на оси декартовой системы координат можно выразить следующим образом

$$|\vec{c}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}. \quad (1)$$

2. С другой стороны

$$|\vec{k}| = \frac{\omega}{|\vec{c}|} = \omega \left(\frac{\vec{e}_x}{c_x} + \frac{\vec{e}_y}{c_y} + \frac{\vec{e}_z}{c_z} \right). \quad (2)$$

16.2. Скорость акустических волн

Пример № 18. Вычислить скорость распространения продольных акустических волн в алюминии, латуни, меди, никеле, серебре и органическом стекле.

1. При распространении акустической волны следует различать два совершенно разных явления: движение частиц среды в волне и перемещение самой упругой волны в среде. Первое явление – это движение частиц как материальных точек; второе явление – переход возмущенного состояния среды с одних частиц на другие. Так, величина смещения и скорость частицы в волне зависят от силы звука, например для слышимых звуков – от их громкости. Эти величины в звуковой волне, как правило, очень малы, а после прохождения волны каждая частица практически остается в своем исходном положении. Волна же удаляется от места возникновения; скорость ее велика (сотни и тысячи метров в секунду) и не зависит от силы звука, а только от параметров среды, в частности, от модуля Юнга и плотности среды

Скорость звука всегда конечна, отсюда следует, что во всех акустических вопросах нужно учитывать как упругость среды, так и ее инерционные свойства; от других же свойств среды ее акустическое поведение не зависит.

Если к телу приложить силу, то в нем всегда должна создаться упругая волна. Однако в обычных задачах теоретической механики упругие волны не учитывают. Изучая движение свободного тела, возникающее под действием прикладываемой к телу силы, считают, что ускорение получает сразу все тело, а не только участок приложения силы, затем соседний участок и т. д. Аналогично, рассматривая действие силы на закрепленное тело, считают, что тело, деформируясь, приходит в равновесие все сразу, во всех своих частях. Такой подход равносителен предположению, что скорость звука в теле бесконечна.

В первом примере это соответствует абсолютно жесткому телу (бесконечная упругость), а во втором – без массовому телу. Механические задачи при таком подходе сильно упрощаются; В частности, оказывается возможным в каждой задаче учитывать либо только массу тела (первый пример), либо только его упругие свойства (второй пример).

Скорость распространения продольных волн, как показано ранее, в упругой среде вычисляется по формуле (1)

$$c = \sqrt{E/\rho}, \quad (1)$$

модуль Юнга E для упругого стержня длиной ℓ определяется по величине деформации:

$$E = -\frac{\sigma}{\varepsilon} = -\frac{\sigma}{\Delta\ell/\ell}, \quad (2)$$

где σ - упругое напряжение в стержне, $\Delta\ell/\ell = \varepsilon$ - относительное удлинение.

Для вычисления скорости звука в заданных по условию задачи металлах приведём значения модуля Юнга и плотности

№	Металл	$E, \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$	$\rho, \text{ кг/м}^3 \cdot 10^3$
1	Алюминий	6650	2,7
2	Латунь	9500	8,55
3	Медь	10800	8,93
4	Никель	20400	8,75
5	Серебро	8270	10,52
6	Органическое стекло	525	1,18

$$\begin{aligned} c_1 &= \sqrt{\frac{6,65 \cdot 10^{10}}{2,7 \cdot 10^3}} \cong 4960 \frac{\text{м}}{\text{с}}; & c_2 &= \sqrt{\frac{9,5 \cdot 10^{10}}{8,55 \cdot 10^3}} \cong 3300 \frac{\text{м}}{\text{с}}; \\ c_3 &= \sqrt{\frac{1,1 \cdot 10^{11}}{8,93 \cdot 10^3}} \cong 3510 \frac{\text{м}}{\text{с}}; & c_4 &= \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{11}}{8,75 \cdot 10^3}} \cong 4790 \frac{\text{м}}{\text{с}}; \\ c_5 &= \sqrt{\frac{8,2 \cdot 10^{10}}{1,052 \cdot 10^4}} \cong 2790 \frac{\text{м}}{\text{с}}; & c_6 &= \sqrt{\frac{5,25 \cdot 10^9}{1,18 \cdot 10^3}} \cong 2110 \frac{\text{м}}{\text{с}}; \end{aligned}$$

Пример № 19. Ухо человека воспринимает акустические волны в диапазоне частот от $\nu_{\min} = 16 \text{ Гц}$ до $\nu_{\max} = 20 \text{ кГц}$. Определить соответствующие этим частотам длины волн, если скорость звука в воздухе составляет $c = 340 \text{ м/с}$.

1. Скорость звука, длина волны и частота колебаний частиц среды связаны следующим соотношением

$$c = v\lambda; \Rightarrow \lambda = \frac{c}{v}, \quad (1)$$

откуда

$$\lambda_{\min} = \frac{c}{v_{\min}} = 21,3 \text{ м}; \quad \lambda_{\max} = \frac{c}{v_{\max}} = 1,7 \text{ см}. \quad (2)$$

Пример № 20. Звуковые колебания распространяются в азоте N_2 при температуре $T = 300 \text{ К}$. Определить скорость звука.

1. Распространения упругих волн в газах, если считать их идеальными, описывается уравнением адиабаты $PV^\gamma = \text{const}$, из которого следует, что

$$dPV - P\gamma dV = 0. \quad (1)$$

Это уравнение можно преобразовать к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (2)$$

при этом скорость определится как

$$c = \sqrt{\frac{p_0 \gamma}{\rho_0}}, \quad (3)$$

где $\gamma = c_p/c_v$ – показатель адиабаты, $p_0 = n_0 kT$ – давление в отсутствие волны, ρ_0 – плотность невозмущённого газа, n_0 – концентрация молекул в невозмущённой среде, $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$, T – абсолютная температура. С учётом того, что $n_0 = \rho_0/m_0$,

$$p_0 = \rho_0 kT \frac{1}{m_0} = \frac{\rho_0 R T}{\mu}; \quad (4)$$

скорость определится как:

$$c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}; \quad (5)$$

Уравнение (5) показывает, в частности, что скорость звука в газах совпадает со скоростью теплового движения молекул. Скорость распространения упругих волн, в большинстве своём, не зависит от амплитуды колебаний, исключение составляют волны взрывного типа, которые относятся к нелинейным волнам, когда колебания среды, порождающие эти волны, не являются гармоническими.

2. Двухатомная молекула азота N_2 состоит из двух атомов, т.е. обладает пятью степенями свободы $i = 5$

$$\gamma = \frac{i+2}{i} = 1,4. \quad (6)$$

Молярная масса азота $\mu(N_2) = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$, универсальная газовая постоянная $R = 8,3 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$. В соответствии с уравнением (5) скорость звука определится как

$$c(N_2) = \sqrt{\frac{\gamma R T}{\mu}} = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 8,3 \cdot 300}{28 \cdot 10^{-3}}} \cong 354 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (7)$$

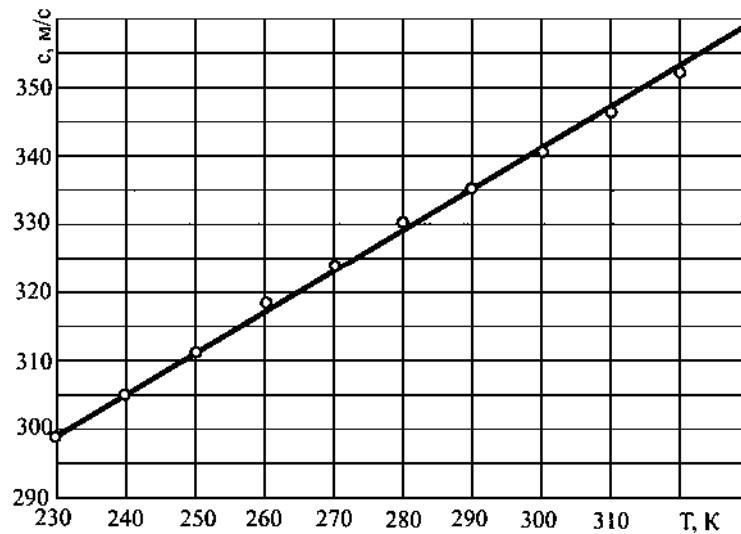
Пример № 21. Получить зависимость скорости звука в воздухе при изменении его температуры от $T_{\min} = 230 \text{ К}$ до $T_{\max} = 320 \text{ К}$.

1. Для воздуха $\mu = 3 \cdot 10^{-2} \text{ кг/моль}$, $\gamma = 1,4$, поэтому уравнение (6) предыдущей задачи можно переписать следующим образом

$$c = 19,7 \sqrt{T}. \quad (1)$$

2. Для построения зависимости $c = f(T)$ свведём результаты вычислений в таблицу

T, К	230	240	250	260	270	280	290	300	310	320
c, м/с	299	305	311	318	324	330	335	341	347	352



Зависимость скорости звука в воздухе от температуры

Пример № 22. На расстоянии $x = 800$ м от импульсного источника звука, расположенного в воздухе находятся два приёмника, один из которых расположен в воде. Задержка между сигналами в воде и воздухе составляет $\Delta\tau = 1,84$ с. Определить скорость звука в воде, если температура воздуха равна $T = 295$ К.

1. По графику зависимости скорости звука от температуры воздуха, приведенному в предыдущей задаче, определим скорость при заданной в условии температуре – $c_1 = 337$ м/с.

2. Определим время распространения звуковой волны в воздухе τ_1

$$\tau_1 = \frac{x}{c_1} = 2,37 \text{ с.} \quad (1)$$

3. Время распространения сигнала в воде

$$\tau_2 = \tau_1 - \Delta\tau = 0,533 \text{ с.} \quad (2)$$

4. Скорость звука в воде

$$c_2 = \frac{x}{\tau_2} = 1500 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (3)$$

Пример № 23. Скорость звука в некотором газе при нормальных условиях равна $c = 308$ м/с. Плотность газа равна $\rho_0 = 1,78$ кг/м³. Определить отношение удельных теплоёмкостей c_p/c_v .

1. Воспользуемся для определения скорости уравнением

$$c = \sqrt{\frac{p_0 \gamma}{\rho_0}}, \quad (1)$$

откуда

$$\gamma = \frac{c^2 \rho_0}{p_0}, \quad (2)$$

при $p_0 = 1 \cdot 10^5$ Па

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{308^2 \cdot 1,78}{10^5} = 1,69. \quad (3)$$

Пример № 24. Найти отношение скоростей распространения акустической волны в водороде и углекислом газе, если эти газы находятся в одинаковых условиях.

1. Отметим, что заданные газы имеют следующие параметры при нормальных условиях: для водорода $H_2 - \mu_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $\gamma_1 = 1,4$; для углекислого газа $CO_2 - \mu_2 = 48$ кг/моль, $\gamma_2 = 1,33$

2. Составим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \sqrt{\frac{\gamma_1 RT}{\mu_1}}; \\ c_2 &= \sqrt{\frac{\gamma_2 RT}{\mu_2}}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

3. Поделим уравнения системы (1) друг на друга

$$\frac{c_1}{c_2} = \sqrt{\frac{\gamma_1 \mu_2}{\gamma_2 \mu_1}} = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 48 \cdot 10^{-3}}{1,33 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}} \cong 5. \quad (2)$$

Пример № 25. При подъёме от поверхности Земли температура изменяется от $T_0 = 300$ К до T_2 , увеличиваясь на $\Delta T = 7$ мК/м. Оценить, за какое время акустическая волна распространится на высоту $h = 8$ км.

1. Определим температуру на высоте h над поверхностью Земли

$$T_1 = T_0 - \Delta T h = 300 - 7 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^3 = 244 \text{ К}. \quad (1)$$

2. Найдём конечную и начальную скорость звука

$$c_0 = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{\mu}} = \sqrt{\frac{1,33 \cdot 8,3 \cdot 300}{3 \cdot 10^{-2}}} \cong 332 \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad (2)$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{\gamma RT_1}{\mu}} = \sqrt{\frac{1,33 \cdot 8,3 \cdot 244}{3 \cdot 10^{-2}}} \cong 300 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (3)$$

3. Среднее значение скорости звука

$$\langle c \rangle = \frac{c_0 + c_1}{2} = 316 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (4)$$

4. Примерное время распространения на высоту h

$$\tau = \frac{h}{\langle c \rangle} = \frac{8 \cdot 10^3}{316} = 25,3 \text{ с}. \quad (5)$$

Пример № 26. Для акустической волны возбуждающей в среде колебания с циклической частотой ω , получить зависимость групповой скорости и от фазовой скорости c .

1. Как известно, постоянная фаза упругой волны может быть выражена следующим уравнением

$$\Phi = \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \varphi_0 = \text{const}. \quad (1)$$

2. Продифференцируем уравнение (1) с учётом того, что переменными величинами являются t и x

$$dt - \frac{1}{c}dx = 0; \Rightarrow c = \frac{dx}{dt}, \quad (2)$$

где c – скорость распространения волны.

3. В соответствии с разложением Фурье всякая волна может быть представлена в виде суперпозиции (суммы) нескольких волн. Другими словами, в пространстве будет распространяться волновой пакет (группа волн). Если две составляющие волнового пакета незначительно отличаются по циклической частоте, так что $d\omega \ll \omega$ и $dk \ll k$, то уравнение пакета записывается следующим образом

$$\xi(x, t) = \xi_m \cos(\omega t - kx) + \xi_m \cos[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x], \quad (3)$$

$$\xi(x, t) = 2\xi_m \cos\left(\frac{td\omega - xdk}{2}\right) \cos(\omega t - kx). \quad (4)$$

4. Амплитуда такого волнового движения будет медленно изменяться как функция времени и координаты

$$\xi(x, t) = \left| 2\xi_m \cos\left(\frac{td\omega - xdk}{2}\right) \right|. \quad (5)$$

5. В качестве характерной кинематической характеристики волны принимается скорость распространения максимума амплитуды. При условии $td\omega - xdk = \text{const}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk} = u. \quad (6)$$

Величина u называется групповой скоростью, которая связана с фазовой скоростью следующим образом

$$u = \frac{d\omega}{dk}; \quad c = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (7)$$

$$u = \frac{d(c k)}{dk} = c + k \frac{\frac{dc}{d\lambda}}{\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)} = c + k \left(-\frac{\lambda^2}{2\pi}\right) \frac{dc}{d\lambda}, \quad (8)$$

с учётом того, что $\lambda/2\pi = 1/k$

$$u = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}. \quad (9)$$

Пример № 27. Фазовая скорость акустической волны, удовлетворяет уравнению

$$c = \frac{\aleph}{\sqrt{\nu + \vartheta}}, \quad (1)$$

где $\nu = 1 \text{ кГц}$ – частота колебаний, $\vartheta = 200 \text{ Гц}$, $\aleph = 10 \text{ м} \cdot \text{с}^{-3/2}$ – постоянные размерные коэффициенты. Найти групповую скорость для частоты $\nu = 1 \text{ кГц}$.

1. В данном случае длину волны можно представить следующим образом

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{\aleph}{\nu \sqrt{\nu + \vartheta}}. \quad (2)$$

2. Групповая скорость в соответствии с уравнением (6) предыдущей задачи определяется следующим уравнением

$$u = \frac{d\omega}{dk} = 2\pi \frac{d\nu}{dk}, \quad (3)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число.

3. Подставим значение волнового числа в уравнение (3)

$$u = 2\pi \frac{dv}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)}. \quad (4)$$

4. Вычислим знаменатель последнего уравнения

$$d\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1,5v + 9}{8\sqrt{v + 9}} dv. \quad (5)$$

5. Совместим уравнения (4) и (5)

$$u = \frac{dv 8\sqrt{v + 9}}{(1,5v + 9)dv} = \frac{8\sqrt{v + 9}}{1,5v + 9} = \frac{10\sqrt{10^3 + 200}}{1,5 \cdot 10^3 + 200} \cong 0,2 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (6)$$

Пример № 28. Поплавок на поверхности воды за время $\tau = 30$ с совершил $n = 40$ колебаний вокруг положения равновесия, рыбак, расположившийся на берегу, на двадцатиметровом отрезке насчитал $N = 20$ гребней волн. Определить скорость волн, распространяющихся в водоёме.

1. Период колебаний частиц жидкости при распространении волны можно выразить через параметры колебаний и характеристики волны

$$T = \frac{\tau}{n}; \quad T = \frac{\lambda}{v}, \quad (1)$$

откуда

$$v = \frac{\lambda n}{\tau}. \quad (2)$$

2. Длину волны в данном случае целесообразно выразить, воспользовавшись результатами наблюдений $\lambda = s/N$, тогда скорость представится следующим образом

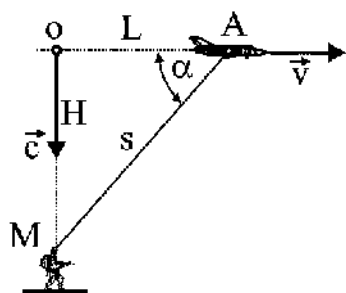
$$v = \frac{sn}{\tau N} = \frac{20 \cdot 40}{30 \cdot 20} = 1,33 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (3)$$

Пример № 29. Некто, не обременённый возрастом, исключительно в познавательных целях, бросает в середину круглой лужи камень, отмечая, что за время $\tau_1 = 80$ с к его ногам «подошло» $n = 15$ гребней волн. Расстояние между гребнями составляло $\lambda = 0,2$ м, первый «сигнал» от камня распространялся в течение $\tau_2 = 20$ с. Каким образом по результатам этих наблюдений можно вычислить радиус лужи.

1. Если волновой фронт перемещается с постоянной скоростью, то $s = v\tau_1$. С другой стороны скорость волн можно выразить через их длину $v = \lambda/T = \lambda n/\tau_2$.

2. Подставим далее значение скорости в уравнение расстояния, проходимого волновым фронтом

$$R = \lambda n \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{0,2 \cdot 15 \cdot 80}{20} = 12 \text{ м}. \quad (1)$$



Пример № 30. Услышав, пришедший сверху звук пролетающего самолёта, наблюдатель обнаружил его визуально под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту. Определить скорость самолёта v и расстояние до него s , если звук распространялся в течение $\tau = 2$ с.

1. Расстояние L и высоту H звук проходит за одно и то же время, что даёт основание записать следующие соотношения

$$L = v\tau; \quad H = c\tau; \quad (1)$$

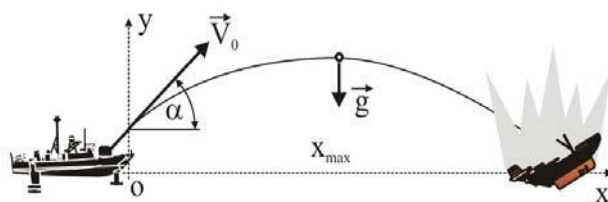
$$\frac{Y}{L} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{v}; \quad \Rightarrow \quad v = \frac{c}{\operatorname{tg} \alpha} = 340 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (2)$$

2. Расстояние s определится из равнобедренного прямоугольного треугольника ОАМ

$$s = \frac{c\tau}{\sin \alpha} = \frac{340 \cdot 2}{0,707} = 962 \text{ м}. \quad (3)$$

Пример № 31. Из корабельного орудия главного калибра установленного на максимальную дальность стрельбы вылетает снаряд с начальной скоростью $v_0 = 500 \text{ м/с}$ и поражает надводную цель. Через какой промежуток времени канониры услышат звук взрыва, если движение снаряда в воздухе происходит с пренебрежимо малым сопротивлением?

1. Время прошедшее после выстрела будет представлять собой сумму двух промежутков: собственно времени полёта снаряда до цели и времени распространения звуковой волны от цели к атакующему судну



$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = \frac{x_{\max}}{v_0 \cos \alpha} + \frac{x_{\max}}{c}, \quad (1)$$

$$\tau = x_{\max} \left(\frac{1}{v_0 \cos \alpha} + \frac{1}{c} \right). \quad (2)$$

2. Максимальная дальность стрельбы при прочих равных условиях обеспечивается при $\alpha = 45^\circ$, при этом

$$x_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g}. \quad (3)$$

3. Совместим уравнения (2) и (3)

$$\tau = \frac{v_0}{g} \left(\frac{1}{\cos \alpha} + M \right) \cong 144 \text{ с}, \quad (4)$$

Где $M = v_0/c = 500/340 = 1,47$ – число Маха.

Пример № 32. При измерениях установлено, что акустические колебания при переходе из одной среды в другую увеличивают длину волны в три раза. Во сколько раз, при этом изменяется скорость распространения волны?

1. При распространении акустических волн в средах с различными волновыми сопротивлениями ($\mathfrak{R} = \rho c$) период и частота колебаний остаются постоянными, изменяются только скорость звука и длина волны

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= c_1 T; \\ \lambda_2 &= c_2 T. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{c_1}{c_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \quad (1)$$

2. Подставим в уравнение соотношение длин волн, заданное по условию задачи $3\lambda_2 = \lambda_1$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{3\lambda_2}{\lambda_2} = 3. \quad (2)$$

Пример № 33. На прямой, вдоль которой в воде распространяется упругая волна выделены две точки, одна из которых отстоит от источника на расстоянии $x_1 = 100 \text{ м}$, а вто-

рая на расстоянии $x_2 = 160$ м. Определить разность фаз колебаний в этих точках, если частота источника колебаний равна $\nu = 10$ кГц.

1. Запишем уравнение колебаний точек среды на заданных расстояниях

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \xi_m \cos(\omega t_1 - kx_1); \\ \xi_2 &= \xi_m \cos(\omega t_2 - kx_2). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

2. Разность фаз в этом случае определится уравнением

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1, \quad (2)$$

$$\Delta\Phi = 2\pi\nu \frac{x_2}{c} - 2\pi\nu \frac{x_1}{c} = \frac{2\pi\nu}{c}(x_2 - x_1), \quad (3)$$

$$\Delta\Phi = \frac{6,28 \cdot 10^4}{1500}(160 - 100) = 8 \cdot 10^2 \pi \text{ рад}. \quad (4)$$

16.3. Суперпозиция упругих волн

Пример № 34. Два синфазных источника акустических волн генерируют в упругую среду колебания с длиной волны $\lambda = 0,6$ м и амплитудой смещения частиц среды $\xi_{m(1)} = \xi_{m(2)} = 10^{-3}$ м. Определить амплитуду результирующих колебаний ξ_m в точке пространства, которая располагается на удалении $x_1 = 3,5$ м и $x_2 = 5,4$ м от источника, а направление волновых векторов совпадает.

1. Запишем уравнение заданных волн

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \xi_{m(1)} \cos(\omega t - kx_1); \\ \xi_2 &= \xi_{m(1)} \cos(\omega t - kx_2). \end{aligned} \right\}$$

(1)

2. Определим разность фаз колебаний между заданными точками волнового пространства

$$\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = k(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1), \quad (2)$$

3. Поскольку в заданных точках колебания, с одинаковыми амплитудными значениями смещения $\xi_{m(1)} = \xi_{m(2)} = \xi_m$, движутся в данный момент времени в одном направлении, то суммарное смещение можно выразить следующим образом

$$\begin{aligned} \xi &= 2\xi_m \left| \cos \frac{\Delta\Phi}{2} \right| = 2\xi_m \left| \cos \frac{\pi(x_2 - x_1)}{\lambda} \right|; \\ \xi &= 2 \cdot 10^{-3} \left| \cos \frac{3,14 \cdot 1,9}{0,6} \right| \cong 1,73 \cdot 10^{-3} \text{ м}. \end{aligned} \quad (3)$$

Пример № 35. Бегущая волна отражается от границы раздела сред и распространяется в противоположном направлении, образуя стоячую волну. Найти местоположение узлов и пучностей стоячей волны, если скорость прямого и обратного волнового фронта распространяются в среде с фазовой скоростью $c = 340$ м/с при частоте колебания частиц среды $\nu = 3,4$ кГц.

1. Запишем уравнения двух упругих волн, распространяющихся в противоположных направлениях

$$\left. \begin{aligned} \xi_1(x, t) &= \xi_m \cos(\omega t - kx + \vartheta_1); \\ \xi_2(x, t) &= \xi_m \cos(\omega t + kx + \vartheta_2). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

2. Сложим уравнения и преобразуем по формуле для суммы косинусов

$$\xi(x, t) = \xi_m [\cos(\omega t - kx + \vartheta_1) + \cos(\omega t + kx + \vartheta_2)], \quad (2)$$

$$\xi(x, t) = 2\xi_m \cos\left(kx + \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2}\right) \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}\right). \quad (3)$$

3. Уравнение стоячей волны (3) можно упростить, если начало системы отсчёта выбрать таким образом, чтобы разность фаз прямой и отражённой волны оказалась равной нулю, т.е. $\vartheta_2 - \vartheta_1 = 0$, а момент времени – чтобы $\vartheta_2 + \vartheta_1 = 0$ и выразить волновое число через длину волны $k = 2\pi/\lambda$

$$\xi(x, t) = 2\xi_m \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \cdot \cos \omega t. \quad (4)$$

Из уравнения (4) видно, что все точки пространства занятые стоячей волной колеблются с той же частотой ω что и взаимодействующие волны. Амплитуда стоячей волны A является функцией координаты x , изменяясь по закону косинуса

$$A = \left| 2\xi_m \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \right|. \quad (5)$$

4. Амплитуда стоячей волны достигает максимума в, так называемых, пучностях

$$x_{\max} = \pm m \frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (6)$$

$$x_{\max(1)} = \pm m \frac{c}{2\nu} = \pm 1 \frac{340}{6800} = \pm 0,05 \text{ м}, \quad (7)$$

$$x_{\max(2)} = \pm 0,1 \text{ м}; \quad (8)$$

5. Минимум амплитуды имеет место в точках (узлы стоячей волны)

$$x_{\min} = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{c}{2\nu}.$$

(9)

$$x_{\min(1)} = \pm 0,075 \text{ м}; \quad x_{\min(2)} = \pm 0,15 \text{ м}. \quad (10)$$

Пример № 36. Определить длину бегущей волны, если в стоячей волне расстояние между первой и седьмой пучностями составляет $l_{1-7} = 0,15 \text{ м}$

1. Отметим, что расстояние между источником волн пучностями определяется уравнением (6) предыдущей задачи

$$x_{\max} = \pm m \frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

(1)

2. Расстояние между первой и седьмой пучностями l_{1-7} определится при $m = 6$

$$l_{1-7} = 6 \frac{\lambda}{2}; \quad \lambda = \frac{2l_{1-7}}{6} = 0,05 \text{ м}. \quad (2)$$

Пример № 37. Определить длину бегущей волны, если расстояние между первым и четвёртым узлом в стоячей волне составляет $l_{1-4} = 0,15 \text{ м}$.

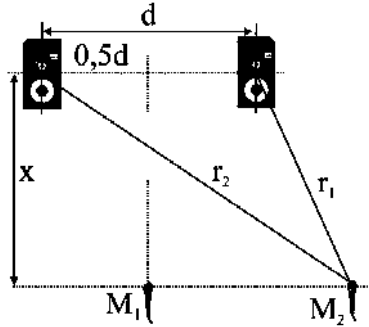
1. Координаты точек пространства с нулевым смещением, занятого стоячей волной определяются уравнением

$$x_{\min} = \pm \left(m + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2}. \quad (1)$$

2. Для заданных условий уравнение (1) необходимо переписать в следующем виде

$$\ell_{1-4} = \left(2,5 + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2}; \quad \lambda = 0,1 \text{ м}. \quad (2)$$

Пример № 38. Динамики стереосистемы излучают тональный сигнал фиксированной частоты и расположены на расстоянии $d = 3$ м друг от друга. При перемещении микрофона, расположенного на удалении $x = 6$ м от плоскости излучения параллельно этой плоскости на расстояние $a = 1,7$ м он фиксирует первый интерференционный минимум. Найти частоту звука приняв $c = 340$ м/с.



1. Рассмотрим простейший случай распространения в одном и том же пространстве двух волн, описываемых уравнениями

$$\xi_1 = \xi_{m1} \sin(\omega_1 t - k_1 r_1 + \varphi_1) = \xi_{m1} \sin \Phi_1; \quad (1)$$

$$\xi_2 = \xi_{m2} \sin(\omega_2 t - k_2 r_2 + \varphi_2) = \xi_{m2} \sin \Phi_2;$$

где r_1 и r_2 расстояние от источников волн до рассматриваемой точки M_2 , k – волновое число, φ_1 , φ_2 – начальные фазы интерферирующих волн. Результирующее колебание в точке M_2 определится исходя из принципа суперпозиции, т.е. необходимо определить суммарное смещение частиц среды при одновременном действии обеих волн

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = \xi \sin \Phi; \quad (2)$$

Величины ξ и Φ могут быть найдены методом векторных диаграмм

$$\begin{aligned} \xi^2 &= \xi_{m1}^2 + \xi_{m2}^2 + 2\xi_{m1}\xi_{m2} \cos(\Phi_2 - \Phi_1); \\ \Phi &= \arctg \frac{\xi_{m1} \sin \Phi_1 + \xi_{m2} \sin \Phi_2}{\xi_{m1} \cos \Phi_1 + \xi_{m2} \cos \Phi_2}; \end{aligned} \quad (3)$$

Преобразуем разность фаз складываемых колебаний

$$\Phi_2 - \Phi_1 = (\omega_2 - \omega_1)t - (k_2 r_2 - k_1 r_1) + (\varphi_2 - \varphi_1). \quad (4)$$

2. С учётом того, что волновое число является функцией циклической частоты колебаний и скорости распространения волны – $k = \omega/c$, разности фаз можно придать вид, более удобный для дальнейшего анализа

$$\Phi_2 - \Phi_1 = (\omega_2 - \omega_1)t - \left(\frac{\omega_2 r_2}{c_2} - \frac{\omega_1 r_1}{c_1} \right) + (\varphi_2 - \varphi_1). \quad (5)$$

3. В данном случае складываются когерентные волны, для которых

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega; \quad c_1 = c_2 = c,$$

то уравнение (5) для разности фаз можно переписать следующим образом

$$\Phi_2 - \Phi_1 = -\frac{\omega}{c}(r_2 - r_1) + (\varphi_2 - \varphi_1), \quad (6)$$

4. Условие минимума при интерференции когерентных волн можно представить следующим образом

$$\Delta_{\min} = r_2 - r_1 = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (7)$$

при $m = 0$, $\Delta_{\min} = \lambda/2$.

5. Выразим расстояния r_1 и r_2 через заданные по условию геометрические параметры

$$r_1 = \sqrt{x^2 + (a - 0,5d)^2}, \quad (8)$$

$$r_2 = \sqrt{x^2 + (a + 0,5d)^2}. \quad (9)$$

6. Используя уравнение (7) выразим длину волны

$$v = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2(r_2 - r_1)}. \quad (10)$$

7. Подставим в уравнение (10) значение r_1 и r_2

$$v = \frac{c}{2 \left[\sqrt{x^2 + (a + 0,5d)^2} - \sqrt{x^2 + (x - 0,5d)^2} \right]}, \quad (11)$$

$$v = \frac{340}{2(\sqrt{36 + 10,2} + \sqrt{36 - 10,2})} = 100 \text{ Гц}. \quad (12)$$

Пример № 39. От первого источника акустических волн колебания достигают микрофона M за время $\tau_1 = 0,67$ с. От второго источника, начавшего работать одновременно с первым, колебания в точку расположения микрофона доходят за $\tau_2 = 0,7$ с. Минимальный или максимальный сигнал будет фиксировать микрофон, если волны с $\lambda = 6,8$ м когерентные

1. Усиление сигнала при интерференции будет иметь место если на разности хода волн $\Delta r = r_2 - r_1$ будет укладываться чётное целое число полуволн. Минимум, т.е. ослабление, будет наблюдаться при нечётном целом числе полуволн.

2. Определим величину Δr , выразив расстояния от излучателей до микрофона через скорость волн и заданные времена

$$r_1 = c\tau_1; \quad r_2 = c\tau_2; \quad \Delta r = c(\tau_2 - \tau_1). \quad (1)$$

3. Разделим разность хода волн на величину $\lambda/2$

$$\zeta = \frac{2\Delta r}{\lambda} = \frac{2c(\tau_2 - \tau_1)}{\lambda} = \frac{2 \cdot 340 \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{6,8} = 3. \quad (2)$$

Поскольку на разности хода волн укладывается нечётное число полуволн, то микрофон, расположенный в заданной точке, будет фиксировать ослабление сигнала.

Пример № 40. Камертон с частотой собственных колебаний $\nu = 680$ Гц поместили над цилиндрическим сосудом высотой $h = 1,5$ м который постепенно заполняют водой. При каком уровне жидкости звук камертона будет усиливаться?

1. Акустическое сопротивление воздуха равно $\rho_1 c_1 \cong 41$ кг/м²с, а воды – $\rho_2 c_2 \cong 1,6 \cdot 10^6$ кг/м²с, т.е. поверхность воды можно рассматривать в данном случае как твёрдое тело, от которого отражается, возбуждаемая камертоном звуковая волна. В этой связи при падении и отражении волны на поверхности жидкости должен находиться узел стоячей волны, а на уровне верхнего края сосуда – пучность.

2. Расстояние между соседними узлом и пучностью равно $\lambda/4$, расстояние между соседними узлами или пучностями равны $\lambda/2$, что даёт основание записать для высоты воздушного столба воздуха следующее условие

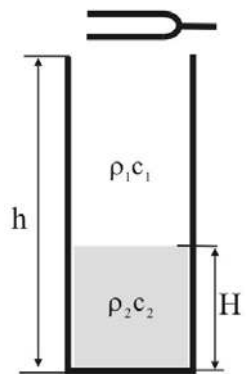
$$h - H = \frac{\lambda}{4} + m \frac{\lambda}{2}. \quad (1)$$

3. Определим длину волны в воздухе при $c_1 = 340$ м/с

$$\lambda = \frac{c_1}{\nu} = \frac{340}{680} = 0,5 \text{ м}. \quad (2)$$

4. Определим усиления звука при $m = 0$

$$h_{0(1)} = h - H = \frac{\lambda}{4} = 0,125 \text{ м}; \quad (3)$$



при $m = 1$

$$h_{0(2)} = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} = 0,15 \text{ м}; \quad (4)$$

при $m = 2$

$$h_{0(3)} = \frac{\lambda}{4} + \lambda = 0,625 \text{ м}; \quad (5)$$

при $m = 3$

$$h_{0(4)} = \frac{\lambda}{4} + 1,5\lambda = 0,875 \text{ м}; \quad (6)$$

Пример № 41. Труба длиной $l = 1,2 \text{ м}$, заполненная воздухом при температуре $T = 300 \text{ К}$, расположена вблизи акустического излучателя. Найти минимально возможную частоту колебаний воздушного столба для открытой и закрытой с обоих концов трубы.

1. Определим скорость звука при заданной температуре

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}, \quad (1)$$

где $\gamma = (i+2)/i = 1,33$ – показатель адиабаты, $R = 8,3 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$ – универсальная газовая постоянная, $\mu \cong 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ – молярная масса воздуха

$$c = \sqrt{\frac{1,33 \cdot 8,3 \cdot 300}{28 \cdot 10^{-3}}} = 344 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

(2)

2. Колебания воздушного столба в открытой трубе будут протекать с минимальной частотой в том случае, когда на длине трубы будет укладываться половина длины волны

$$\ell = \frac{\lambda}{2}; \quad \lambda_{\max} = 2\ell = 2,4 \text{ м}. \quad (3)$$

3. Соответствующая условию (3) минимальная частота

$$\nu_{\min} = \frac{c}{\lambda_{\max}} = \frac{344}{2,4} = 143 \text{ Гц}. \quad (4)$$

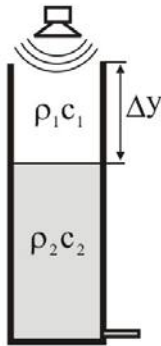
4. В случае закрытой трубы будет образовываться стоячая волна, для которого условие (3) примет следующий вид

$$\ell = \frac{\lambda}{4}; \quad \lambda_{\max} = 4\ell = 4,8 \text{ м}, \quad (5)$$

соответствующая минимальная частота будет равна

$$\nu_{\min} = \frac{c}{\lambda_{\max}} = \frac{344}{4,8} = 71,7 \text{ Гц}. \quad (6)$$

Пример № 42. Вертикальный стеклянный сосуд заполнен водой. Над сосудом помещён звучащий на частоте 440 Гц громкоговоритель. Когда уровень воды в сосуде при открывании нижнего крана, опустился на $\Delta y_1 = 19,5 \text{ см}$, звук камертона достиг максимального значения. Определить скорость звука в воздухе.



1. Усиление силы звука при понижении уровня жидкости в сосуде будет происходить, когда высота воздушного столба над водой будет кратна нечётному количеству четвертьволновых отрезков, т.е.

$$\Delta y_1 = \frac{\lambda}{4}; \quad \Delta y_2 = 3\frac{\lambda}{4}; \quad \Delta y_3 = 5\frac{\lambda}{4}. \quad (1)$$

2. Величина Δy_1 , таким образом, даёт основание определить длину волны

$$\lambda = 4\Delta y_1 = 0,78 \text{ м} \quad (2)$$

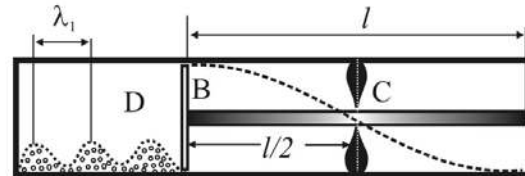
3. Скорость звука в воздухе

$$c_1 = \lambda \nu = 343 \text{ м/с}. \quad (3)$$

Пример № 43. Для измерения скорости звуковых волн в латунном стержне A длиной $l = 0,8 \text{ м}$, закреплённом в его среднем сечении C используют метод акустической интерферометрии, когда на одном из концов стержня помещается лёгкий диск B . В закрытом цилиндрическом воздушном пространстве D возбуждается стоячая волна, которая визуализируется мелкодисперсным порошком. В одном из измерений длина стоячих волн оказалась равной $\lambda_1 = 8,5 \text{ см}$. Определить скорость звука в латуни.

1. Частоту колебаний стержня определим по длине стоячей волны λ_1 в воздухе, принимая скорость звука в воздухе $c_1 = 340 \text{ м/с}$

$$\nu = \frac{c_1}{\lambda_1}. \quad (1)$$



2. Первая собственная частота стержня соответствует максимумам смещения его торцов и максимуму колебательной скорости в среднем сечении

$$\lambda_2 = l. \quad (2)$$

3. Скорость звука в латуни, с учётом уравнения (2) определится как

$$c_2 = l \frac{c_1}{\lambda_1} = 0,8 \frac{340}{8,5 \cdot 10^{-2}} = 3200 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (3)$$

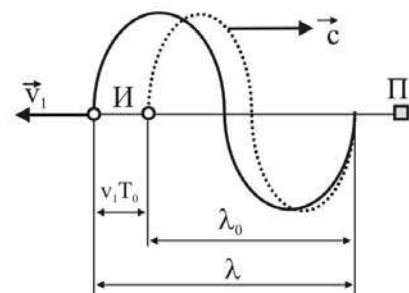
16.4. Эффект Доплера

Пример № 44. Локомотив, приближающийся к неподвижному наблюдателю со скоростью $v_1 = 144 \text{ км/ч}$, даёт гудок на частоте основного тона $\nu = 300 \text{ Гц}$. Определить кажущуюся частоту, воспринимаемого наблюдателем звука. Как изменится эта частота при удалении локомотива?

1. Изменение частоты воспринимаемого звука будет наблюдаться вследствие эффекта Доплера, который фактически заключается в том, что при приближении движущегося источника звука возбуждаемые его сиреной волны воспринимаются как более высокие, а при удалении от наблюдателя – как более низкие.

2. Рассмотрим вначале вариант удаления источника со скоростью v_1 . За время одного периода T_0 источник смещается в среде на расстояние

$$v_1 T_0 = \frac{v_1}{\nu_0}, \quad (1)$$



где ν_0 – частота колебаний источника. Естественно, что длина волны движущегося источника λ будет отличаться от длины волны неподвижного источника λ_0

$$\lambda = \lambda_0 + v_1 T_0 = (c + v_1) T_0 = \frac{c + v_1}{\nu_0}, \quad (2)$$

где c – фазовая скорость волны в данной среде.

3. Частота волны, воспринимаемая приёмником определится уравнением

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{\nu_0}{1 + \frac{v_1}{c}}. \quad (3)$$

4. В случае приближения приёмника уравнение (3) перепишется следующим образом

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{\nu_0}{1 - \frac{v_1}{c}}. \quad (4)$$

5. Подставим в уравнения (4) и (3) заданные по условию задачи величины

$$\nu_{\text{прибл.}} = \frac{300}{1 - \frac{40}{340}} = 340 \text{ Гц}; \quad (5)$$

$$\nu_{\text{удал.}} = \frac{300}{1 + \frac{40}{340}} = 268 \text{ Гц}.$$

(6)

Пример № 45. Мимо неподвижного электровоза, сирена которого излучает тональный сигнал на частоте $\nu_0 = 300$ Гц движется пассажирский поезд со скоростью $u = 40$ м/с. Какую частоту воспринимает пассажир поезда при приближении и удалении от электровоза?

1. Уравнения (3) и (4) для рассматриваемого в задаче случая можно представить одним соотношением

$$\nu = \frac{c \pm u}{c} \nu_0, \quad (1)$$

$$\nu_{\text{прибл.}} = \frac{c + u}{c} \nu_0 = \frac{340 + 40}{340} 300 = 335 \text{ Гц}, \quad (2)$$

$$\nu_{\text{удал.}} = \frac{c - u}{c} \nu_0 = \frac{340 - 40}{340} 300 = 265 \text{ Гц}. \quad (3)$$

Пример № 46. Мимо неподвижного наблюдателя проходит электропоезд. При приближении электропоезда наблюдатель воспринимает кажущуюся частоту сирены $\nu_1 = 1100$ Гц, а при удалении поезда – $\nu_2 = 900$ Гц. Определить скорость электропоезда и истинную частоту излучаемого звука.

1. Выразим из уравнения (2) предыдущей задачи величину ν_0

$$\nu_0 = \frac{\nu_1 c}{c + u}. \quad (1)$$

2. Подставим значение ν_0 в уравнение (3) предыдущей задачи

$$\nu_2 = \frac{c - u}{c} \frac{\nu_1 c}{c + u} = \nu_1 \frac{c - u}{c + u}. \quad (2)$$

3. Выразим из уравнения (2) скорость электропоезда

$$\nu_2 (c + u) = \nu_1 (c - u), \quad (3)$$

$$u = \frac{c(v_1 - v_2)}{v_1 + v_2} = \frac{340 \cdot 200}{2000} = 34 \frac{\text{м}}{\text{с}} = 122 \frac{\text{км}}{\text{ч}}. \quad (4)$$

4. Подставим значение скорости электропоезда u в равнение (1) и определим частоту излучения его сирены

$$v_0 = \frac{v_1 c}{c + u} = \frac{1100 \cdot 340}{340 + 34} = 1000 \text{ Гц}. \quad (5)$$

Пример № 47. В момент прохождения электропоезда мимо неподвижного наблюдателя он воспринимает скачкообразное изменение тональности сирены локомотива. Определить относительное изменение частоты $\Delta v/v_0$, если скорость поезда равна $u = 15 \text{ м/с}$.

1. В соответствие с уравнениями эффекта Доплера образуем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} v_{\text{прибл.}} &= \frac{c + u}{c} v_0; \\ v_{\text{удал.}} &= \frac{c - u}{c} v_0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

2. Запишем величину $\Delta v/v_0$, используя систему уравнений (1)

$$v_{\text{прибл.}} - v_{\text{удал.}} = \Delta v = \frac{c + u}{c} v_0 - \frac{c - u}{c} v_0 = v_0 \left(\frac{c + u}{c} - \frac{c - u}{c} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\Delta v}{v_0} = \frac{2u}{c} = \frac{30}{340} = 0,09. \quad (3)$$

Пример № 48. Неподвижный резонатор, настроенный на длину волны $\lambda = 4,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ и движущийся источник звука с частотой излучения $v_0 = 8 \text{ кГц}$ расположены на одной прямой. В каком направлении и с какой постоянной скоростью должен двигаться источник, чтобы звучание резонатора было максимальным?

1. Определим первую собственную частоту резонатора

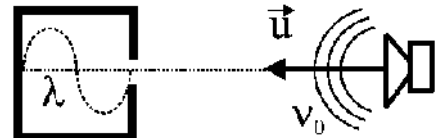
$$v = \frac{c}{\lambda} = 8100 \text{ Гц}. \quad (1)$$

2. Поскольку $v > v_0$ источник звука должен приближаться к резонатору со скоростью u , при этом

$$v = \frac{c + u}{c} v_0, \quad (2)$$

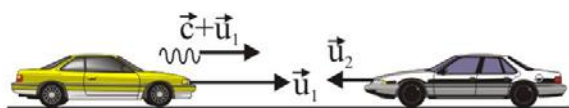
откуда

$$u = \frac{c(v - v_0)}{v_0} = \frac{340 \cdot 100}{8000} = 4,2 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (3)$$



Пример № 49. Поезд движущейся мимо неподвижного наблюдателя со скоростью $u = 120 \text{ км/ч}$, даёт звуковой сигнал продолжительностью $\tau_0 = 5 \text{ с}$. Какова будет кажущаяся продолжительность сигнала при приближении и удалении поезда при скорости звука $c = 348 \text{ м/с}$?

1. При приближении поезда к наблюдателю при фиксированном числе колебаний $\tau = NT$ кажущаяся частота будет увеличиваться, период, соответственно уменьшаться, поэтому время восприятия N колебаний можно записать следующим образом



$$\tau_{\text{прибл.}} = \frac{c - u}{c} \tau_0 = \frac{348 - 33,3}{348} 5 = 4,52 \text{ с.}$$

(1)

2. При удалении поезда длительность сигнала будет восприниматься как

$$\tau_{\text{удал.}} = \frac{c + u}{c} \tau_0 = 5,48 \text{ с.} \quad (2)$$

Пример № 50. Скорый поезд со скоростью $u = 20 \text{ м/с}$ приближается к станции, на которой стоит электричка, которая подаёт сигнал с частотой $\nu_0 = 600 \text{ Гц}$. Определить кажущуюся частоту, воспринимаемую машинистом движущегося скорого поезда.

1. В данном случае эффект Доплера проявляется потому, что имеется движущийся источник и неподвижный приёмник. Кажущаяся частота определяется уравнением

$$\nu = \frac{c}{c - u} \nu_0 = \frac{340}{340 - 20} 600 = 638 \text{ Гц.} \quad (1)$$

Пример № 51. На скоростном загородном шоссе сближаются два автомобиля со скоростями $u_1 = 30 \text{ м/с}$ и $u_2 = 20 \text{ м/с}$. Первый автомобиль подаёт сигнал на частоте $\nu_1 = 600 \text{ Гц}$. Чему равна кажущаяся частота звука ν_2 , воспринимаемого водителем второй машины во время сближения и удаления? Изменится ли результата при подаче сигнала второй машиной? Скорость звука принять равной $c = 332 \text{ м/с}$.

1. При сближении автомобилей и при подаче сигнала первым автомобилем кажущаяся частота, воспринимаемая водителем второго автомобиля определится уравнением

$$\nu_2 = \frac{c + u_2}{c - u_1} \nu_1 = \frac{332 + 20}{332 - 30} 600 = 699 \text{ Гц.} \quad (3)$$

2. При удалении автомобилей кажущаяся частота составит

$$\nu_2^* = \frac{c - u_2}{c + u_1} \nu_1 = \frac{332 - 20}{332 + 30} 600 = 517 \text{ Гц.} \quad (4)$$

3. При подаче сигнала вторым автомобилем в режиме сближения

$$\nu_1^* = \frac{c + u_1}{c - u_2} \nu_1 = \frac{332 + 30}{332 - 20} 600 = 696 \text{ Гц,} \quad (5)$$

в режиме удаления

$$\nu_1^* = \frac{c - u_1}{c + u_2} \nu_1 = \frac{332 - 30}{332 + 20} 600 = 515 \text{ Гц.} \quad (6)$$

Пример № 52. При скоростных испытаниях гоночного автомобиля, движущегося мимо контрольного пункта со скоростью $u = 360 \text{ км/ч}$, частота основного тона работающего двигателя меняется скачком. Какой процент от истинной частоты основного тона двигателя составляет скачок? Скорость звука принять равной $c = 340 \text{ м/с}$.

1. В соответствие с принципом Доплера частота воспринимаемого звука определяется уравнением

$$\nu_1 = \frac{c + u_{\text{пр}}}{c - u_{\text{ист}}} \nu_0, \quad (1)$$

где ν_0 – истинная частота основного тона, излучаемого работающим двигателем, ν_1 – кажущаяся частота. В рассматриваемом случае скорость приёмника $u_{\text{пр}} = 0$, поэтому

$$\nu_1 = \frac{c}{c - u_{\text{ист}}} \nu_0. \quad (2)$$

2. При движении болида к наблюдателю уравнение (2) переписывается следующим образом

$$v_1 = \frac{c}{c - u_{\text{ист}}} v_0, \quad (3)$$

при удалении от наблюдателя

$$v_1^* = \frac{c}{c + u} v_0. \quad (4)$$

3. Определим величину доплеровского скачка частоты

$$\Delta v = v_1 - v_1^* = \frac{c}{c - u} v_0 - \frac{c}{c + u} v_0, \quad (5)$$

$$\Delta v = c v_0 \left(\frac{1}{c - u} - \frac{1}{c + u} \right); \quad \frac{\Delta v}{v_0} = \frac{1}{c - u} - \frac{1}{c + u}, \quad (6)$$

$$\frac{\Delta v}{v_0} = 340 \left(\frac{1}{340 - 100} - \frac{1}{340 + 100} \right) \cong 64,6\%. \quad (7)$$

Пример № 53. Автомобиль на скоростном шоссе проходит мимо неподвижного наблюдателя со скоростью $u = 180$ км/ч. Наблюдатель воспринимает доплеровский скачок частоты основного тона сигнала автомобиля $\Delta v = 200$ Гц. Принимая скорость звука в воздухе равной $c = 340$ м/с определить частоту основного тона сигнала.

1. Воспользуемся уравнениями (3) и (4) предыдущей задачи

$$v_1 = \frac{c}{c - u} v_0; \quad v_1^* = \frac{c}{c + u} v_0. \quad (1)$$

2. Доплеровский скачок частоты Δv

$$\Delta v = v_1 - v_1^* = \frac{2ucv_0}{(c - u)(c + u)}. \quad (2)$$

3. Разрешим уравнение (2) относительно v_0

$$v_0 = \frac{(c - u)(c + u)\Delta v}{2uc} = \frac{(340 - 50)(340 + 50) \cdot 200}{2 \cdot 340 \cdot 50} \cong 665 \text{ Гц}. \quad (3)$$

16.5. Акустика

Пример № 54. По цилиндрической трубе диаметром $d = 0,2$ м и длиной $l = 5$ м, расположенной в сухом воздухе, распространяется акустическая волна, обладающая средней за период интенсивностью $\langle I \rangle = 50$ мВт/м². Найти среднюю за период энергию акустического поля $\langle W \rangle$, заключенного в трубе.

1. Определим объёмную плотность акустической энергии в трубе

$$I = \langle \varpi \rangle c; \quad \langle \varpi \rangle = \frac{I}{c}. \quad (1)$$

2. Энергия акустического поля, заключенного в трубе

$$\langle W \rangle = \langle \varpi \rangle V = \frac{I \pi d^2 \ell}{c \cdot 4} = \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 3,14 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 5}{4 \cdot 340} \cong 2,3 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}. \quad (2)$$

Пример № 54. Интенсивность звука равна $I = 1$ Вт/м². Определить среднюю объёмную плотность энергии акустической волны $\langle \varpi \rangle$ при скорости звука, равной $c = 332$ м/с.

1. Воспользуемся уравнением (1) предыдущей задачи

$$I = \langle \varpi \rangle c; \quad \langle \varpi \rangle = \frac{I}{c} = \frac{1}{332} = 3 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}. \quad (1)$$

Пример № 55. Изотропный источник излучает акустическую мощность $N = 10 \text{ Вт}$. Найти величину средней объёмной плотности энергии $\langle \varpi \rangle$ на расстоянии $r = 0,1 \text{ м}$ от источника при температуре сухого воздуха $T = 250 \text{ К}$.

1. Интенсивность точечного изотропного источника связана с его мощностью следующим соотношением

$$I = \frac{N}{4\pi r^2}. \quad (1)$$

2. Скорость звука в заданных условиях

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}. \quad (2)$$

3. Средняя объёмная плотность акустической энергии

$$\langle \varpi \rangle = \frac{I}{c} = \frac{N}{4\pi r^2 \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}} = \frac{10}{12,56 \cdot 10^{-2} \sqrt{\frac{1,33 \cdot 8,3 \cdot 250}{28 \cdot 10^{-3}}}} \cong 0,254 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}. \quad (3)$$

Пример № 56. Определить мощность точечного изотропного источника акустических волн N , если на расстоянии $r = 25 \text{ м}$ интенсивность составляет $I = 20 \text{ мВт/м}^2$. Найти среднюю объёмную плотность акустической энергии $\langle \varpi \rangle$ на заданном расстоянии.

1. Определим мощность источника

$$I = \frac{N}{4\pi r^2}; \quad N = I \cdot 4\pi r^2 = 2 \cdot 10^{-2} \cdot 12,56 \cdot 625 = 157 \text{ Вт}. \quad (1)$$

2. Средняя объёмная плотность акустической энергии

$$\langle \varpi \rangle = \frac{I}{c} = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{340} \cong 60 \frac{\text{мкДж}}{\text{м}^3}. \quad (2)$$

Пример № 57. Определить удельное акустическое сопротивление Z_s воздуха при нормальных условиях.

1. Физические характеристики воздуха при нормальных условиях: температура абсолютная $T = 273,15 \text{ К}$; давление $p = 1 \cdot 10^5 \text{ Па}$; молярная масса $\mu = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$; показатель адиабаты $\gamma = (I + 2)/I = 1,4$, плотность $\rho = 1,32 \text{ кг/м}^3$.

2. Определим скорость звука в воздухе при заданных условиях

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 8,3 \cdot 273}{29 \cdot 10^{-3}}} \cong 330 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (1)$$

3. Удельное акустическое сопротивление воздуха

$$Z_s = \rho c = 1,32 \cdot 330 = 436 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}} \equiv 436 \frac{\text{Па} \cdot \text{с}}{\text{м}}. \quad (2)$$

Пример № 58. Определить удельное акустическое сопротивление воды Z_s при температуре $T = 290 \text{ К}$.

1. Скорость звука в жидкости определяется уравнением

$$c = \sqrt{\frac{1}{\beta \rho}} = \sqrt{\frac{1}{4,9 \cdot 10^{-8} \cdot 10^3}} = 1430 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad (1)$$

Где $\beta = 4,9 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$ – сжимаемость воды, $\rho \cong 1 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ – плотность воды.

2. Удельное акустическое сопротивление

$$Z_s = \rho c = \rho \sqrt{\frac{1}{\beta \rho}} = \sqrt{\frac{\rho}{\beta}} = 1,43 \frac{\text{МПа} \cdot \text{с}}{\text{м}}. \quad (2)$$

Пример № 59. Найти максимальную колебательную скорость частиц кислорода, при прохождении через него акустической волны с амплитудным значением давления $p_m = 0,2 \text{ Па}$ при температуре $T = 300 \text{ К}$ и нормальном атмосферном давлении.

1. Звуковое давление связано с амплитудным значением колебательной скорости уравнением

$$p_m = \rho c \dot{\xi}_m. \quad (1)$$

2. Определим плотность кислорода и скорость звука в нём при заданных условиях, воспользовавшись уравнением Клапейрона – Менделеева

$$p_0 V = \frac{m}{\mu} RT; \quad p_0 \mu = \rho RT; \quad \rho = \frac{p_0 \mu}{RT} = \frac{10^5 \cdot 16 \cdot 10^{-3}}{8,3 \cdot 300} = 0,643 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \quad (2)$$

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 8,3 \cdot 300}{16 \cdot 10^{-3}}} = 467 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (3)$$

3. Разрешим уравнение (3) относительно амплитудного значения колебательной скорости и подставим найденные величины

$$\dot{\xi}_m = \frac{p_m}{\rho c} = \frac{0,2}{0,643 \cdot 467} = 6,7 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (4)$$

Пример № 60. Найти акустическое сопротивление воздуха, находящегося в трубе диаметром $d = 0,2 \text{ м}$ при температуре $T = 300 \text{ К}$ и внешнем давлении $p = 2 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

1. Воспользовавшись уравнением (2) предыдущей задачи, определим плотность воздуха в трубе

$$\rho = \frac{p \mu}{RT} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 29 \cdot 10^{-3}}{8,3 \cdot 300} = 2,33 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \quad (1)$$

2. Скорость звука в трубе

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 8,3 \cdot 300}{29 \cdot 10^{-3}}} = 346 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (2)$$

3. Акустическое сопротивление

$$Z_A = \frac{Z_s}{s} = \frac{4 \rho c}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 2,33 \cdot 346}{3,14 \cdot 4 \cdot 10^{-2}} = 2,57 \cdot 10^4 \frac{\text{Па} \cdot \text{с}}{\text{м}^3}. \quad (3)$$

Пример № 61. Через азот при температуре $T = 290 \text{ К}$ и давлении $p = 104 \text{ кПа}$ проходит акустическая волна с частотой колебаний частиц среды $\nu = 400 \text{ Гц}$. Амплитуда звукового давления при этом составляет $p_m = 0,5 \text{ Па}$. Найти амплитудное значение смещения частиц среды из равновесного положения.

1. Определим скорость звука в азоте при заданных условиях

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 8,3 \cdot 290}{28 \cdot 10^{-3}}} = 346 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (1)$$

2. Плотность азота

$$\rho = \frac{p\mu}{RT} = \frac{1,04 \cdot 10^5 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{8,3 \cdot 290} = 1,21 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \quad (2)$$

3. Запишем уравнение звукового давления, выразив его величину через амплитудное значение смещения

$$p_m = 2\pi\nu\rho c\xi_m; \quad \xi_m = \frac{p_m}{2\pi\nu\rho c} = \frac{0,5}{6,28 \cdot 400 \cdot 1,21 \cdot 346} = 475 \text{ нм}. \quad (3)$$

Пример № 62. Найти амплитуду звукового давления, если частицы воздуха колеблются с амплитудой $\xi_m = 1 \cdot 10^{-6}$ м на частоте $\nu = 600$ Гц.

1. Будем считать, что колебания частиц воздуха происходят при нормальных условиях: $T = 273$ К, $p = 1,04 \cdot 10^5$ Па, при этом $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

2. Плотность воздуха и скорость звука при нормальных условиях

$$\rho = \frac{p\mu}{RT} = \frac{1,04 \cdot 10^5 \cdot 29 \cdot 10^{-3}}{8,3 \cdot 273} = 1,33 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \quad (1)$$

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 8,3 \cdot 273}{29 \cdot 10^{-3}}} = 330 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (2)$$

3. Амплитудное значение звукового давления

$$p_m = 2\pi\nu\rho c\xi_m = 6,28 \cdot 1,33 \cdot 600 \cdot 330 \cdot 10^{-6} = 1,65 \text{ Па}. \quad (3)$$

Пример № 63. Удельное акустическое сопротивление воздуха составляет $Z_s = 420$ Па·с/м. На расстоянии $r = 100$ м от изотропного источника акустических волн амплитудное значение давления равно $p_m = 0,2$ Па. Определить мощность источника волн N .

1. Определим амплитудное значение колебательной скорости частиц воздуха при прохождении акустической волны, воспользовавшись уравнением

$$p_m = \rho c \dot{\xi}_m; \quad \dot{\xi}_m = \frac{p_m}{Z_s} = 4,76 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (1)$$

2. Приняв плотность воздуха равной $\rho = 1,33$ кг/м³, найдём объёмную плотность акустической энергии

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho \dot{\xi}_m^2 = 0,5 \cdot 1,33 \cdot 2,27 \cdot 10^{-7} = 1,7 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}. \quad (2)$$

3. Интенсивность акустической волны

$$I = \langle w \rangle c = 1,51 \cdot 10^{-7} \cdot 330 = 4,98 \cdot 10^{-5} \text{ Вт/м}^2. \quad (3)$$

4. Акустическая мощность источника

$$N = 4\pi r^2 I = 12,56 \cdot 10^4 \cdot 4,98 \cdot 10^{-5} = 6,25 \text{ Вт}. \quad (4)$$

Пример № 64. Для точечного источника акустических волн мощностью $N = 1$ Вт, находящимся в воздухе найти на расстоянии $r = 100$ м амплитудное значение звукового давления p_m .

1. Интенсивность акустического поля, создаваемого источником

$$I = \frac{N}{4\pi r^2}. \quad (1)$$

2. Выразим среднюю объёмную плотность акустической энергии рассматриваемого источника через его интенсивность и амплитуду акустического давления

$$\langle \varpi \rangle = \frac{N}{4\pi r^2 c}; \quad \langle \varpi \rangle = \frac{1}{2} \frac{p_m^2}{\rho c^2}. \quad (2)$$

3. Совместим последние уравнения и разрешим относительно искомой величины

$$\frac{N}{4\pi r^2 c} = \frac{p_m^2}{2\rho c^2}; \quad p_m = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{NZ_s}{2\pi}} = \frac{1}{100} \sqrt{\frac{1 \cdot 420}{6,28}} = 8,2 \cdot 10^{-2} \text{ Па}. \quad (3)$$

Пример № 65. В сухом воздухе при нормальных условиях интенсивность звука составила $I = 10^{-11} \text{ Вт/м}^2$. Определить амплитуду акустического давления p_m .

1. Определим скорость звука в воздухе при нормальных условиях, т.е. при $T_0 = 273 \text{ К}$, $p_0 = 10^5 \text{ Па}$, $\mu = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 8,3 \cdot 273}{29 \cdot 10^{-3}}} = 330 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (1)$$

2. Найдём плотность воздуха при нормальных условиях

$$\rho = \frac{p\mu}{RT} = \frac{1,04 \cdot 10^5 \cdot 29 \cdot 10^{-3}}{8,3 \cdot 273} = 1,33 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \quad (2)$$

3. Удельное акустическое сопротивление воздуха

$$Z_s = \rho c = 439 \text{ Па} \cdot \text{с/м}. \quad (3)$$

4. Воспользуемся соотношениями (2) предыдущей задачи

$$\langle \varpi \rangle = \frac{I}{c} = \frac{1}{2} \frac{p_m^2}{\rho c^2}; \quad I = \frac{1}{2} \frac{p_m^2}{2\rho c}; \quad \Rightarrow p_m = \sqrt{2IZ_s} = 8,8 \cdot 10^{-5} \text{ Па}. \quad (4)$$

Пример № 66. Слуховой орган среднего статистического человека может воспринимать акустические колебания в интервале частот $\nu_{\min} = 22 \text{ Гц}$, $\nu_{\max} = 18 \text{ кГц}$. Определить диапазон длин волн для температур окружающего воздуха $t_1 = -25^\circ \text{C}$ и $t_2 = 40^\circ \text{C}$.

1. Определим скорость звука при заданных условиях принимая внешнее давление равным $p = 10^5 \text{ Па}$, молярную массу $\mu = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$, число степеней свободы молекул воздуха $i = 5$, показатель адиабаты $\gamma = 1,4$

$$c_1 = \sqrt{\frac{\gamma RT_1}{\mu}} = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 8,3 \cdot 248}{29 \cdot 10^{-3}}} = 315 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad (1)$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{\gamma RT_2}{\mu}} = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 8,3 \cdot 313}{29 \cdot 10^{-3}}} = 354 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (2)$$

2. Искомые диапазоны длин волн

$$\lambda_{\max} = \frac{c_1}{\nu_{\min}} = \frac{315}{22} = 14,3 \text{ м}. \quad (3)$$

$$\lambda_{\min(1)} = \frac{c_2}{\nu_{\max}} = \frac{315}{18 \cdot 10^3} = 1,75 \cdot 10^{-2} \text{ м}. \quad (4)$$

Пример № 67. Сравнить скорости распространения акустических волн в стали и меди, приняв модуль Юнга для стали $E_{Fe} = 216 \text{ ГПа}$, для меди $E_{Cu} = 118 \text{ ГПа}$.

1. Примем величину плотности стали $\rho_{Fe} = 7,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, плотности меди – $\rho_{Cu} = 8,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ и определим скорости звука в заданных металлах

$$c_{\text{Fe}} = \sqrt{\frac{E_{\text{Fe}}}{\rho_{\text{Fe}}}} = \sqrt{\frac{2,16 \cdot 10^{11}}{7,7 \cdot 10^3}} = 5296 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (1)$$

$$c_{\text{Cu}} = \sqrt{\frac{E_{\text{Cu}}}{\rho_{\text{Cu}}}} = \sqrt{\frac{1,18 \cdot 10^{11}}{8,6 \cdot 10^3}} = 3360 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (2)$$

2. Определим отношение скоростей звука в металлах

$$\frac{c_{\text{Fe}}}{c_{\text{Cu}}} = 1,58. \quad (3)$$

Пример № 68. В результате акустических измерений было установлено, что скорость звука в ацетоне равна $c_1 = 1190$ м/с при плотности $\rho_1 = 790$ кг/м³ а в глицерине $c_2 = 1950$ м/с при плотности $\rho_2 = 1260$ кг/м³. В каком соотношении находятся сжимаемости этих жидкостей?

1. Модуль Юнга является величиной, обратно пропорциональной сжимаемости $\beta = 1/E$, с другой стороны

$$E = \rho c^2, \quad (1)$$

откуда

$$\beta = \frac{1}{\rho c^2}. \quad (2)$$

2. Определим далее сжимаемости заданных жидкостей и найдём их отношение

$$\beta_1 = \frac{1}{\rho_1 c_1^2} = \frac{1}{790 \cdot 1190^2} \cong 9 \cdot 10^{-10} \frac{1}{\text{Па}}. \quad (3)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{\rho_2 c_2^2} = \frac{1}{1260 \cdot 1950^2} \cong 2 \cdot 10^{-10} \frac{1}{\text{Па}}. \quad (4)$$

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = 4,5. \quad (5)$$

Пример № 69. Определить разность глубин океана, если в первой точке измерения интервал времени между акустической посылкой и отражённым от дна сигналом составил $\tau_1 = 6$ с, а во второй точке это время было равным $\tau_2 = 1$ с. Принять сжимаемость морской воды равной $\beta = 4,6 \cdot 10^{-10}$ Па⁻¹, плотность $\rho = 1,03 \cdot 10^3$ кг/м³.

1. Определим скорость звуковых волн в морской воде

$$c = \sqrt{\frac{1}{\beta \rho}} = \sqrt{\frac{1}{4,6 \cdot 10^{-10} \cdot 1,03 \cdot 10^3}} = 1450 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (1)$$

2. Разность глубин океана в точках измерения составит

$$2h_1 = c\tau_1; \quad h_1 = \frac{c\tau_1}{2} = \frac{1450 \cdot 6}{2} = 4530 \text{ м}. \quad (2)$$

$$h_2 = \frac{c\tau_2}{2} = \frac{1450 \cdot 1}{2} = 725 \text{ м}, \quad (3)$$

$$\Delta h = h_1 - h_2 = 3805 \text{ м}. \quad (4)$$

Пример № 70. Измерения показали, что среднеквадратичная скорость молекул водяного пара составила $\langle v \rangle = 600$ м/с. Определить скорость распространения акустической волны.

1. Запишем уравнения для среднеквадратичной скорости молекул и скорости звука

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}; \quad c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}. \quad (1)$$

2. Разделим уравнения друг на друга

$$c = \langle v \rangle \sqrt{\frac{\gamma}{3}} = 600 \sqrt{\frac{1,33}{3}} \cong 400 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (2)$$

Пример № 71. Пары ксенона в сферической проекционной лампе находятся при давлении $p = 2 \cdot 10^5 \text{ Па}$ и температуре $T = 500 \text{ К}$. Определить скорость звука в данном состоянии газа. Как изменится результат при заполнении колбы парами ртути?

1. Ксенон является одноатомным газом, молекула которого обладает тремя степенями свободы $i = 3$. молярная масса газа – $\mu_1 = 131,3 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$, показатель адиабаты $\gamma = (i+2)/i = 1,67$.

2. Скорость распространения звука в ксеноне

$$c_{\text{Xe}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu_1}} = \sqrt{\frac{1,67 \cdot 8,3 \cdot 500}{131,3 \cdot 10^{-3}}} = 230 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (1)$$

3. При заполнении колбы парами ртути скорость звука изменится, так как молярная масса ртути $\mu_2 = 200,59 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$

$$c_{\text{Hg}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu_2}} = \sqrt{\frac{1,67 \cdot 8,3 \cdot 500}{200,59 \cdot 10^{-3}}} = 186 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (2)$$

Пример № 72. Известно, что средняя молярная кинетическая энергия поступательного движения молекул атомарного водорода составляет $\langle \epsilon_\mu \rangle = 2 \cdot 10^2 \text{ Дж/моль}$. Определить скорость звука в этом газе.

1. Уравнение средней кинетической энергии поступательного движения молекул даёт основание для определения температуры этого газа

$$\langle \epsilon_\mu \rangle = \frac{3}{2} RT; \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2 \langle \epsilon_\mu \rangle}{3R};$$

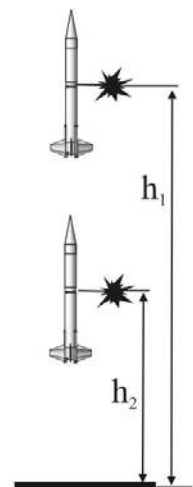
(1)

2. Скорость звука в данном состоянии газа определится уравнением

$$c = \sqrt{\frac{2\gamma \langle \epsilon_\mu \rangle}{3 \cdot \mu}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,67 \cdot 2 \cdot 10^2}{3 \cdot 10^{-3}}} = 472 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (2)$$

(2)

Пример № 73. Измерение температуры разреженного газа, включая верхние слои атмосферы, термометрическими методами невозможно, так как традиционные термометры ввиду малой концентрации молекул приходят в термодинамическое равновесие длительное время. Измерение температуры возможно с помощью вертикально запускаемых ракет, на борту которых имеются звуковые гранаты. Определить температуру на высоте $h = 20 \text{ км}$, если между взрывами гранат на высоте $h_1 = 30 \text{ км}$ и $h_2 = 28 \text{ км}$ зафиксирована задержка прихода регистрируемого на месте старта ракеты звука на $\Delta \tau = 5 \text{ с}$.



1. Скорость акустической волны в газах, наряду с их физическими свойствами, определяется и температурой

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}. \quad (1)$$

2. За фиксируемое время $\Delta\tau$ звуковая волна преодолевает расстояние $\Delta h = h_1 - h_2$, другими словами,

$$\Delta h = c\Delta\tau; \quad c = \frac{h_1 - h_2}{\Delta\tau}. \quad (2)$$

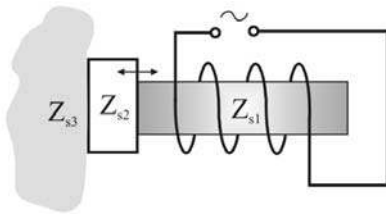
3. Приравняем уравнения (1) и (2)

$$\frac{\gamma RT}{\mu} = \frac{(h_1 - h_2)^2}{\Delta\tau^2}. \quad (3)$$

4. Разрешим уравнение (3) относительно температуры

$$T = \frac{\mu}{\gamma R} \frac{(h_1 - h_2)^2}{\Delta\tau^2} = \frac{29 \cdot 10^{-3}}{1,4 \cdot 8,3} \frac{4 \cdot 10^6}{48} = 207 \text{ К} (-66 \text{ } ^\circ\text{C}). \quad (4)$$

Пример № 74. Для увеличения коэффициента полезного действия ультразвуковых магнитострикционных излучателей, нагружаемых на воду, для их согласования со средой снабжают специальными накладками. Из какого материала следует изготавливать согласующий элемент для никелевого преобразователя, излучающего в воду. Плотность никеля $\rho_1 = 8,75 \text{ г/см}^3$, модуль Юнга – $E_1 = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$, скорость звука в никеле $c = 4785 \text{ м/с}$.



1. Наибольший коэффициент полезного действия излучателя можно получить, когда его удельное акустическое сопротивление Z_{s1} будет равно удельному акустическому сопротивлению среды, в данном случае – воды.

2. Удельное акустическое сопротивление воды равно

$$Z_{s3} = \rho_3 c_3 = 1 \cdot 10^3 \cdot 1500 = 1,5 \cdot 10^6 \text{ кг/м}^2\text{с}. \quad (1)$$

в то время как удельное сопротивление никеля составляет

$$Z_{s1} = \rho_1 c_1 = 8,75 \cdot 10^3 \cdot 4785 = 4,2 \cdot 10^7 \text{ кг/м}^2\text{с}. \quad (2)$$

3. Анализ удельных акустических сопротивлений показывает, что наиболее совместимы с водой накладки из эбонита, плотность которого $\rho_2 = 1,15 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, скорость звука – $c_2 = 1570 \text{ м/с}$. Удельное акустическое сопротивление эбонита

$$Z_{s2} = \rho_2 c_2 = 1,8 \cdot 10^6 \text{ кг/м}^2\text{с}, \quad (3)$$

что не намного отличается от удельного акустического сопротивления воды.

Пример № 75. Интенсивность акустической волна равна $I_1 = 10^{-10} \text{ Вт/м}^2$ и $I_2 = 0,01 \text{ Вт/м}^2$. Определить уровень их интенсивности L_p .

1. Уровень интенсивности (уровень акустической мощности) измеряется в децибелах и определяется уравнением

$$L_p = 10 \lg \left(\frac{I}{I_0} \right), \quad (1)$$

где $I_0 = 1 \cdot 10^{-12} \text{ Вт/м}^2$ – нулевой уровень интенсивности за который принимается порог слышимости среднестатистического органа слуха человека на частоте $\nu = 1 \text{ кГц}$, соответствующее стандартному акустическому давлению $p_0 \cong 2 \cdot 10^{-5} \text{ Па}$.

2. Уровень интенсивности заданных акустических волн на основании уравнения (1) определится следующим образом

$$L_{p(1)} = 10 \lg \left(\frac{10^{-10}}{10^{-12}} \right) = 20 \text{ Дб}. \quad (2)$$

$$L_{P(2)} = 10 \lg \left(\frac{0,01}{10^{-12}} \right) = 100 \text{ Дб} . \quad (3)$$

Пример № 76. Точечный изотропный акустический источник обеспечивает на расстоянии $r_1 = 24 \text{ м}$ уровень интенсивности звука $L_{P(1)} = 32 \text{ дБ}$. Определить уровень интенсивности источника на удалении $r_2 = 16 \text{ м}$.

1. Используя взаимосвязь между интенсивностью и мощностью источника, можно записать следующие соотношения

$$N = 4\pi r_1^2 I; \quad N = 4\pi r_2^2 I, \quad (1)$$

$$I_1 r_1^2 = I_2 r_2^2; \quad \Rightarrow I_2 = I_1 \frac{r_1^2}{r_2^2}. \quad (2)$$

2. Поделим обе части уравнения (2) на величину пороговой интенсивности $I_0 = 1 \cdot 10^{-12} \text{ Вт/м}^2$

$$\frac{I_2}{I_0} = \frac{I_1}{I_0} \frac{r_1^2}{r_2^2}. \quad (3)$$

3. Прологарифмируем уравнение (3) и умножим обе его части на 10

$$10 \lg \frac{I_2}{I_0} = 10 \lg \frac{I_1}{I_0} + 10 \lg \frac{r_1^2}{r_2^2}. \quad (4)$$

4. По условию задачи

$$10 \lg \frac{I_1}{I_0} = L_{P(1)} = 32 \text{ дБ} , \quad (5)$$

следовательно

$$L_{P(2)} = 32 + 10 \lg \frac{r_1^2}{r_2^2} = 32 + 10 \lg \frac{576}{256} = 35,5 \text{ дБ} . \quad (6)$$

Пример № 77. Пройдя через звукоизолирующую конструкцию, акустическая волна уменьшила уровень своей интенсивности на $\Delta L_P = 30 \text{ дБ}$. Во сколько раз при этом уменьшилась интенсивность звука.

1. Условие ослабления акустической волны звукоизолирующей перегородкой математически можно записать следующим образом

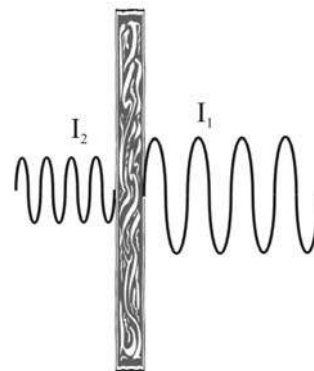
$$10 \lg \frac{I_1}{I_0} - 10 \lg \frac{I_2}{I_0} = \Delta L_P, \quad (1)$$

откуда

$$\lg \frac{I_1}{I_0} - \lg \frac{I_2}{I_0} = \frac{\Delta L_P}{10} = 3. \quad (2)$$

2. Выразим далее из уравнения (2) отношение интенсивностей акустической волны до перегородки и после

$$\frac{I_1}{I_2} = 10^3 = 1000. \quad (3)$$



Пример № 78. Уровень шума от работы одного электродвигателя составил $L_{P(1)} = 60 \text{ дБ}$. Каков будет уровень шума при одновременной работе двух и десяти таких электродвигателей?

1. Определим интенсивность акустического излучения одного электродвигателя

$$L_{P(1)} = 10 \lg \frac{I_1}{I_0} = 60 \text{ дБ}; \quad \lg \frac{I_1}{I_0} = 6; \quad \frac{I_1}{I_0} = 10^6; \quad (1)$$

$$I_1 = I_0 \cdot 10^6; \quad I_1 = 10^6 \cdot 10^{-12} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ Вт/м}^2. \quad (2)$$

2. При работе одновременно двух электродвигателей уровень шума определится из следующих соображений

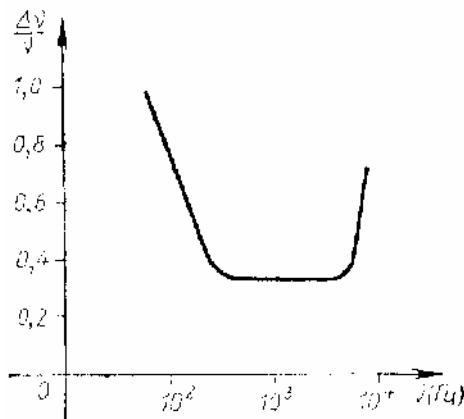
$$I_2 = 10 \lg \frac{I_1 + I_1}{I_0} = 10 \lg \frac{2 \cdot 10^{-6}}{10^{-12}} = 63 \text{ дБ}. \quad (3)$$

3. Если одновременно будут работать десять электродвигателей, то уровень создаваемого ими шума будет составлять

$$I_{10} = 10 \lg \frac{10 I_1}{I_0} = 10 \lg \frac{10^{-5}}{10^{-12}} = 70 \text{ дБ}. \quad (4)$$

Пример № 79. Три источника акустических волн с частотами $\nu_1 = 50 \text{ Гц}$, $\nu_2 = 200 \text{ Гц}$ и $\nu_3 = 1 \text{ кГц}$ в некоторой точке поля создают одинаковый уровень интенсивности $L_{P(1)} = L_{P(2)} = L_{P(3)} = 40 \text{ дБ}$. Найти уровни громкости этих источников.

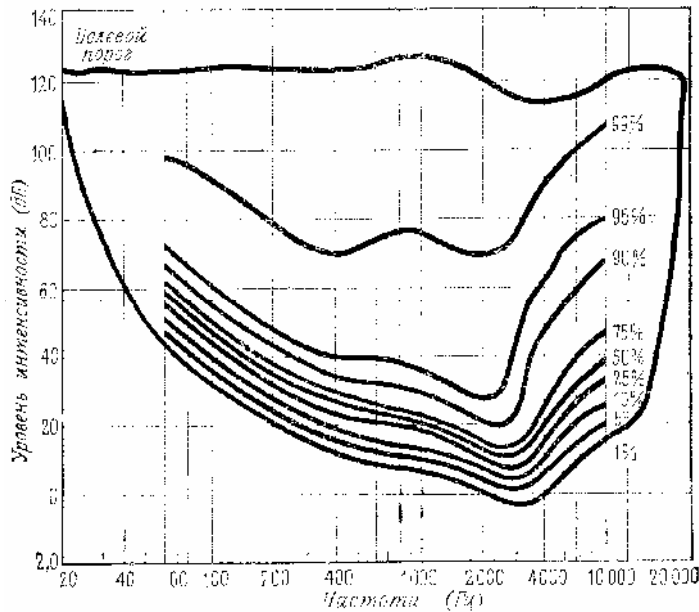
1. Звуковые волны, наряду с объективными параметрами принято характеризовать субъективными параметрами.



Высота тона - это субъективная оценка частоты звука. Чем больше частота, тем выше тон воспринимаемого звука. Однако способность уха различать звуки по их тональности зависит от частоты. На рисунке представлена полученная из опыта кривая зависимости относительного изменения частоты звука $\Delta\nu/\nu$, при котором человек отмечает изменение высоты тона от частоты. При малых и больших частотах изменение частоты звука должно быть значительным, чтобы ухо могло заметить изменение тона. Для частот от 1000 до 600 Гц (область наибольшей остроты уха) это относительное изменение частоты наименьшее ($\Delta\nu/\nu = 0,3$).

Громкость является субъективной оценкой интенсивности звука. Восприятие интенсивности зависит от частоты звука, потому что наш акустический тракт имеет вполне определённую частотную характеристику, и она отнюдь не является линейной. Может оказаться, что звук большей интенсивности одной частоты воспринимаются нами как менее громкий, чем звук малой интенсивности другой частоты.

Опыт показывает, что для каждой частоты в области слышимых звуков ($20 - 20 \cdot 10^3 \text{ Гц}$) имеется так называемый порог слышимости. Это минимальная интенсивность, меньше которой ухо не реагирует на звук. Кроме того, опытом установлено, что для каждой частоты имеется так называемый порог болевых ощущений, т. е. то значение интенсивности звука, которое вызывает боль в ушах. Повышение интенсивности звука выше порога болевых ощущений опасно для уха.



Интенсивность волн акустического диапазона, встречающихся в природе, занимает несколько порядков, даже применительно к динамическому диапазону человеческого слуха. Операции с абсолютными величинами, в этой связи, представляются не очень удобными. Числа получаются либо очень большими, либо очень маленькими. Интенсивность акустических волн удобно оценивать относительными единицами, уровнем интенсивности, измеряемым обычно в децибелах

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0} = 20 \lg \frac{\Delta p}{\Delta p_0}, \quad (1)$$

$$I_0 = 10^{-12} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2};$$

Величина I_0 представляет собой интенсивность порога слышимости на частоте 1000 Гц. Громкость звука, соответствующая этой интенсивности, равна нулю (звук не воспринимается). Единица уровня громкости L называется белом. Обычно громкость звука выражают в децибелах (Дб); эту дольную единицу еще называют фоном (фон): 1 Бел = 10 Дб (фон). Всему диапазону интенсивностей звука, воспринимаемых ухом от порога слышимости до порога болевых ощущений, соответствуют значения громкости от нуля до 130 Дб.

Совокупность точек, отвечающих порогу слышимости, и точек, соответствующих порогу болевых ощущений, образуют на диаграмме уровень интенсивности – частота две кривые. Область, ограниченная этими кривыми, называется областью слышимости. Приведенные кривые иллюстрируют ту наименьшую величину интенсивности звука, которую воспринимает определенный процент обследованных на специальной аудио акустической аппаратуре людей. Кривая соответствующая 1% получена при обследовании слуха профессиональных «слухачей», определяющих на слух качество звуковоспроизводящей аппаратуры.

Такие же показатели слуха имеют гидроакустики на боевых надводных и подводных кораблях. Из диаграммы видно, что наше ухо может воспринимать звуки, различающиеся по интенсивности в 10^{13} раз! Ни один прибор, созданный руками человека, не имеет столь широкого диапазона изменения измеряемой величины. Опыт показывает, что субъективная оценка интенсивности звука – громкость возрастает гораздо медленнее, чем сама интенсивность звука: при возрастании интенсивности звука в геометрической прогрессии громкость возрастает приблизительно в арифметической прогрессии, т. е. линейно. Это обстоятельство тоже делает удобным использование уровня громкости.

2. Возвращаясь к заданным величинам, на основании анализа диаграммы можно видеть, что акустическая волна с частотой $\nu_1 = 50$ Гц будет иметь нулевой уровень громкости $L_{N(1)} = 0$, для волны с частотой колебаний $\nu_2 = 200$ Гц уровень громкости составит $L_{N(2)} = 20$ дБ, для волны с $\nu_3 = 1$ кГц – $L_{N(3)} = 40$ дБ.

Пример № 80. В фиксированной точке пространства две акустические волны отличаются по уровню громкости на четыре фона. Найти отношение интенсивностей этих волн.

1. Уровень громкости в $G = 1$ фон соответствует уровню интенсивности $L_p = 1$ дБ, другими словами, уровень интенсивности анализируемых волн $\Delta L_p = 4$ дБ.

2. Запишем уравнения интенсивностей волн

$$L_{P(1)} = 10 \lg \frac{I_1}{I_0}; \quad L_{P(2)} = 10 \lg \frac{I_2}{I_0}. \quad (1)$$

3. Выразим величину ΔL_P через уравнения (1)

$$\Delta L_P = L_{P(1)} - L_{P(2)} = 10 \left(\lg \frac{I_1}{I_0} - \lg \frac{I_2}{I_0} \right) = 10 \lg \frac{I_1}{I_2}. \quad (2)$$

4. Определим отношение интенсивностей

$$\frac{\Delta L_P}{10} = \lg \frac{I_1}{I_2}; \quad \Rightarrow \quad \frac{I_1}{I_2} = 10^{0,4} = 2,51. \quad (3)$$

Пример № 81. Источник акустических волн в помещении, где он расположен, воспринимается с уровнем громкости $G_1 = 80$ фон, а в соседнем помещении за стеной – с уровнем $G_2 = 60$ фон. Определить отношение интенсивностей волн в смежных помещениях.

1. Воспользовавшись уравнением (2) предыдущей задачи, получим

$$\Delta L_P = L_{P(1)} - L_{P(2)} = 10 \left(\lg \frac{I_1}{I_0} - \lg \frac{I_2}{I_0} \right) = 10 \lg \frac{I_1}{I_2}, \quad (1)$$

$$\Delta L_P = 20 \text{ дБ};$$

$$\frac{\Delta L_P}{10} = \lg \frac{I_1}{I_2}; \quad \Rightarrow \quad \frac{I_1}{I_2} = 10^2 = 100.$$

(2)

Пример № 82. При измерении интенсивности акустического шума в помещении соседним с машинным отделением судна оказалось, что с открытым и закрытым люком результаты отличались в 10^4 раз. На сколько фонов при этом уменьшался уровень громкости?

1. В соответствие с уравнением (2) предыдущей задачи

$$\lg \frac{I_1}{I_2} = 10^4, \quad (1)$$

следовательно, уровень громкости увеличивается на 40 фон.

Пример № 83. Доказать, что для любой бегущей акустической волны справедливо соотношение

$$\frac{dp}{p} = \frac{\dot{\xi}(t)}{c} \gamma, \quad (2)$$

где dp_m/p – относительное изменение давления в среде, $\dot{\xi}_m$ – амплитудное значение колебательной скорости частиц сред, c – скорость звука, $\gamma = c_p/c_v$ – показатель адиабаты.

1. При адиабатическом процессе в газе справедливо соотношение

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho}. \quad (1)$$

2. Обозначив ξ смещение частиц среды в волне, выразим относительное сжатие следующим образом

$$-\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{d\rho}{\rho}. \quad (2)$$

3. Совместим уравнения (1) и (2)

$$\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (3)$$

4. Запишем уравнение смещения частиц среды при прохождении акустической волны

$$\xi(t) = \xi_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right), \quad (4)$$

из которого следует, что

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{2\pi \xi_m}{\lambda} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right). \quad (5)$$

5. Колебательная скорость рассматриваемой частицы определится как

$$\dot{\xi}(t) = \frac{\partial \xi(t)}{\partial t} = \xi_m \omega \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right), \quad (6)$$

откуда

$$\frac{\dot{\xi}(t)}{c} = \frac{\xi_m \omega}{c} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right), \quad (7)$$

но $\omega/c = k = 2\pi/\lambda$, что даёт основание переписать уравнение (7) следующим образом

$$\frac{\dot{\xi}(t)}{c} = \frac{2\pi \xi_m}{\lambda} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right). \quad (8)$$

6. Поскольку

$$\frac{2\pi \xi_m}{\lambda} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = -\frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad (9)$$

то

$$\frac{\dot{\xi}(t)}{c} \gamma = \frac{dp}{p}. \quad (10)$$

17. Электромагнитные колебания

17.1. Вводные замечания

Удивительной особенностью колебательных и волновых процессов является универсальность их свойств. Периодические события, протекающие в физике, химии, биологии, геологии и в других отраслях знаний, даже в социологии и политологии, несмотря на несопоставимые, на первый взгляд параметры, обладают общим свойством повторяемости. Некоторые характеристики процессов неоднократно принимают прежние значения, или значения, уменьшающиеся или увеличивающиеся по определённому закону через определённые промежутки времени. Эта общность позволяет использовать единые физико-математические подходы при анализе колебательных и волновых процессов, казалось бы, совершенно не совместимых по своей сути. Дело в том, что колебание скрипичной струны, математического маятника, крыла самолёта и процессы в электрическом колебательном контуре имеют единую «идеологическую» основу и могут быть описаны сходными по структуре уравнениями. Распространение упругих и электромагнитных колебаний имеют, несомненно, существенные отличия, но вместе с тем, структура и свойства волнового уравнения сохраняются.

Напомним, что в электрических цепях с постоянной силой тока распределение электрических величин во времени стационарно. Электромагнитное поле в этом случае состоит из электростатического поля неподвижных зарядов и магнитного поля постоянного тока, причём эти поля существуют автономно друг от друга.

При изменении одного из электрических параметров на некотором участке цепи, «сведения» об этом событии достигнут остальных элементов за достаточно малое время τ , которое определяется как

$$\tau = \frac{L}{c} \ll T, \quad (17.1)$$

где L – расстояния между наиболее удалённых точек цепи, $c \cong 3 \cdot 10^8$ м/с скорость распространения электромагнитного сигнала, которая принимается равной скорости света, T – период колебаний. При скорости процессов изменения состояния цепи меньшей скорости распространения электромагнитного возмущения c , каковым является свет, процессы называются **квазистационарными**. Поскольку скорость света несоизмеримо велика по сравнению со скоростью упругих волн, то изменение состояний в электрических цепях тоже будет протекать гораздо быстрее, нежели в системах с упругими элементами. Так, например, для цепи с $L = 3$ м, запаздывание $\tau \cong 10^{-8}$ с, т.е. для колебательных процессов до $T \cong 10^{-6}$ с (что соответствует частоте $\nu \cong 10^6$ Гц) изменение токов можно считать квазистационарными. Для токов промышленной частоты $\nu = 50$ Гц, сила тока квазистационарна до $L \cong 100$ км. Для квазистационарных токов справедлив закон Ома и правила Кирхгофа.

Квазистационарные процессы протекают, например, в цепи постоянного тока, содержащей активное сопротивление R и электрическую ёмкость C (рис. 17.1), т.е. схема для зарядки конденсатора.

Если переключатель поставить в положение 1, то конденсатор C начнёт заряжаться от источника тока с ЭДС, равной ε через сопротивление цепи R , включающее и внутреннее сопротивление источника.

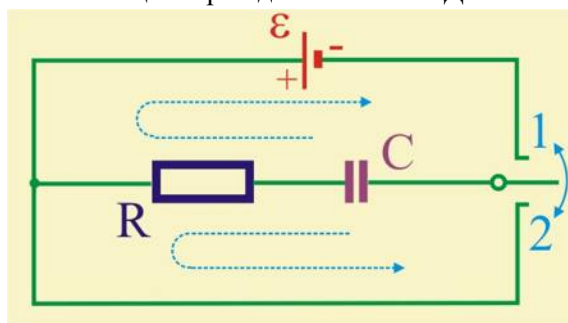


Рис. 17.1. Цепь для зарядки конденсатора

Начиная с момента времени, соответствующего замыканию переключателя в цепи возникнет электрический ток, зависящий от времени $i(t)$, переносящий положительный заряд на левую пластину конденсатора $q(t)$. Падение напряжения на конденсаторе, с одной стороны, можно представить как разность между ЭДС источника и напряжением на нагрузке, с другой стороны, как отношение доставленного заряда к величине ёмкости конденсатора

$$\varepsilon - iR = \frac{q}{C}, \quad (17.2)$$

где $q/C = u_C$ – падение напряжения на конденсаторе.

Рассматривая процесс зарядки конденсатора с позиций закона сохранения заряда, изменение заряда на конденсаторе может протекать только при наличии тока i , поэтому

$$i = \frac{dq}{dt}. \quad (17.3)$$

Совместим два последних уравнения

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon, \quad (17.4)$$

но

$$\frac{dq}{dt} = i, \quad \frac{q}{C} = u_C,$$

тогда

$$u_C = \varepsilon - Ri, \quad (17.5)$$

где i – мгновенное значение силы тока, u_C – падение напряжения на конденсаторе. С другой стороны,

$$\frac{q}{C} = \varepsilon - \frac{dq}{dt} R, \Rightarrow R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon. \quad (17.6)$$

Преобразуем (17.6) к виду более удобному для интегрирования

$$\begin{aligned} \frac{RCdq}{dt} &= \varepsilon C - q, & \frac{dq}{q - C\varepsilon} &= -\frac{dt}{RC}, \\ \int \frac{dq}{q - C\varepsilon} &= -\int \frac{dt}{RC}, & \ln(q - C\varepsilon) &= -\frac{t}{RC} + K, \end{aligned} \quad (17.7)$$

где K – произвольная постоянная интегрирования.

Определим K по начальным условиям, т.е. при $t = 0, q = 0$

$$\ln(-C\varepsilon) = K, \quad (17.8)$$

и подставим значение K из (17.8) в уравнение (17.7)

$$\ln(q - C\varepsilon) - \ln(-C\varepsilon) = -\frac{t}{RC},$$

или, после преобразования

$$\ln\left(1 - \frac{q}{C\varepsilon}\right) = -\frac{t}{RC}.$$

Избавимся далее от логарифма в левой части

$$1 - \frac{q}{C\varepsilon} = \exp\left(-\frac{t}{RC}\right),$$

и решим полученное уравнение относительно искомой величины – заряда конденсатора

$$q(t) = C\varepsilon \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right). \quad (17.9)$$

Получим зависимость зарядного тока в функции времени, для чего достаточно продифференцировать по времени уравнение (17.9)

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (17.10)$$

Изменение напряжения на конденсаторе будет протекать в соответствии с уравнением

$$U(t) = \frac{q(t)}{C} = \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right). \quad (17.11)$$

Величина $RC = \tau [Ом \cdot Ф \equiv (В/А) \cdot (Кл/В) \equiv Кл/(Кл/с) \equiv с]$ – называется постоянной времени. Постоянная времени характеризует промежуток времени, за который заряд на конденсаторе достигает $(1 - e^{-1})$ или 63% своего максимального значения, т.е. $0,63C\varepsilon$. **Значение τ , таким образом, характеризует скорость зарядки конденсатора.**

Из (17.11) следует, что заряд может достичь своего максимального значения $Q = C\varepsilon$, только через бесконечно большое время. Рассмотрим динамические особенности процесса на конкретном примере.

Пусть цепь составлена из последовательного соединения конденсатора ёмкостью $C = 2$ мкФ, резистора сопротивлением $R = 1,5$ кОм, и источника тока с ЭДС $\varepsilon = 12$ В. Определим постоянную времени и установить зависимость заряда и напряжения на конденсаторе от времени.

1. Определим постоянную времени заданной цепи

$$\tau = RC = 1,5 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

2. Максимальная величина заряда конденсатора определится из соотношения

$$Q_{\max} = C\varepsilon = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 12 = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ Кл} \equiv 25 \text{ мкКл.}$$

3. Определим зависимость заряда, напряжения и зарядного тока от времени, воспользовавшись, записанными выше уравнениями

$$Q(t) = 2,4 \cdot 10^{-5} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right),$$

$$i(t) = 8 \cdot 10^{-3} \left(e^{-\frac{t}{\tau}} \right),$$

$$U(t) = 12 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right),$$

4. Представим расчетные данные для заряда конденсатора и протекающего по нему тока в виде соответствующих графиков (рис. 17.2). **Как и следовало ожидать, кривые имеют экспоненциальный вид, т.е. заряд конденсатора и сила тока асимптотически приближаются к своим экстремальным значениям.**

Если заряженный конденсатор отсоединить от источника, т.е. перевести переключатель в положение 2 и замкнуть на сопротивление, то, описанные выше процессы, начнут протекать в обратной последовательности. Уравнение (17.6) переписется при условии $\varepsilon = 0$

$$\frac{dq}{dt} R + \frac{Q}{C} = 0. \quad (17.12)$$

Решение этого уравнения для заряда и силы тока будут иметь вид

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (17.13)$$

$$q(t) = q_{\max} e^{-\frac{t}{RC}}, \quad (17.14)$$

т.е. сила тока в цепи и заряд конденсатора

убывают во времени по экспоненциальному закону, с той же постоянной времени.

При подаче питания на схему, изображённую на рис 17.3 в цепи величина тока будет увеличиваться от нулевого значения до номинала в течение некоторого промежутка времени вследствие явления самоиндукции. Возникающие экстратоки в соответствии с правилом Ленца всегда направлены противоположно, т.е. они препятствуют вызывающей их причине. Они препятствуют увеличению тока в цепи.

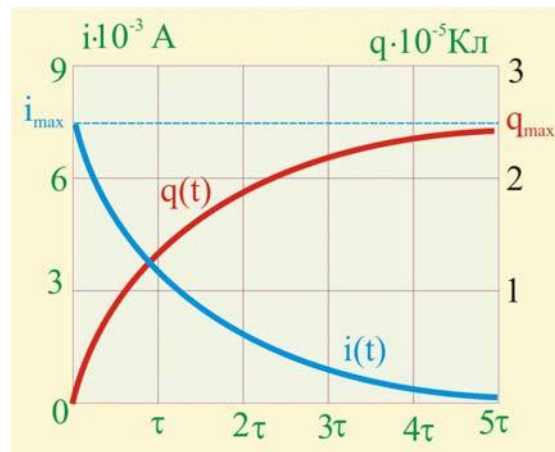


Рис. 17.2. Зависимость от времени заряда конденсатора

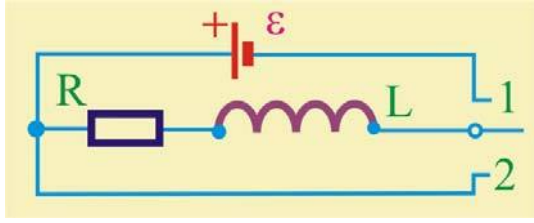


Рис. 17.3. Токи замыкания и размыкания

При подключении коммутатора в положение 1 экстра-токи станут препятствовать увеличению тока в цепи, а в положении 2, наоборот, экстра-токи будут замедлять уменьшение основного тока. Будем считать для простоты анализа, что включённое в цепь сопротивление R характеризует сопротивление цепи, внутреннее сопротивление источника и активное сопротивление катушки L . Закон Ома в этом случае примет вид

$$\varepsilon + \varepsilon_{si} = iR, \quad (17.15)$$

где ε – ЭДС источника, ε_{si} – ЭДС самоиндукции, i – мгновенное значение величины тока, который является функцией времени. Подставим в закон Ома уравнение ЭДС самоиндукции

$$L \frac{di}{dt} + iR = \varepsilon. \quad (17.16)$$

Разделим в уравнении (17.16) переменные

$$L di = (\varepsilon - iR) dt, \quad \frac{Li}{(\varepsilon - iR)} = dt, \quad (17.17)$$

и проинтегрируем, считая L постоянной величиной

$$L \int \frac{di}{\varepsilon - iR} = \int dt, \quad \frac{L}{R} \ln(\varepsilon - iR) = t + \text{const}. \quad (17.18)$$

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения (17.16) можно представить в виде

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} - \text{const} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (17.19)$$

Постоянную интегрирования определим из начальных условий. При $t=0$ в момент подачи питания ток в цепи равен нулю $i(t) = 0$. Подставляя нулевое значение тока в уравнение (17.19), получим

$$\text{const} = \frac{\varepsilon}{R}. \quad (17.20)$$

Решение уравнения (17.19) примет вид

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{L}{R}t} \right). \quad (17.21)$$

Отметим, что между механическими и электрическими колебаниями существует глубокая взаимосвязь, хотя бы по представлению энергетики колебательных процессов. Так, например, кинетическая энергия массы m , движущейся прямолинейно со скоростью v , определяется известным уравнением, следующим из второго закона Ньютона

$$K = \frac{mv^2}{2}, \quad (17.22)$$

а электростатическая энергия конденсатора и энергия магнитного поля, концентрирующего в индуктивности, определяются как

$$W_E = \frac{Cu^2}{2}, \quad (17.23)$$

$$W_B = \frac{Li^2}{2}. \quad (17.24)$$

17.2. Вынужденные электрические колебания

Параметры и особенности протекания собственных незатухающих колебаний в LC-контуре и собственные затухающие колебания в RLC-контуре были обсуждены в подразделах 1.10 и 2.2, соответственно. Рассмотрим последовательное соединение RLC с источником переменной ЭДС (рис. 17.4), которая обеспечивает периодическое поступление в контур энергии. Пусть переменное напряжение питания контура описывается уравнением

$$u = u_m \cos \Omega t. \quad (17.25)$$

Запишем далее закон Ома для этой цепи

$$iR = -\frac{q}{C} - L \frac{di}{dt} + u_m \cos \Omega t. \quad (17.26)$$

Отметим, что

$$i = \frac{dq}{dt}; \quad \frac{di}{dt} = \frac{d^2 q}{dt^2}, \quad (17.27)$$

что позволяет закон Ома переписать следующим образом

$$\frac{dq}{dt} R + \frac{q}{C} + L \frac{d^2 q}{dt^2} = u_m \cos \Omega t. \quad (17.28)$$

Поделим последнее уравнение на величину индуктивности L

$$\dot{q} \frac{R}{L} + \frac{q}{LC} + \ddot{q} = \frac{u_m}{L} \cos \Omega t, \quad (17.29)$$

и введём следующие обозначения

$$\frac{R}{L} = 2\beta; \quad \sqrt{\frac{1}{LC}} = \omega_0, \quad (17.30)$$

и подставим их в уравнение (17.29)

$$\ddot{q} + 2\beta \dot{q} + \omega_0^2 q = U \cos \Omega t. \quad (17.31)$$

Как нетрудно видеть мы пришли к дифференциальному уравнению, аналогичному уравнению (3.5)

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t,$$

по аналогии, с которым решение уравнения (17.31) можно представить следующим образом

$$q = q_m \cos(\Omega t - \psi), \quad (17.32)$$

где

$$q_m = \frac{U}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}, \quad (17.33)$$

$$\psi = \arctg \frac{2\beta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (17.34)$$

Силу тока в рассматриваемой цепи определим, продифференцировав уравнение (17.33) по времени

$$i = \frac{dq}{dt} = -\Omega q_m \sin(\Omega t - \psi) = i_m \cos\left(\Omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right), \quad (17.34)$$

где

$$i_m = \Omega q_m = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left[\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right]^2}}. \quad (17.35)$$

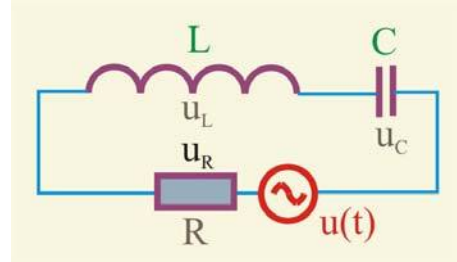


Рис. 17.4. Последовательный RLC-колебательный контур

Перепишем исходное уравнение закона Ома (17.26) в виде суммы падений напряжений на отдельных элементах рассматриваемой схемы

$$u_R + u_L + u_C = u_m \cos \Omega t, \quad (17.36)$$

т.е. сумма падений напряжений на активном сопротивлении, индуктивности и ёмкости в каждый момент времени равна внешнему напряжению. Определим далее величины напряжений на каждом их элементов

$$u_R = Ri_m \cos(\Omega t - \varphi). \quad (17.37)$$

Разделив уравнение (17.32) на величину ёмкости C получим падение напряжения на конденсаторе

$$u_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\Omega t - \psi) = u_{Cm} \cos\left(\Omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right). \quad (17.38)$$

Амплитудное значение падения напряжения на конденсаторе из уравнения (17.35) определится следующим соотношением

$$u_{Cm} = \frac{q_m}{C} = \frac{U}{\Omega C \sqrt{R^2 + \left[\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right]^2}} = \frac{i_m}{\Omega C}. \quad (17.39)$$

Напряжение на индуктивности определится как

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -\Omega Li_m \sin(\Omega t - \varphi) = u_{Lm} \cos\left(\Omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \quad (17.40)$$

при этом

$$u_{Lm} = i_m \Omega L. \quad (17.41)$$

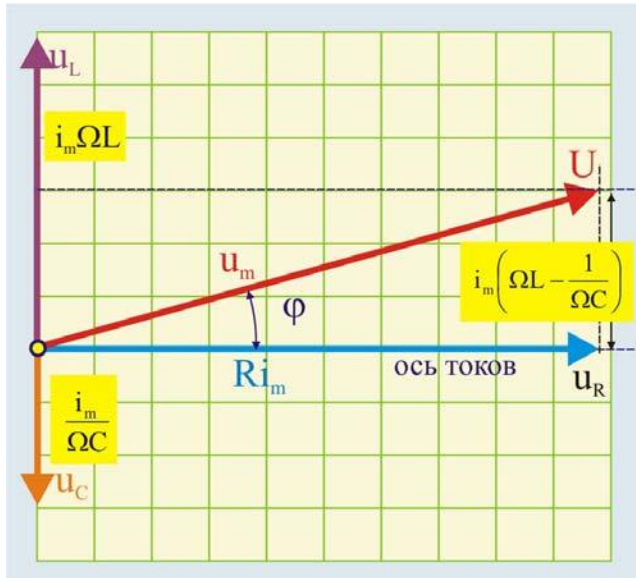


Рис. 17.5. Векторная диаграмма

Из полученных уравнений видно, что напряжение на ёмкости отстает от тока по фазе на $\pi/2$, в то время как напряжение на индуктивности опережает тока на $\pi/2$. Напряжение на активном сопротивлении находится в фазе с током, что подчеркивает линейность этого элемента цепи. Если колебания изобразить в виде вращающихся векторов, то в некоторый момент времени получится диаграмма, приведенная на рис. 17.5. В соответствии с уравнением (17.36) сумма падений напряжения на активном сопротивлении, индуктивности и ёмкости должна быть равна приложенному напряжению u (17.25)

Явление резонанса напряжения, так же как и в механических колебаниях сопровождается максимальным значе-

нием, например заряда и напряжения на конденсаторе

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \leq \omega_0. \quad (17.42)$$

Явление резонанса характеризуется превышением напряжения на конденсаторе амплитудного значения напряжения, подводимого к контуру от внешнего переменного источника. Характерной величиной в этом случае является величина добротности контура, определяемая уравнением

$$Q = \frac{u_{Cr}}{U} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{\sqrt{LC}}{CR} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (17.43)$$

Добротность контура помимо прочего определяет остроту резонансных кривых

На рис. 17.6 приведена зависимость амплитудного значения напряжения на конденсаторе u_{Cm} в зависимости от частоты Ω возбуждающего напряжения. В случае наличия потерь на активном сопротивлении и на собственном омическом сопротивлении индуктивности резонансная частота определяется уравнением, аналогичным (3.14)

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (17.44)$$

Уравнению резонансной частоты возбуждения контура можно придать иной вид, если воспользоваться соотношениями (17.30), т.е. подставить в уравнение (17.44) значения ω_0 и β

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}. \quad (17.45)$$

Как видно, резонансные кривые имеют общую точку, когда $u_{Cm} = U$, что соответствует напряжению, появляющемуся на обкладках конденсатора при его подключении к источнику постоянного напряжения величины U . Максимум u_{Cm} получается острее и тем большим, чем меньше отношение

$$\beta = \frac{R}{2L}, \quad (17.46)$$

Чтобы добиться наилучших резонансных свойств контура, необходимо уменьшать активное сопротивление и увеличивать ёмкость.

Нормированные резонансные кривые для силы тока приведены на рис. 17.7, они получены при реализации уравнения (17.35). Эта зависимость аналогична кривой зависимости скорости от частоты механической возбуждающей силы при упругих колебаниях. Амплитудное значение силы тока, как это следует из уравнения (17.35) имеет место при условии

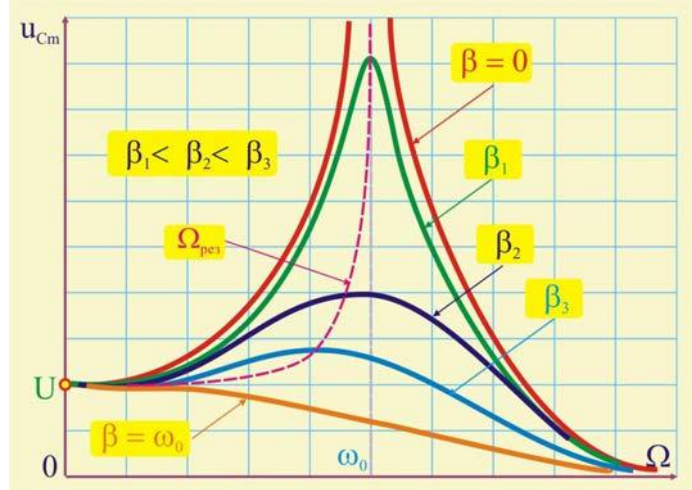


Рис. 17.6. Резонансные кривые

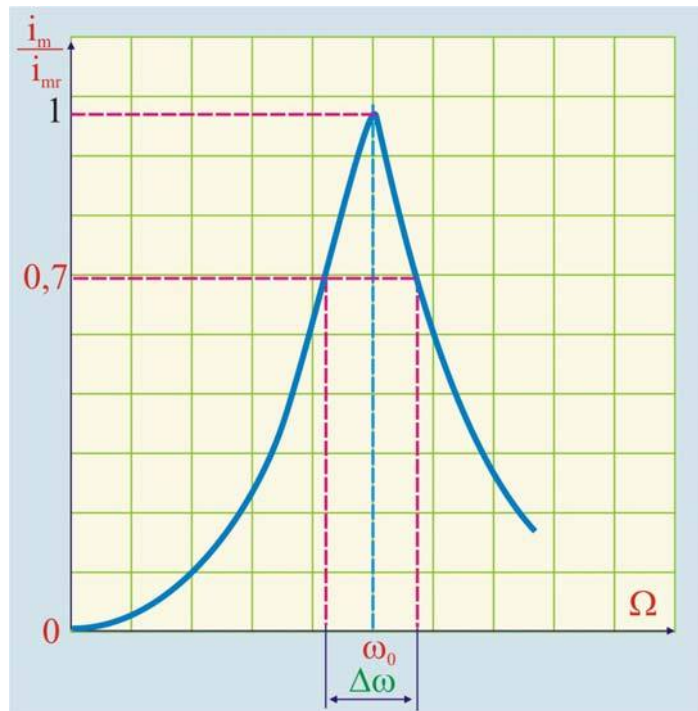


Рис. 17.7. Резонансная кривая тока

Эта зависимость аналогична кривой зависимости скорости от частоты механической возбуждающей силы при упругих колебаниях. Амплитудное значение силы тока, как это следует из уравнения (17.35) имеет место при условии

$$\Omega L - \frac{1}{\Omega C} = 0, \quad (17.47)$$

Резонансная частота для силы тока совпадает с частотой собственных колебаний, определяемая уравнением (17.30)

$$\Omega_{\text{рез}} = \omega_0 \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (17.48)$$

Прохождение резонансной кривой тока через нуль свидетельствует о том, что при $\Omega = 0$, т.е. случай постоянного тока, цепь разрывается конденсатором.

17.3. Цепи переменного тока

Полученные выше соотношения позволяют рассматривать последовательный RLC- контур, как цепь, по которой протекает переменный во времени ток, изменяющийся по гармоническому закону. Возникновение переменного тока обусловлено подводимым к контуру переменным напряжением

$$u = u_m \cos \omega t. \quad (17.49)$$

Для тока в этом случае справедливо уравнение

$$i = i_m \cos(\omega t - \varphi), \quad (17.50)$$

при этом амплитудное значение силы тока определяется уравнением

$$i_m = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left[\Omega L - \frac{1}{\Omega C} \right]^2}}, \quad (17.51)$$

где $X_L = \Omega L$ – реактивное сопротивление переменному току катушки индуктивности, $X_C = 1/\Omega C$ – реактивное сопротивление переменному току электрической ёмкости. Ток отстаёт по фазе от напряжения на угол φ , который зависит от параметров цепи

$$\varphi = \arctg \frac{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}{R}. \quad (17.52)$$

Знаменатель уравнения (17.51) представляет собой полное электрическое сопротивление контура переменному току, которое называется импедансом

$$Z = \sqrt{R^2 + [X_L - X_C]^2}. \quad (17.53)$$

Реактивная составляющая сопротивлений RLC-контура равная $X = X_L - X_C$, и его активное сопротивление определяют, в конечном счёте, сдвиг фаз между током и напряжением

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R}. \quad (17.54)$$

Мощность в цепи переменного тока определяется произведением мгновенных значений тока и напряжения

$$N(t) = u(t) \cdot i(t) = u_m \cos \Omega t i_m \cos(\Omega t - \varphi). \quad (17.55)$$

Воспользовавшись тригонометрической формулой

$$\cos \alpha \cos \beta = 0,5 \cos(\alpha - \beta) + 0,5 \cos(\alpha + \beta),$$

перепишем уравнение мощности

$$N(t) = \frac{1}{2} u_m i_m \cos \varphi + \frac{1}{2} u_m i_m \cos(2\Omega t - \varphi). \quad (17.56)$$

Определим среднее за период значение мощности, с учётом того, что $\langle \cos(2\Omega t - \varphi) \rangle = 0$

$$\langle N \rangle = \frac{u_m i_m}{2} \cos \varphi = \frac{R}{Z}. \quad (17.57)$$

Воспользовавшись законом Ома, получим для средней мощности

$$\langle N \rangle = \frac{R i_m^2}{2}, \quad (17.58)$$

что эквивалентно мощности постоянного тока силой $I = i_m / \sqrt{2}$ и напряжением $U = u_m / \sqrt{2}$, тогда среднюю мощность через действующие значения силы тока и напряжения можно записать так

$$\langle N \rangle = UI \cos \varphi. \quad (17.59)$$

18. Электромагнитные волны

18. 1. Электродинамика Максвелла – Герца – Хевисайда

Перед рассмотрением особенностей электромагнитных волн, целесообразно привести некоторые сведения из электродинамики, потому что возникновение, излучение и распространение электромагнитных волн определяются процессами преобразования энергии электрического поля в магнитную энергию и наоборот.

Уравнения Максвелла, модифицированные Герцем на основании математического аппарата, предложенного Хевисайдом, сыграли огромную роль не только в электродинамике, но и во всей современной физике. К окончанию XIX века уже было установлена непрерывность пространства, было ясно, что в каждой точке любая физическая величина имеет вполне определённое значение, причём переход от точки к точке носит непрерывный и плавный характер. **Понятие эфира постепенно вытеснялся прагматичным понятием поля.**

Образом поля в различных отделах физики, в принципе, начали пользоваться со второй половины XIX века. Например, при объяснении явлений электрического и магнитного свойства. Настоятельная необходимость введения понятия поля появилась после того, как датский физик Ханс Кристиан Эрстед (1777 – 1851), можно сказать, случайно в 1820 г., поместил магнитную стрелку около проводника с током и обнаружил, к своему великому удивлению, что стрелка перестала реагировать на магнитное поле Земли, а «переключилась» на проводник. Хотя, согласитесь, именно такими «случайностями» озарён весь путь научного познания окружающего мира. В этом же 1820 г. Ампер разработал теорию связи электричества и магнетизма, используя понятие поля. В 1840 г. Майкл Фарадей в своих лекциях говорил о попытках «открыть прямую связь между светом и электричеством».

Такую связь Фарадей установил, наблюдая на опыте вращение плоскости поляризации в магнитном поле. Фарадей (1791 – 1867) на основе экспериментальных исследований сформулировал идеи поля как новой формы материи, введя понятие силовых линий.

Эстафету формирования законов электромагнитного поля продолжил Джеймс Клерк Максвелл (1831 – 1897), записав идеи Фарадея в виде уравнений. **Революционное значение уравнений Максвелла состояло в том, что они предсказывали существование электромагнитных волн, которые были обнаружены опытным путём в 1888 г. Генрихом Герцем. Анализируя уравнения, Максвелл обнаружил, что взаимосвязанные изменения электрических и магнитных полей, в конечном счете, должны были приводить к появлению волны даже в абсолютно пустом пространстве.**

Эта идея была настолько нетрадиционна, что противников у неё было гораздо больше, нежели сторонников, как среди учёных академического толка, так и среди инженеров. Дело в том, что понятие волн в то время обязательно связывалось с наличием среды, в которой волны распространяются.

Житейские наблюдения говорили о том же: волны на поверхности жидкости, волны на полях, засеянных злаками, упругие волны в газах, жидкостях и твёрдых телах и т.д. возникали на основе распространения в среде колебаний. Когда же со средой возникали трудности и недоразумения её заполняли разного рода эфирами, обладающими свойствами, необходимыми для существования данной теории. А волна в пустом пространстве, помимо всех прочих странностей, ещё и не должна затухать, тут явно пахло нарушением законов сохранения в механическом их толковании.

Работая над своими уравнениями Максвелл не подозревал, что в Королевском научном обществе хранится с 1832 г. запечатанный конверт, который велено было открыть и сделать достоянием общества через 106 лет (!?). Текст послания, составленного загадочным Майк-

лом Фарадеем и зачитанным только в 1938 г. потряс до возможного предела сдержанных английских учёных и их зарубежных коллег. Фарадей завещал: «Я пришёл к заключению, что на распространение магнитного воздействия требуется время, которое, очевидно, окажется весьма незначительным. Я полагаю, что электромагнитная индукция распространяется точно таким же образом. Я полагаю, что распространение магнитных сил от магнитного полюса похоже на колебания взволнованной водной поверхности. По аналогии я считаю возможным применить теорию колебаний к распространению электромагнитной индукции. В настоящее время, насколько это мне известно, никто из учёных не имеет подобных взглядов».

Конверт был запечатан Майклом Фарадеем, когда Максвеллу был всего год от роду. Сейчас трудно представить себе причины, по которым Фарадей не опубликовал столь гениальную догадку. Толи боязнь быть не понятым, а возможно осознание преждевременности своей идеи. Ясно одно, со сроками созревания научной мысли Фарадей явно просчитался. Потребовалось существенно менее 100 лет, чтобы удалось увидеть в электричестве и магнетизме объединяющее начало, и, как следствие этого, появление особого рода волн.

Несмотря на то, что мы постоянно упоминали Максвелла, приведенная ниже форма записи уравнений принадлежит не ему. Практически все учебники повторяют уравнения, записанные Генрихом Герцем, на основании математического аппарата, предложенного Хевисайдом. Максвелл все свои теоретические взгляды на электромагнитные явления обобщил в виде системы из двадцати уравнений, а Герц, в процессе их осмысления нашёл способ свести всю теорию к четырём уравнениям.

С позиций профессионалов, формально, полученная система уравнений достаточно проста, однако в процессе её применения открывался всё больший и больший их внутренний смысл. Генрих Герц, которому выпала историческая роль доказательства справедливости уравнений в одной из своих публикаций записал: «Нельзя изучать эту удивительную теорию, не испытывая по временам такого чувства, будто математические формулы живут собственной жизнью, обладают собственным разумом – кажется, что эти формулы умнее нас, умнее даже самого автора, как будто они дают нам больше, чем в своё время в них было заложено».

Работая в команде Гельмгольца, Герц имел все возможности проявить себя. К великому сожалению, судьба определила Герцу светлую голову и никудышнее здоровье. Он родился, как в прочем и многие гении (Ньютон, Кеплер, Декарт и др.) очень слабым. Врачи без оптимизма оценивали его дальнейшие перспективы пребывания на этом Свете. Болезни буквально преследовали Герца от самого рождения и до безвременной кончины в возрасте всего 37 лет. У него болели глаза, уши, зубы. Чтобы окончательно убедить себя в невозможности распространяться какой бы то ни было субстанции в пустоте, Гельмгольц поручает Генриху Герцу спланировать и провести серию экспериментов.

Начинающему двадцатилетнему учёному с ещё не окрепшими научными взглядами и представлениями была поручена миссия экспериментального опровержения сэра Максвелла. Авторитет Гельмгольца был настолько велик, что у Герца по началу и в мыслях даже не было объективно во всём разобраться. Однако чем больше Герц ставил экспериментов, тем радикальнее опровергалась теория дального действия и находила подтверждение там, где совпадала с представлениями опровергаемого англичанина. А признавать универсальность максвелловской теории ой как не хотелось. Во-первых, потому что теория родом из Англии, которая, как известно для немцев совсем даже не указ. Во-вторых, если признать правоту Максвелла, то нужно было, мягко говоря, переоценить значимость немецких электродинамиков, таких как Нейман, Вебер и др.

Высказывание Герца о «самостоятельной жизни уравнений» начали подтверждаться сразу после первых попыток их применения. О самостоятельности уравнений говорили немногие учёные, в основном их поминали совсем недобрыми словами, ввиду непонимания многих, связанных с ними нюансов. Один из основных нюансов, который был особо неудобоварим авторитетами, связан с наличием в уравнениях некой загадочной константы с неясным физическим смыслом

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{\operatorname{const}} \vec{j} + \frac{1}{\operatorname{const}} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

где $\vec{j}$ – плотность тока, $\vec{H}$ – вектор напряжённости магнитного поля, $\vec{D}$ – вектор напряжённости электрического поля (электрическое смещение). Все эти величины были известные и объясняемые, а вот const в последнем уравнении – это было нечто. Беспокойство классиков было оправданным. Дело в том, что появление в уравнениях физики новых постоянных величин, как правило, носило революционно-фундаментальный характер. Так произошло и на этот раз, константа оказалась более чем фундаментальной.

Выяснилось, что в уравнениях «зашифрована» скорость света, которая к моменту появления уравнений была уже измерена экспериментально. Дело в том, что комбинация достаточно хорошо известных постоянных величин, входящих в систему уравнений

$$\sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} \cong \sqrt{\frac{1}{9 \cdot 10^{-12} \cdot 12,56 \cdot 10^{-7}}} \cong 2,99874109 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}},$$

совпала с высокой степенью точности с измеренным значением скорости света. Совпадение было настолько разительным, что его трудно было отнести к случайности, если даже очень сильно захотеть.

До этого даже мысли ни у кого из учёных не возникало, что световые волны имеют какое-то отношение к электродинамике. Оптика, хоть и волновая никак не связывалась с электромагнитными забавами Максвелла и Хевисайда.

Проведя анализ уравнений с позиций закона сохранения энергии, Максвелл пришёл к совершенно фантастическому по тем временам выводу. Уравнения не удовлетворяли закону. Процесс преобразования переменного электрического поля в магнитное поле должен сопровождаться образованием волн, которые и уносят часть энергии, первоначально запасённой в рассматриваемом контуре. Мало того, по Максвеллу, для распространения этих волновых процессов совершенно не требовалась среда, они могли путешествовать в пустоте. Сейчас можно только представить, как эта идея подействовала на учёный мир, полагавший, кстати, не без оснований на то, что распространения волны обязательно должно быть связано с теми или иными деформациями среды. В этом плане уравнения Максвелла были просто опасны для всего, что было написано по электродинамике до того, так как они не оставляли камня на камне в электродинамических замках, построенных не одним поколением добросовестных и талантливых учёных. Но очевидно именно в этом и состоит суть прогресса, когда на смену, казалось бы, безупречным причёсанным временем теориям, приходят, кажущиеся по началу несуразными, новые воззрения и напористо занимают своё место под Солнцем. Так случилось и с системой уравнений Максвелла.

В предсказании электромагнитных волн Максвелл на много обогнал своё время, но он тоже не был первым, кому пришла эта идея.

Максвелл, по остроумному выражению Роберта Милликена: «...Облек плебейски облажённые представления Фарадея в аристократические одежды математики».

Умер Максвелл от рака, не дожив до пятидесятилетия двух лет. Век гениев короток, так уж распоряжается судьба. Он не дожид до триумфального шествия своей теории по лабораториям, конструкторским бюро, цехам производств и страницам университетских и школьных учебников.

Два человека, следуя идеям и принципам Максвелла, после его смерти пытались разработать такую же всеобъемлющую теорию гравитационного поля. Этими людьми были Хевисайд (1850 – 1920) и Эйнштейн (1879 – 1955), они пытались объединить электромагнетизм и гравитацию в виде единой теории поля. Как известно, Эйнштейну это не удалось. Что касается Хевисайда, имя которого странным образом замалчивалось официальной наукой, то, похоже, он продвинулся дальше Эйнштейна. После его смерти в 1925 г. рукописи, посвящённые этой задаче, были таинственным образом похищены и не обнаружены до настоящего времени. Но, в оставшихся неопубликованных рукописях, была найдена знаменитая формула $E = mc^2$, которая была записана за 15 лет до Эйнштейна!? Значит, размышлял-таки Хевисайд о возможности непосредственного преобразования массы в энергию, о взаимосвя-

зи инертных и электромагнитных свойств Мира в материальном и полевом состоянии. Очень странная история.....

О Хевисайде теперь пишут незаслуженно мало. Приведём далее статью Александра Семёнова «Забытый пророк», которая, на наш взгляд, достаточно объективно отражает заслуги непризнанного гения.

«Оливер Хевисайд пользовался большим уважением среди ученых своего времени, но сейчас его имя почти забыто. Вряд ли кто-то сможет объяснить почему. Предложенные Хевисайдом методы оказались очень эффективными, и авторы учебников стали широко использовать их для объяснения фундаментальных теорий, придуманных другими исследователями. Как слова хорошей песни становятся народными...

Например, многие полагают, что векторы для описания сил первым применил Исаак Ньютон, а на самом деле это был Хевисайд. Странно, как в памяти людской стираются имена наиболее оригинальных и талантливых представителей рода человеческого...

Хевисайд развил теорию электромагнитного поля Джеймса Клерка Максвелла, открыл принцип передачи сигнала на дальние расстояния, он высказал идеи, предвосхитившие появление телевидения, радиосвязи и некоторых аспектов теории относительности Эйнштейна. Стоит вспомнить это имя в наши дни, когда более всего не хватает талантливых и оригинальных людей, а бал правят бойкие посредственности.

Оливер Хевисайд родился в одной из лондонских трущоб, у него не было университетского образования. За исключением шести лет работы в телеграфной компании он был безработным. Однако благодаря своему таланту и целеустремленности Хевисайд стал одним из ведущих физиков викторианской эпохи.

Младший из четырех сыновей резчика по дереву, едва сводившего концы с концами, Оливер вполне мог стать одним из диккенсовских персонажей. Он родился в 1850 г. неподалеку от фабрики, на которой когда-то работал Диккенс. Переболев скарлатиной в детстве, Хевисайд почти потерял слух. Из-за этого он рос одиноким, неуживчивым и саркастичным человеком. Спустя годы Хевисайд вспоминал о своей юности с большой горечью, говоря, что она «навсегда деформировала» его жизнь.

Тем не менее учился он в школе хорошо: окончил пятым из 500 претендентов на сдачу экзаменов в колледж в 1865 г. Хуже всего его результаты были по евклидовой геометрии. «Самое худшее – это евклидова геометрия, – писал Хевисайд впоследствии. Поразительно, что молодые люди должны забивать себе голову всякими логическими вывертами и пытаться понять доказательство одного очевидного факта посредством другого, в равной степени, очевидного, ощущая в себе зарождающуюся неприязнь к математике, вместо того, чтобы изучать геометрию, один из наиболее важных и фундаментальных предметов».

Не имея ни средств, ни желания получать дальнейшее академическое образование, в шестнадцатилетнем возрасте Хевисайд оставил школу, самостоятельно выучил азбуку Морзе и в 18 лет отправился в Данию, где устроился работать в телеграфной компании. Это была его первая и последняя оплачиваемая работа.

Получить ее Хевисайду помог его дядя Чарльз Уитстон, который был женат на сестре матери Оливера. Его имя знают все, кто мало-мальски знаком с электричеством: «мостик Уитстона» – это устройство для измерения электрического сопротивления. Чарльз Уитстон был дружен с Уильямом Томсоном (позднее лордом Кельвином) и Майклом Фарадеем. Вероятно, ему не составило большого труда подыскать работу своему племяннику, тем более что Оливер выучил датский и немецкий языки.

Хевисайд быстро освоил специальность телеграфиста и наладчика телеграфных аппаратов и начал продвигаться по службе. В 1871 г. он вернулся в Англию и стал главным оператором в бюро телеграфной компании, параллельно с основной работой усиленно занимаясь самообразованием. В 1872 и 1873 гг. он впервые опубликовал две статьи по электричеству. В первой использовалась только алгебра, тогда как во второй (ее отметил Максвелл во втором издании своего «Трактата об электричестве и магнетизме») уже применялся математический анализ.

Возможно под воздействием замечательного трактата Максвелла в 1874 г. Хевисайд принимает решение оставить телеграфную компанию и полностью посвятить себя научной работе. Пожилым человеком в 1918 г. он пишет, вспоминая молодые годы: «Я увидел, что

теория обладает великой, величайшей и удивительной по своим возможностям силой. Мне потребовалось несколько лет, прежде чем я постиг то, что мог. Затем я отложил труд Максвелла в сторону и пошел своим путем. И продвигался уже гораздо быстрее». Решительный шаг для 24-летнего человека, не имевшего независимых средств к существованию. Он никогда не менял своего решения, что весьма тревожило его семью. Но его любили и выполняли все капризы и прихоти: поднос с едой оставляли у дверей его комнаты, которые обычно были плотно закрыты. За этими дверьми Хевисайд проводил за работой все ночи и большую часть дня при свете коптящих масляных ламп. По словам его знакомого, в комнате от них становилось «жарче, чем в аду».

Максвелл умер в 1879 г. в возрасте 48 лет, за девять лет до того, как гениальный немецкий Генрих Герц экспериментально доказал существование электромагнитных волн в пространстве. Сразу же после этого Оливер Лодж обнаружил электромагнитные волны в металлическом проводнике. Только после этого теория Максвелла стала общепринятой. Но Хевисайду подтверждения теории Максвелла были не нужны, он считал ее «очевидной истиной» уже в силу одной ее математической структуры. Тем не менее, он значительно упростил 20 уравнений Максвелла с 20 переменными, сведя их к двум уравнениям с двумя переменными – векторами электрического и магнитного поля. Большую часть теоретической работы Хевисайд провел с Герцем, но последний в своей книге отмечал, что «г-ну Хевисайду принадлежит приоритет».

В течение ряда лет уравнения электродинамики в новой форме назывались уравнениями Герца – Хевисайда, молодой Эйнштейн называл их уравнениями Максвелла – Герца, а сегодня эти уравнения носят имя только Максвелла. Так проходит земная слава... А в свое время Джордж Фрэнсис Фитцджеральд из Тринити-колледж в Дублине писал, что «трактат Максвелла загроможден остатками блестяще выбранных им рубежей атаки, окопавшихся лагерей и следами боев. Оливер Хевисайд очистил его от всего этого, выбрал прямой маршрут, проложил широкую дорогу, а также обследовал значительную часть сельской местности».

Методы Хевисайда были не менее важны, чем его результаты. Он научил физиков мира оперировать векторами. Над векторами могут выполняться арифметические действия, а также дифференциальные операции. Действия над векторами не всегда просты: векторное произведение двух векторов зависит от порядка их перемножения. У векторного исчисления были и противники. Шотландский физик Питер Тейт, друг Максвелла и Кельвина активно боролся с векторами и пропагандировал кватернионы – четверки чисел. Векторы трудно завоевывали сознание людей, но постепенно они стали так широко применяться в математике и физике, что имена тех, кто их придумал, стерлись из памяти людской.

Метод математического анализа, предложенный Хевисайдом также не получил одобрения со стороны научных журналов. Рецензенты отклоняли его работы из-за отсутствия строгости доказательств. Хевисайд признавал этот недостаток, но говорил: "Ну и что с того? Разве должен я отказываться от обеда лишь потому, что не понимаю, как происходит процесс пищеварения?"

Опираясь на теорию Максвелла, Хевисайд пришел к таким неожиданным выводам, о которых его предшественник и не мечтал. С типичной для него научной смелостью он стал размышлять, что будет происходить с заряженными частицами, когда они превысят скорость света. Не одна его записная книжка испещрена расчетами поведения таких сверхсветовых частиц.

Как самолет порождает ударную волну звука, превышая его скорость, так и электромагнитное поле отрывается от частицы, когда она превышает скорость света. Невозможно ведь превзойти скорость света в вакууме, а в среде она меньше, вот частицы и обгоняют свет, если их хорошенько разогнать. Мягкое голубое свечение мог наблюдать любой, кого допустили бы к бассейну ядерного реактора: там его создают электроны, вылетающие из активной зоны реактора. Это излучение носит имя российских физиков Вавилова и Черенкова, за его открытие им в 1958 г. была присуждена Нобелевская премия (вместе еще с двумя советскими теоретиками И. Е. Таммом и И. М. Франком).

Большинство своих работ Хевисайд публиковал в журнале «Электрик», рассчитанном на инженеров – электриков, но его читали и многие известные ученые, поэтому научная элита была вполне осведомлена о том, что представлял собой Хевисайд как ученый. В 1899 г.

Томсон при вступлении в должность президента Института инженеров – электриков назвал Хевисайда «авторитетом». Позднее в том же году Лодж, представляя Хевисайда читателям журнала «Нейчур», сказал о нем, что этот ученый в своих «выдающихся исследованиях электромагнитных волн продвинулся вперед дальше, чем это доступно пониманию в настоящее время». Спустя два года Хевисайд был избран членом Лондонского королевского общества, его кандидатуру поддержали такие знаменитости, как Томсон, Лодж, Фитцджеральд и Пойнтинг. За 17 лет Хевисайд превратился из неизвестного телеграфиста в мировую знаменитость.

Но были у Хевисайда и противники. Самый ярый – Уильям Г. Прис – технический эксперт Главного почтового управления Великобритании. Он называл себя «практическим человеком» и пренебрежительно относился к теоретикам и математическим идеям.

Любопытно, что даже в 80-х годах позапрошлого столетия возникали горячие споры о фундаментальных основах теории электричества. Разработка оборудования для линий дальней связи велась быстрыми темпами, но без опоры на теорию. Единственным математическим обоснованием был анализ потока электроэнергии очень низкой частоты в длинных проводниках, который Томсон провел за 30 лет до этого. Теория хорошо работала при передаче нескольких слов в минуту, но была совершенно непригодной для больших скоростей, необходимых для передачи разговора по телефону.

Одна из основных проблем дальней связи по кабелю состоит в задержке передаваемого сигнала из-за накопления его энергии в магнитном поле линии. Время, за которое магнитное поле берет и отдает энергию, ограничивает максимальную скорость передачи сигналов. При этом происходит и потеря энергии – ослабление сигнала. А в атмосфере радиоволны рассеиваются слабо – вот почему радиосвязь между континентами появилась намного раньше кабельной телефонной связи.

В одном из «публичных спорах» Хевисайд оппонировал своему приятелю Томсону, уже ставший к тому времени лордом Кельвином. Спор возник относительно возраста Земли. Кельвин оценил его в 98 млн. лет, предположив, что тепло в недрах Земли распространяется в направлении ее поверхности через все геологические слои с одинаковой скоростью. Это значительно короче того периода, который по теории Дарвина необходим для возникновения сложных организмов. Возникло противоречие. Хевисайд предположил, что тепло по-разному идет через кору Земли и ее внутренние части. Это сразу повысило возраст до 300 млн. лет. Хотя и неправильный по современным воззрениям результат, но ближе к истинному положению дел. Это была последняя опубликованная работа Хевисайда, имя его исчезло из рубрики писем в редакцию, а в 1908 г. он переехал в город Торки на южном побережье Англии.

Умер Хевисайд в феврале 1925 г. из-за ушибов, когда свалился с лестницы. Похоронен он в родительской могиле, и имя на его могильном камне заросло травой. Но когда вы будете в очередной раз звонить по междугородному телефону и услышите громкий и четкий голос на другом конце, вспомните имя этого талантливого и необычного человека, подарившего вам эту возможность».

Хевисайду принадлежит приоритет в следующих научных открытиях:

- Создание векторного анализа;
- Создание операционного исчисления (теория преобразований Лапласа);
- Упрощение 20 уравнений Максвелла с 20 переменными и сведение их к двум уравнениям с двумя переменными – векторами электрического и магнитного поля.
- В 1890 году, за пятнадцать лет до Эйнштейна, Хевисайд получил знаменитую формулу $E = mc^2$;
- Предсказал наличие особого слоя озона у атмосферы (ионосферы), благодаря этому возможна сверхдальняя радиосвязь;
- Предсказал в 1895 году излучения Вавилова-Черенкова;
- Ввел в физику дельта-функцию (Дирака);
- На тридцать лет раньше Дирака обосновал магнитный монополю, споры о котором не утихают и теперь ввиду отсутствия экспериментальных подтверждений его существования в природе как такового.

Теория Максвелла и его знаменитые уравнения позволили с единой точки зрения рассмотреть широкий круг вопросов, связанных магнитными и электрическими явлениями. **Теория электромагнетизма, основанная на обсуждаемых далее уравнениях, решает основную задачу электродинамики – определение характеристик электромагнитного поля по заданной системе зарядов.** Теория Максвелла в электродинамике играет такую же основополагающую роль, как и теория Ньютона в механике. Теория Максвелла является феноменологической, т.е. она не рассматривает процессов, происходящих на молекулярном, атомном и ядерном уровне.

Физические параметры среды в теории Максвелла задаются тремя характеристиками:

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}; \quad \varepsilon = \frac{\vec{F}_{\text{среды}}}{F_0}; \quad \gamma = \frac{1}{\rho}.$$

Дальнейшее рассмотрение предполагает, что диэлектрическая проницаемость среды ε , магнитная проницаемость среды μ и удельное сопротивление среды ρ полагаются определёнными опытным путём.

Уравнения Максвелла записываются обычно в двух формах: интегральной и дифференциальной. **Интегральные уравнения выражают соотношения для проведенных мысленно в магнитном поле неподвижных контуров и поверхностей. Дифференциальная форма уравнений устанавливает взаимосвязь между характеристиками поля и плотностями электрических зарядов и токов в каждой точке пространства занятого полем.**

Уравнения в интегральной форме были, по сути, сформулированы путём констатации экспериментально и теоретически очевидных фактов. Вот эти знаменитые уравнения

$$\left. \begin{aligned} \text{(I)} \quad \oint_S \vec{E} d\vec{S} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV; \\ \text{(II)} \quad \oint_S \vec{B} d\vec{S} &= 0; \\ \text{(III)} \quad \oint_\ell \vec{E} d\vec{\ell} &= - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}; \\ \text{(IV)} \quad \oint_\ell \vec{B} d\vec{\ell} &= \mu_0 \oint_S \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{S} \end{aligned} \right\} \quad (18.1)$$

Первое уравнение системы (18.1) не является абсолютно новым, в его основу положена теорема Остроградского – Гаусса для электрических полей в средах. Электрическое поле в диэлектрической среде, разумеется, создаётся зарядами двух типов: свободными и связанными.

Связанными называются заряды, входящие в состав структурных элементов вещества диэлектрика, т.е. молекул, атомов и ионов. Свободными считаются заряды, способные перемещаться под действием электрического поля на макроскопические расстояния, а так же избыточные заряды, сообщённые диэлектрику извне.

Электрическое поле в диэлектрике, таким образом, представляет собой суперпозицию двух полей, генерируемых связанными и свободными зарядами. Теорема Остроградского – Гаусса в этом случае записывается следующим образом

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} (Q^{\text{своб}} + Q^{\text{связ}}). \quad (18.2)$$

Уместно напомнить, в этой связи, что уравнение (18.2) учитывает только заряды, содержащиеся внутри мысленно проведенного контура, так сказать, только охваченные заряды. Поле связанных зарядов зависит от степени поляризации диэлектрика, т.е. от суммарного дипольного момента всех молекул, заключённых в рассматриваемом объёме ΔV , ограниченной поверхностью S

$$\vec{p}_m = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{i=N} \vec{p}_{mi} . \quad (18.3)$$

Напряжённость поля, создаваемого связанными зарядами, определится как

$$\vec{E}^{\text{связ}} = -\frac{1}{\epsilon_0} \oint_{bl} \vec{p}_m d\vec{S} . \quad (18.4)$$

Знак минус характеризует факт уменьшения потенциальной энергии диполя при его повороте в электрическом поле. Уравнение (18.4) позволяет выразить величину связанного заряда следующим образом

$$Q^{\text{связ}} = -\oint_S \vec{p}_m d\vec{S} . \quad (18.5)$$

Перепишем теорему Остроградского – Гаусса с учётом уравнения (18.5)

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon} \left(Q^{\text{своб}} - \oint_S \vec{p}_m d\vec{S} \right) ,$$

или

$$Q^{\text{своб}} = \epsilon_0 \oint_S \vec{E} d\vec{S} + \oint_S \vec{p}_m d\vec{S} . \quad (18.6)$$

Поскольку интегралы берутся по одной и той же замкнутой поверхности, то их можно преобразовать к виду

$$Q^{\text{своб}} = \oint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{p}_m) d\vec{S} . \quad (18.7)$$

Уравнение (18.7) можно привести к обычной форме записи теоремы Остроградского – Гаусса, если ввести электрическое смещение

$$(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{p}_m) = \vec{D} , \quad (18.8)$$

тогда

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = Q^{\text{своб}} . \quad (18.9)$$

Таким образом, мы снова пришли к понятию вектора электрического смещения или, как его иногда называют, вектором электрической индукции. Уравнение (18.9) определяет поток вектора смещения, пронизывающий поверхность S , т.е.

$$\Phi_D = \oint_S \vec{D} d\vec{S} = Q^{\text{своб}} . \quad (18.10)$$

Если поверхность S неподвижна и недеформируемая, то изменение потока будет сопряжено с зависимостью вектора электрического смещения от времени. Продифференцируем по этому случаю уравнение (18.10)

$$\frac{dQ^{\text{своб}}}{dt} = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_S \vec{D} d\vec{S} ,$$

или

$$\frac{dQ^{\text{своб}}}{dt} = \oint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} . \quad (18.11)$$

Размерность левой части последнего уравнения [Кл/с], т.е. соответствует размерности силы тока. Естественнo в этой связи предположить, что величина $\left[\partial \vec{D} / \partial t \right]$ должна иметь размерность $[A/m^2]$, т.е. плотности тока j . Другими словами, можно обоснованно ввести понятие плотности тока смещения. Плотность тока смещения, таким образом, равна скорости изменения вектора смещения. Отметим, что подынтегральное выражение (18.11) содержит в общем случае две переменных величины t и S , но в данном конкретном случае, площадь исследуемого контура полагается неизменной.

Проведенный анализ позволяет определить ток смещения в виде

$$i_c = \int_S \vec{j}_c d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} . \quad (18.12)$$

Для чего же потребовалась Максвеллу гипотеза о токе смещения? В своей работе «Динамическая теория электромагнитного поля» он написал: «... В диэлектрике, находящемся под действием электродвижущей силы, мы можем представлять, что электричество в каждой молекуле так смещено, что одна сторона молекулы делается положительно наэлектризованной, а другая – отрицательно наэлектризованной, однако электричество остаётся полностью связанным с молекулами и не переходит от одной молекулы к другой. Эффект этого воздействия на всю массу диэлектрика выражается в общем смещении электричества в определённом направлении. Это смещение не вполне равноценно току, потому что когда оно достигает определённой степени, то остаётся неизменным, но оно есть начало тока и его изменения образуют токи в положительном или отрицательном направлениях, сообразно тому, уменьшается или увеличивается смещение ...».

Введя понятие тока смещения, Максвелл совершенно не тривиально подошёл к понятию замкнутости электрических цепей. Как отмечалось ранее, возникновение постоянного электрического тока возможно только в замкнутой цепи, потому, что там понятие тока связывается с переносом зарядов. Иное дело в цепях переменного тока, по Максвеллу замкнутость цепи совсем не обязательно.

Так, например, при зарядке и разрядке конденсатора через сопротивление электрический ток силой i протекает по соединительным проводам, при этом вокруг них создаётся магнитное поле с индукцией $\vec{B}$. В то время, как электрическое поле распадается, провода окружены кольцевыми линиями магнитной индукции. Соединительная цепь будет иметь магнитную «шубу», доходящую до пластин. Пространство между пластинами заполнено всегда диэлектрическим веществом, которое, как известно ток не проводит в виду малого количества свободных зарядов, способных к перемещению под действием электрического поля.

Джеймс Клерк Максвелл взял на себя смелость утверждать, что «магнитная оболочка» не имеет концов, а образует полое кольцо из кольцевых линий магнитной индукции.

Ток смещения представляет собой, по сути, изменяющееся во времени электрическое поле в любой среде, вплоть до пустого пространства. В максвелловском представлении в природе существуют только замкнутые токи, причём это могут быть как токи проводимости, так и токи смещения. Электрические токи, исходя, из представлений Максвелла, не могут иметь начала и конца. Там где заканчивается ток проводимости, неминуемо должен начинаться ток смещения.

Второе уравнение. Максвелл записал это уравнение как факт отсутствия в природе уединённых магнитных зарядов. Магнитный поток через замкнутую неподвижную поверхность, мысленно проведенную в электромагнитном поле равен нулю.

Третье уравнение. Максвелл этим уравнением обобщил закон электромагнитной индукции Майкла Фарадея применительно к замкнутому неподвижному проводящему контуру, находящемуся в переменном магнитном поле. Проанализировав известное уравнение

$$\oint_L \vec{E} d\vec{\ell} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -\oint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s}. \quad (18.13)$$

Максвелл обратил внимание на то, что в него не входят параметры материала проводника. Он решил распространить это уравнение на любой контур, мысленно проведенный в переменном магнитном поле. Одной из особенностей третьего уравнения является то, что электрическое поле, в отличие от кулоновского полагается не потенциальным. Циркуляция вектора $\vec{E}$ зависит от способа проведения контура в поле.

Главный же физический смысл третьего уравнения заключается в том, что оно устанавливает взаимосвязь переменного магнитного поля с индуцированным электрическим полем, причём наличие проводников совершенно не обязательно. Применительно к третьему уравнению обычно приводят следующую смысловую формулировку: «Циркуляция вектора напряжённости электрического поля E по произвольному контуру, мысленно проведенному в электромагнитном поле, равна, взятой с обратным знаком скорости изменения магнитного потока через поверхность S , натянутую на этот контур».

Четвёртое уравнение. С учётом тока смещения Максвелл записал **закон полного тока** следующим образом:

$$\int_L \frac{\vec{B}}{\mu\mu_0} d\vec{\ell} = \oint_L \vec{H} d\vec{\ell} = i_{\text{макро}} + i_c, \quad (18.14)$$

где $i_{\text{макро}}$ – макро ток, вызванный перемещением свободных носителей заряда под действием электрического поля, i_c – ток смещения, некоторые свойства которого оговорены выше. Это уравнение показывает, что циркуляция вектора напряжённости магнитного поля $\vec{H}$ по произвольному неподвижному контуру L , мысленно проведенному в электрическом поле, равна алгебраической сумме макро тока и тока смещения сквозь поверхность, причём

$$i_{\text{макро}} = \oint_S \vec{j} d\vec{S}, \quad (18.15)$$

где $\vec{j}$ – плотность тока проводимости.

Используя понятие дивергенции и ротора уравнения Максвелла можно записать в следующей, так называемой, дифференциальной форме

$$\left. \begin{aligned} \text{(I)} \quad \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}; \\ \text{(II)} \quad \operatorname{div} \vec{B} &= 0; \\ \text{(III)} \quad \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \\ \text{(IV)} \quad \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right). \end{aligned} \right\} \quad (18.16)$$

18.2. Волновое уравнение электромагнитного поля

Из приведенных выше сведений следует, что Максвелл проанализировал все известные к тому времени законы электродинамики и сделал попытку применить их к изменяющемуся во времени электрическому и магнитному полю. Он обратил внимание на асимметрию взаимосвязи между электрическими и магнитными явлениями. Максвелл ввел в физику понятие вихревого электрического поля и предложил новую трактовку закона электромагнитной индукции, открытой Фарадеем в 1831 г. Уравнения Максвелла – Герца – Хевисайда утверждают, что:

- **всякое изменение магнитного поля порождает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле, силовые линии которого замкнуты;**
- **изменяющееся во времени электрическое поле порождает в окружающем пространстве магнитное поле.**

На рис. 18.1 схематически показан процесс превращения вихревого магнитного поля в вихревое электрическое поле и наоборот.

Если возбудить посредством периодически колеблющихся зарядов переменное электромагнитное поле, то в окружающем пространстве возникнет последовательное взаимное превращение электрических и магнитных полей, распространяющееся от точки к точке. Естественно, что процесс будет периодическим во времени и в пространстве, т.е. он будет представлять собой волну. Существование электромагнитных волн, как отмечено выше, вытекает непосредственно из уравнений Максвелла – Герца – Хевисайда. Продемонстрируем это на примере однородной, нейтральной (без зарядов, т.е. $\rho = 0$) и непроводящей среды $\vec{j} = 0$ с постоянными магнитными μ и диэлектрическими ϵ свойствами.

Прежде чем приступить к записи уравнений, приведём формулы взаимосвязи

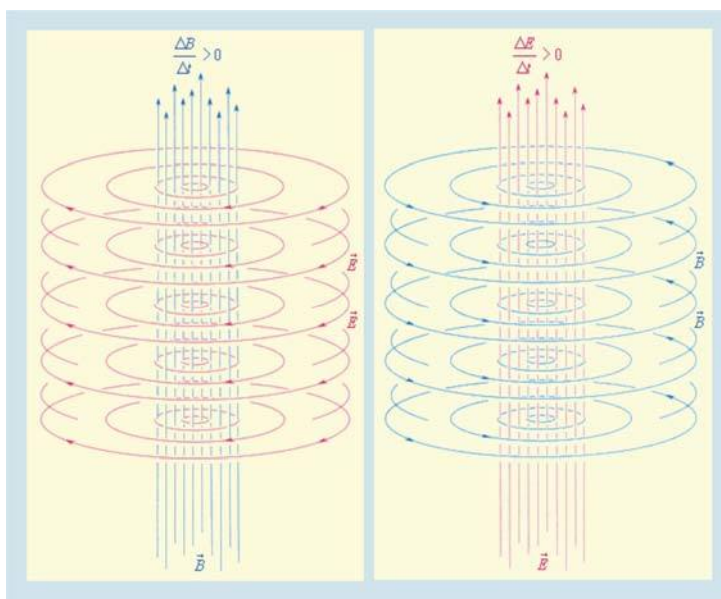


Рис. 18.1. Взаимное превращение электрического и магнитного полей [49]

на примере однородной, нейтральной (без зарядов, т.е. $\rho = 0$) и непроводящей среды $\vec{j} = 0$ с постоянными магнитными μ и диэлектрическими ϵ свойствами.

Прежде чем приступить к записи уравнений, приведём формулы взаимосвязи

$$\left. \begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon \epsilon_0 \vec{E}; \\ \vec{B} &= \mu \mu_0 \vec{H}; \\ \vec{j} &= \frac{1}{\rho} \vec{E} = \sigma \vec{E}, \end{aligned} \right\} \quad (18.17)$$

где $\vec{D}$ – вектор электрического смещения, $\vec{E}$ – вектор напряжённости электрического поля, $\vec{B}$ – вектор индукции магнитного поля, $\vec{H}$ – вектор напряжённости магнитного поля, $\vec{j}$ – вектор плотности тока, ρ – удельное электрическое сопротивление, σ – удельная электрическая проводимость, ϵ_0 – электрическая постоянная, ϵ – диэлектрическая проницаемость среды, μ_0 – магнитная постоянная, μ – магнитная проницаемость среды.

Запишем уравнения Максвелла – Герца – Хевисайда в следующем виде

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (18.18)$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (18.19)$$

$$\vec{\nabla} \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{\nabla} \vec{H}, \quad (18.20)$$

$$\vec{\nabla} \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{\nabla} \vec{E}. \quad (18.21)$$

Из математики известно, что векторный дифференциальный оператор набла ($\vec{\nabla}$), введённый Гамильтоном, сам по себе физического смысла не имеет, потому как подразумевает вектор с компонентами $\{\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z\}$, следовательно

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (18.22)$$

тогда

$$\vec{\nabla} \vec{B} = \nabla_x B_x + \nabla_y B_y + \nabla_z B_z = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \text{div} \vec{B}, \quad (18.23)$$

$$\vec{\nabla} \vec{H} = \nabla_x H_x + \nabla_y H_y + \nabla_z H_z = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = \text{div} \vec{H}, \quad (18.24)$$

$$\vec{\nabla} \vec{E} = \nabla_x E_x + \nabla_y E_y + \nabla_z E_z = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \text{div} \vec{E}, \quad (18.25)$$

$$\vec{\nabla} \vec{D} = \nabla_x D_x + \nabla_y D_y + \nabla_z D_z = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \text{div} \vec{D}. \quad (18.26)$$

Посредством оператора набла можно ротор и дивергенцию векторной функции выразить следующим образом

$$\text{rot} \vec{E} = (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}. \quad (18.27)$$

$$\text{rot} \vec{B} = (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \quad (18.28)$$

Перепишем уравнения (18.16) с учётом векторных преобразований и соотношений (18.17)

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (18.29)$$

$$\vec{\nabla} \vec{H} = 0. \quad (18.30)$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (18.31)$$

$$\vec{\nabla} \vec{E} = 0. \quad (18.32)$$

Возьмём ротор от обеих частей уравнения (18.29)

$$\left[\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \right] = -\mu\mu_0 \left(\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right). \quad (18.33)$$

Изменим порядок дифференцирования по координатам и по времени, т.е.

$$\left(\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{H}), \quad (18.34)$$

Если подобную замену произвести в уравнении (18.33) и подставить результат в уравнение (18.31), то для ротора напряжённости магнитного поля получим соотношение

$$\left[\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \right] = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (18.35)$$

Комбинация величин в левой части уравнения (18.35) может быть выражена через оператор Лапласа (лапласиан $\vec{\Delta}$)

$$\vec{\Delta} = \vec{i} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \vec{j} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \vec{k} \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (18.36)$$

т.е.

$$\left[\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \right] = \vec{\Delta} \vec{E},$$

таким образом:

$$\vec{\Delta} \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (18.37)$$

На основании уравнения (18.36) раскроем лапласиан

$$\vec{i} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \vec{j} \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \vec{k} \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (18.38)$$

Аналогичное соотношение можно таким же путём получить для напряжённости магнитного поля

$$\vec{i} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \vec{j} \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \vec{k} \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (18.39)$$

Оценим размерности сочетания постоянных величин в правой части последнего уравнения. Размерность электрической постоянной определяется из Закона Кулона, записанного для вакуума или воздуха

$$F_K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

откуда следует размерность ε_0

$$[\varepsilon_0] = \frac{[q]^2}{L^2 [F]}. \quad (18.40)$$

Размерность магнитной постоянной находится из закона Ампера, приведенного к единице длины взаимодействующих проводников

$$F_A = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{l}.$$

С учётом того, что $I = dq/dt$, размерность μ_0 определится как

$$[\mu_0] = \frac{[F][T]^2}{[q]^2}. \quad (18.41)$$

Перемножим уравнения (18.40) и (18.41)

$$[\varepsilon_0 \mu_0] = \frac{[q]^2 [F][T]^2}{L^2 [F][q]^2} = \frac{[T]^2}{L^2} = \left[\frac{1}{c^2} \right], \quad (18.42)$$

из чего видно, что произведение электрической и магнитной постоянной равно единице, делённой на некую константу, по размерности равную величине обратно пропорциональной квадрату скорости. Подставим значения $\varepsilon_0 \cong 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/\text{м}^2 \cdot \text{Н}$, $\mu_0 \cong 1,257 \text{ Н} \cdot \text{с}^2/\text{Кл}^2$

$$c = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}} \cong \sqrt{\frac{1}{8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 1,257 \cdot 10^{-6}}} \cong \sqrt{8,985147372} \cong 2,9975 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (18.43)$$

Из уравнений Максвелла – Герца – Хевисайда естественным образом получилась постоянная величина c , которая практически совпадающая со значением скорости света в вакууме или воздухе.

Таким образом, уравнение (18.38) и (18.39) для вакуума или воздуха ($\mu_0 = \epsilon_0 = 1$) можно переписать следующим образом

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} \quad (18.44)$$

Уравнения системы (18.44) представляют волновые уравнения. Всякая зависимость, удовлетворяющая этим уравнениям должна описывать волновой процесс. Напряжённости магнитного и электрического полей являются функциями времени и координат. Наличие в уравнениях скорости света, которая в данном случае должна рассматриваться как фазовая скорость электромагнитных волн.

Решениями уравнений (18.44) в случае плоской волны будут являться функции, аналогичные (7.27)

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= E_m \sin(\omega t - kx); \\ \vec{H} &= H_m \sin(\omega t - kx). \end{aligned} \right\} \quad (18.45)$$

На рис. 18.2 приведено, «остановленное» во времени распределение напряжённостей Электрического и магнитного поля для плоской волны. Направление волны и векторы напряжённостей образуют правовинтовую систему.

Колебания электрического и магнитного векторов в электромагнитной волне протекают с одинаковой фазой, т.е. максимумы вектора напряжённости электрического поля и магнитного поля наблюдаются в одни и те же моменты времени, т.е.

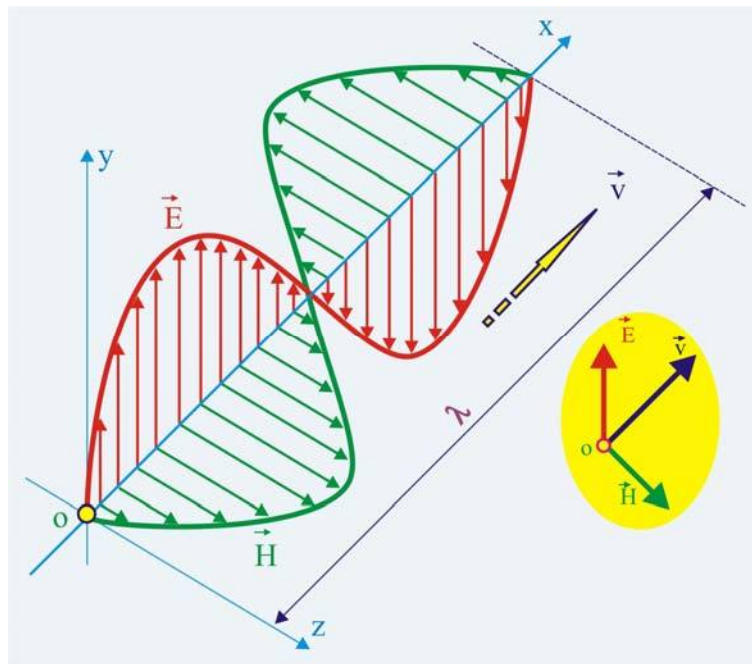


Рис. 18.2. Изменение $\vec{E}$ и $\vec{H}$ во времени и пространстве

$$E_m \sqrt{\epsilon \epsilon_0} = H_m \sqrt{\mu \mu_0}. \quad (18.46)$$

Скорость электромагнитных волн в среде будет в соответствии с уравнением (18.39) определяться как

$$c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu}}. \quad (18.47)$$

18.3. Энергия электромагнитных волн

Электромагнитные волны способны распространять в пространстве энергию, свидетельством тому, в частности, является факт существования всего живого на нашей планете исключительно за счёт энергии, излучаемой Солнцем в виде света и тепла. Кто в детстве не развлекался в солнечный день увеличительным стеклом (линзой), поднимая локально температуру подвернувшихся под руку предметов? Ведро холодной воды, выставленное на солнце, со временем увеличивает свою температуру. Эти факты свидетельствуют о том, что солнечное электромагнитное излучение обладает энергией, способной, в частности, перейти в тепло.

Получим энергетические соотношения, характеризующие электромагнитное поле. Для электрической составляющей поля можно использовать энергетические соотношения конденсатора

$$W_E = \frac{CU^2}{2}; \quad C = \frac{\epsilon\epsilon_0 s}{d}; \quad E = \frac{U}{d}.$$

Заменяя в уравнении для W_E C и U , получим

$$W_E = \frac{\epsilon\epsilon_0 s E^2 d^2}{2d} = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} sd = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} V. \quad (18.48)$$

Плотность энергии электрического поля, при этом, определится как

$$\varpi_E = \frac{W_E}{V} = \frac{1}{2} \epsilon\epsilon_0 E^2, \left[\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} \right]; \quad (18.49)$$

Магнитное поле рассмотрим на примере соленоида, длиной ℓ , площадью поперечного сечения s , содержащего N витков. Такой соленоид обладает индуктивностью

$$L = \frac{\mu\mu_0 N^2 s}{\ell};$$

Величина магнитной индукции внутри соленоида зависит от силы тока, текущего по обмотке и магнитной проницаемости сердечника, если таковой имеется

$$B = \frac{\mu\mu_0 NI}{\ell} \Rightarrow I^2 = \frac{B^2 \ell^2}{(\mu\mu_0)^2 N^2};$$

Энергия поля, заключенного внутри соленоида, равна

$$W_B = \frac{LI^2}{2}.$$

Подставим в уравнение для W_B значения L и I^2

$$W_B = \frac{1}{2} \frac{\mu\mu_0 N^2 s}{\ell} \frac{B^2 \ell^2}{(\mu\mu_0)^2 N^2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} \ell s = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu\mu_0} V; \quad (18.50)$$

Объёмная плотность энергии магнитного поля запишется так:

$$\varpi_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu\mu_0}. \quad (18.51)$$

Объёмная плотность электромагнитного поля в вакууме определится в виде суммы уравнений (18.49) и (18.51)

$$\varpi = \varpi_E + \varpi_B = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}; \quad (18.52)$$

$$\varpi = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\mu_0 B^2;$$

Используя для вакуума или воздуха уравнения (4.12)

$$\frac{B}{E} = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \Rightarrow B = \frac{E}{c} = E\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0};$$

получим

$$\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2.$$

С учётом последних преобразований (18.52) возможно записать плотность энергии в окончательном виде

$$\varpi = 2\varpi_E = 2\varpi_B = \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} EB. \quad (18.53)$$

Для электромагнитного поля в среде, обладающей диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ определится как

$$\varpi = \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} EB = \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} EH. \quad (18.54)$$

Таким образом, полная плотность энергии электромагнитного поля складывается из двух равных по величине вкладов, соответствующих плотностям электрического и магнитного полей.

Определим далее энергию, переносимую электромагнитной волной в единицу времени через единичную площадь. Эту векторную величину называют обычно вектором Умова - Пойтинга.

Умов Николай Алексеевич (1846 – 1915), выпускник московского университета. После получения магистерского и доцентского званий преподавал в Новороссийском университете. После смерти Столетова был приглашён заведовать кафедрой физики московского университета. В 1911 г. в знак протеста против политики правительства в области образования, ушёл из университета, занялся научной деятельностью. В 1874 г. Умовым была защищена докторская диссертация на тему «Уравнения движения энергии», где и была предложена новая векторная величина, так называемый – вектор Умова.

Пойтинг Джон Генри (1852 - 1914), выпускник Кембриджа, профессор Мезон – колледжа (г. Бирмингем), приятель знаменитого Дж. Дж. Томсона. В 1884 году (десятилетие спустя поле Умова) опубликовал работу «О переносе энергии в электромагнитном поле», где без всяких, подобающих такому случаю ссылок, ввёл вектор Умова, который в западных изданиях именуется как вектор Пойтинга.

Определим энергию электромагнитной волны из уравнения (18.53)

$$\varpi = \varepsilon \varepsilon_0 E^2; \Rightarrow W = \varepsilon \varepsilon_0 E^2 \cdot V.$$

Запишем выражение для плотности потока энергии через единичную площадку s за время dt

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{s} \frac{dW}{dt} = \frac{1}{s} \frac{d}{dt} (\varepsilon \varepsilon_0 E^2 s dx) = \varepsilon \varepsilon_0 E^2 \frac{dx}{dt} = \varepsilon \varepsilon_0 E^2 c.$$

Поскольку

$$E = cB; \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}; \quad v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}, \quad (18.55)$$

то для вакуума

$$\mathfrak{R} = \varepsilon_0 c E^2 = \frac{c B^2}{\mu_0} = \frac{EB}{\mu_0}. \quad (18.56)$$

Вектор $\vec{S}$ по направлению совпадает с направлением переноса энергии, т.е. с вектором $\vec{v}$, $\vec{S}$ перпендикулярен $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Такое взаимное расположение векторов описывается, как известно, векторным произведением

$$\vec{\mathcal{R}} = \frac{1}{\mu_0} [\vec{E} \times \vec{B}] = [\vec{E} \times \vec{H}] \quad (18.57)$$

За один период колебаний величина $|\vec{\mathcal{R}}|$ дважды достигает своего максимального значения и дважды обращается в ноль, среднее же значение модуля вектора Умова – Пойтинга равно

$$|\vec{\mathcal{R}}| = \frac{EH}{2}. \quad (18.58)$$

Ещё одной важной характеристикой электромагнитных волн является интенсивность J - величина, численно равная энергии, переносимой волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны

$$J = \langle \vec{\mathcal{R}} \rangle. \quad (18.59)$$

Процесс поглощения электромагнитной волны веществом сопровождается сообщением структурным элементам среды импульса, т.е. электромагнитная волна оказывает на поглощающее тело давление. Давление возникает вследствие направленного движения заряженных частиц вещества и их взаимодействия с магнитным полем. Давление электромагнитных волн имеет весьма малое значение. Солнечное излучение на абсолютно поглощающей поверхности создаёт давление порядка 5 мкПа. Экспериментально давление света обнаружено Петром Николаевичем Лебедевым (1866 – 1912), который асестировал А.Г. Столетову в Московском университете. Импульс ЭМ - волны можно записать так

$$p = \frac{1}{c} W. \quad (18.60)$$

Полагая импульс равным $p = mc$, получим, что $W = mc^2$. Это уравнение впервые было записано Оливером Хевисайдом, за несколько лет до Эйнштейна.

Электромагнитные волны могут возбуждаться только **ускоренно движущимися зарядами**. Цепи постоянного тока, в которых носители заряда движутся с неизменной скоростью, не являются источником электромагнитных волн. В современной электронике излучение электромагнитных волн производится с помощью антенн различных конструкций, в которых возбуждаются, изменяющиеся по определённым законам электрические токи. Простейшим излучателем электромагнитных волн, является электрический диполь с изменяющимся во времени дипольным моментом. Такой элементарный диполь называется диполем Генриха Герца.

18.4. Излучение электромагнитных волн

Прежде чем приступить к обсуждению особенностей излучения электромагнитных волн, следует сказать несколько слов о проблеме передачи взаимодействий в природе и теории мирового эфира.

Проблема пустоты с давних времён занимала умы учёных, вызывая постоянно оживлённые дискуссии. Повседневный опыт на уровне наших ощущений говорит о том, что взаимодействия происходят при непосредственном контакте взаимодействующих объектов. Обобщил житейские наблюдения Аристотель, введя понятия силы тяги, силы давления и силы удара. Аристотель полагал, что брошенное тело «ведёт» среда. В пустоте взаимодействие а, следовательно, и движение не возможно, значит – пустота, тоже невозможна. Довольно логично.

Идея Аристотеля о невозможности пустоты была поставлена под сомнение только в XVII веке после изобретения ртутного барометра учеником великого Галилея, Эванжелистой Торричелли (1608 – 1647). Торричелли, по сути, открыл вакуум, свойства которого потом исследовали французский математик, физик, философ и писатель Блез Паскаль (1623 – 1662) и бургомистр Магденбурга Отто фон Герике. Эксперименты показали, помимо прочего, что вакуум не проводит звук, но проводит свет [50].

Следующим, кто всерьёз занялся свойствами пустоты, был неутомимый Рене Декарт. Принципиально отвергая существование пустоты, он ввёл понятие эфира. Мир, по Декарту, заполнен эфиром – тонкой материей, в которой возникают вихри, способные обеспечивать взаимодействие, опять же исключительно механическим путём.

В следующем, XVIII веке тория великого Ньютона своим блеском и величием затмила все прочие теории, показав несостоятельность по многим позициям учения Аристотеля. Ньютон был настолько популярен в Европе, что существовали даже курсы «Ньютонизм для дам». Всё что происходило в науке, оценивалось с позиций теории механического движения Ньютона. Но механика Ньютона была не всесильна.

Трудности возникли при объяснении взаимодействия на расстоянии, например гравитационного. И со светом, тоже было не совсем всё понятно. Ньютоновские корпускулы стали на долгие времена причиной переноса различных действий на расстояние. Каждое конкретное действие требовало своих корпускул. В науку пришло туманное, но романтическое понятие эфира. Так появился флогистон – некое невесомое, летучее, невидимое вещество, определяющее тепловое состояние тел. А потом стали в моде разного рода флюиды в виде теплорода, электрических флюидов Кулона и т.д. Одним словом, появление нового явления, где взаимодействие происходило без непосредственного контакта, сопровождалось введением нового сорта флюида, который помещался между взаимодействующими объектами.

Постепенно, по мере установления аналогий между явлениями, количество флюидов уменьшилось, и все их заменили одним, ещё более туманным все проникающим универсальным эфиром. Но все попытки обращения к эфиру для трактовки передачи действия на расстоянии оказались бесплодными, потому что автоматически на него переносились свойства обычной материи.

К окончанию XIX века уже было установлена непрерывность пространства, было ясно, что в каждой точке любая физическая величина имеет вполне определённое значение, причём переход от точки к точке носит непрерывный и плавный характер. Эфир постепенно вытеснялся более прагматичным понятием поля. Образом поля в различных отделах физики, в принципе, начали пользоваться со второй половины XIX века. Например, при объяснении явлений электрического и магнитного свойства.

Генрих Рудольф Герц является настолько неординарной личностью в современной и классической физике, что о нём следует сказать особо и более подробно. Родился Герц в г. Гамбурге в семье адвоката. Образование Герц получил совершенно стандартное для того

времени: реальное училище, городская гимназия, высшее Дрезденское техническое училище, мюнхенский университет, берлинский университет.

На всех этапах учёбы Генрих блистал и был замечен одним из самых знаменитых немецких физиков Германом Гельмгольцем (1821 – 1894), это решило дальнейшую научную судьбу способного молодого человека. Этот волевой и целенаправленный учёный с широчайшими научными интересами, что вполне типично для того времени, имел на Герца огромное влияние. Гельмгольц, не подозревая о работах Ломоносова и Майера – Джоуля, в довольно юном возрасте обосновал закон сохранения и превращения энергии, затем он не без успехов занимался физиологией (одно из образований было медицинским), но научная зрелость была посвящена теории электричества, последняя, так сказать, любовь.



Рис. 18.3. Генрих Герц

Гельмгольц, пожалуй, первый обратил достойное внимание на работы Максвелла. Они производили на него неоднозначное впечатление. С одной стороны он понимал роль промежуточной среды в теории электромагнитных волн, с другой стороны, смириться с тем, что этой средой может быть «ничто» он не мог. Будучи приверженцем идей Канта, о невозможности познания мира, он исповедовал в электричестве учение о дальнодействии, несмотря на его очевидные несоответствия с реальными. Генрих Герц всю свою короткую, но яркую жизнь старался подтвердить научные взгляды своего учителя, но никогда не прогибался и всегда был предельно честен.

День 14 ноября 1886 г. можно считать днём открытия (вопреки себе и учителю) электромагнитных волн. Именно в этот день, по-немецки пунктуальный, Герц записал в своём дневнике: «Посчастливилось установить индукционное действие друг на друга двух незамкнутых цепей с током. Длина цепей 3м, расстояние между ними 1,5м. » Экспериментальная установка герца была до удивления проста и не содержала ни одного нового элемента. Всё что использовал юный гений, можно было отыскать в любой даже самой захудалой физической лаборатории того времени (рис. 18.4).

Установка состояла из индуктора Румкорфа 1, представляющего собой в современном понимании, повышающий трансформатор, у которого обе обмотки расположены на одном незамкнутом цилиндрическом сердечнике. В цепи первичной обмотки включался источник ЭДС 3 и механический прерыватель 2, в виде диэлектрического вращающегося диска с проводящей вставкой и двумя радиальными контактами. Вторичная обмотка соединялась с разрядниками 4, между которыми проскакивала искра во время размыкания контактов в цепи первичной обмотки. Идея использования механического прерывателя для получения импульсов напряжения довольно значительной величины (несколько киловольт) используется в некоторых карбюраторных двигателях внутреннего сгорания.

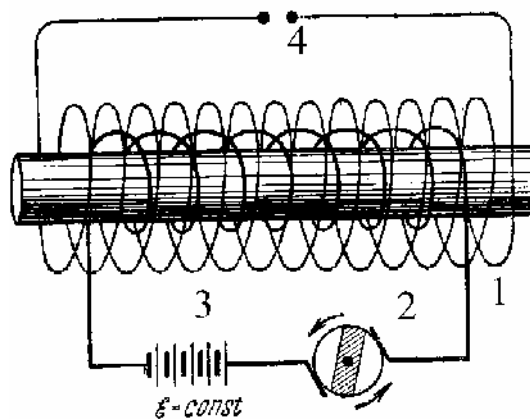


Рис.18.4. Установка Герца

Недалеко от разрядников 4 Герц разместил ещё пару разрядников, соединённых с проводным контуром. Проводя эксперимент в тёмной комнате, Герц обнаружил искрение между разрядниками. Это означало, что электрический импульс был передан на расстояние око-

ло полутора метров совершенно без проводов. Вопреки первоначальным установкам Гельмгольца, всё шло к тому, что англичанин прав – волны существуют.

В ходе дальнейших захватывающих экспериментов Герцу удалось установить, что предсказанные Максвеллом волны экранируются стальным листом, а фанерные и деревянные препятствия для них не являются преградой.

Обнаруженные Герцем искровые волны в явном виде демонстрировали свойства аналогичные свету. Посчитав приближённо скорость распространения исследуемых волн, Герц убедился, что и тут Максвелл прав – волны распространялись со скоростью очень близкой к скорости света. Чтобы окончательно убедить себя, а особенно, своего учителя, в том что он имеет дело именно с волнами, Герц ставит эксперимент с преломлением на асфальтовой призме весом около двух тонн. Поместив призму между излучателем и приёмником, он обнаруживает отклонение от прямолинейного распространения.

Как пишет по этому поводу В. Карцев [51]: «Трудно сейчас представить себе бурю, вызванную открытиями Герца. Для физиков, они, прежде всего, означали полный триумф уравнений Максвелла и забвение всех других электродинамических теорий. Все неисчислимое бумажное многопудье курсов электродинамики Неймана, Вебера, Гельмгольца и множества других авторов нашло свою гавань в пыльных архивах науки, уступив место нескольким строкам максвелловских уравнений». Следует, однако, отметить, что появление теории стало возможным благодаря предшественникам, заложивших основы знаний об электромагнетизме.

Рассмотрим физические особенности процесса генерирования электромагнитных волн на примере двух проводящих стержней, подключенных к источнику постоянного тока (Рис.18.5). Проводящие стержни соединены с источником постоянного тока. При замыкании ключа верхний стержень приобретает быстро положительный заряд, а нижний – отрицательный. Структура электрического поля показана в виде концентрических окружностей. Во время перемещения зарядов по стержням текут токи, стрелками показано направление движения положительных зарядов. Электрический ток создаёт магнитное поле

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}; \quad (18.61)$$

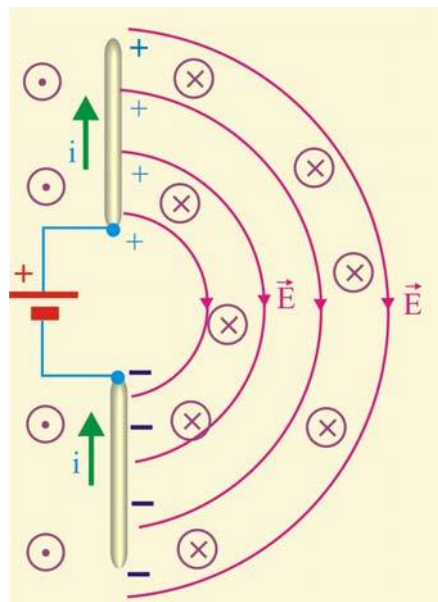


Рис.18.5. Образование электромагнитных волн

Линии магнитной индукции этого поля представляют собой концентрические окружности, охватывающие стержни. Представим далее более сложную ситуацию, когда вместо источника постоянного тока в цепи стержней включен генератор переменного тока

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t). \quad (18.62)$$

Такая конструкция называется электрическим дипольным вибратором. В любой момент времени существует разделение зарядов, что обеспечивает наличие дипольного момента. Так как знак заряда на стержнях будет периодически меняться, то дипольный момент антенны осциллирует.

В этом случае ток в стержнях будет менять своё направление, следовательно, будет меняться и направления полей, причём ввиду невозможности исчезать мгновенно, линии замыкаются. При замыкании силовых линий образуются контуры, которые продолжают распространяться в окружающем пространстве.

В любой точке пространства, таким образом, векторы $\vec{B}$ и $\vec{E}$ перпендикулярны друг другу и вектору скорости распространения волны. Модули напряжённости и индукции будут меняться по синусоидальному закону, в соответствии с изменением ЭДС.

$$\begin{aligned} E &= E_y = E_0 \sin \omega t; \\ B &= B_z = B_0 \sin \omega t; \end{aligned} \quad (9.3)$$

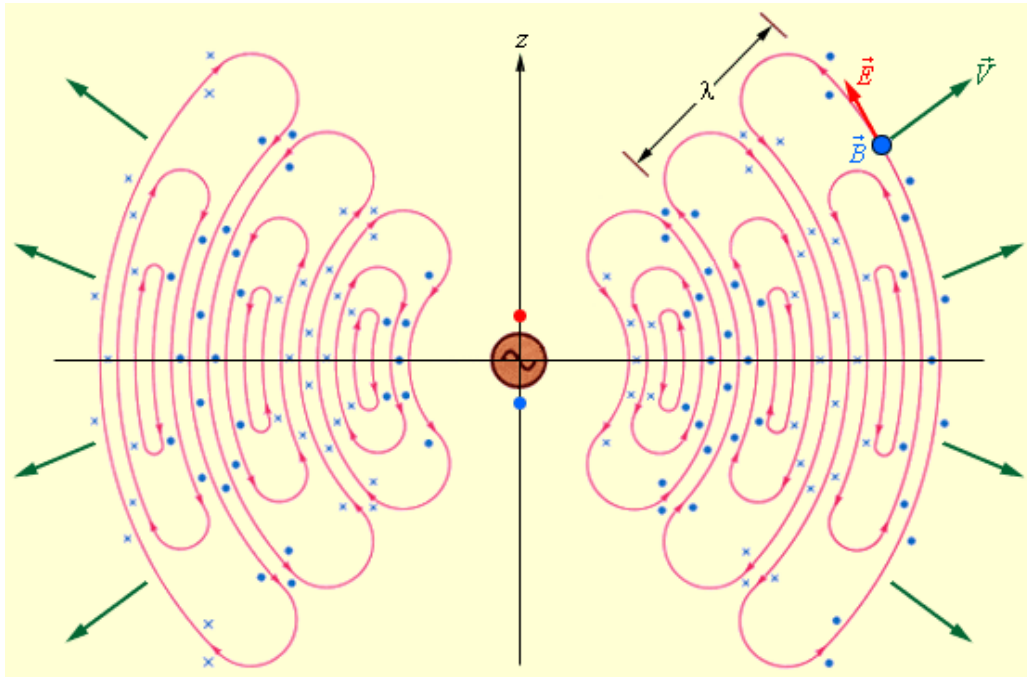


Рис.18.6. Излучение диполя

Электромагнитные волны являются поперечными, потому что векторы E и B лежат в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения.

Интересным является и тот факт, что электромагнитные волны образуются колеблющимися зарядами, т.е. зарядами, движущимися с ускорением. В этой связи естественно предположить, что всякий движущийся с ускорением заряд излучает электромагнитные волны.

Таким образом, по Максвеллу, электрические и магнитные поля не могут существовать обособленно. Невозможно создать переменное магнитное поле в пространстве, чтобы не возникло при этом электрическое поле и наоборот.

Рассмотрим подробнее «антенну», схема которой приведена на рисунке 9.6, но источник постоянного тока заменим генератором, обеспечивающим изменение тока по синусоидальному закону. До настоящего времени законченной теории ближнего поля излучателей не существует. Поле существенно упрощается на расстояниях $r \gg \lambda$. Если генерирование электромагнитных волн происходит в однородной изотропной среде, то волновой фронт будет сферическим. Векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ в каждой точке волнового фронта будут взаимно перпендикулярны и перпендикулярны радиус – вектору, проведенному из центра диполя. Диполь обладает направленными свойствами. Для диполя диаграмма направленности имеет вид восьмёрки. Диаграмма направленности характеризует свойство антенны концентрировать электромагнитную энергию в определённом направлении. Чем уже диаграмма направленности, тем больше дальность действия излучателя. Ширина диаграммы направленности определяется конструктивными параметрами антенны и несущей частотой. Для относительно высокочастотных антенн формирование направленности не представляет труда, но высокочастотные волны распространяются на меньшие расстояния, чем низкочастотные вследствие большего их поглощения. Особую значимость направленные свойства излучающих устройств имеют в радиолокации, где передающие и приёмные антенны должны удовлетворять определённым требованиям, исходя из условий пеленга объектов на выбранной несущей частоте.

Следует обратить внимание на то, что максимальный поток электромагнитной энергии излучается в плоскости, перпендикулярной оси диполя. Вдоль своей оси диполь не излучает энергии. Герц использовал элементарный диполь в качестве излучающей и приемной антенн при экспериментальном доказательстве существования электромагнитных волн.

Когда обнаружилось, что электромагнитные волны могут распространяться в пустоте, являясь одновременно и переносчиком световой энергии, то стало предельно очевидным, каким образом Солнце снабжает энергией нашу планету. Солнечный свет представляет со-

бой, по сути сложный набор электромагнитных волн инфракрасного, оптического и ультрафиолетового диапазона. Дальнейшие исследования обнаружили, что электромагнитное излучение проявляется в чрезвычайно широком диапазоне длин волн, в зависимости от величины длины волны излучение имеет разнообразные энергетические проявления. В таб. 18.1 приведены, обнаруженные к настоящему времени электромагнитные волны. Обращает на себя внимание диапазон длин электромагнитных волн от более чем 100 км, до 10^{-12} м, что составляет 17 порядков. Представить себе образно 10^{17} достаточно сложно, но, тем не менее, мы живём в Мире, сама сущность жизни в котором имеет электромагнитную основу, включая рыб, млекопитающих и даже – «венец природы».

Таблица 18.1

Длина	Наименование	Частота
100 км и более	Низкочастотные электрические колебания	0 – 3 кГц
100 км – 1 мм	Радиоволны:	3 кГц – 3ТГц
100 – 10 км	мираметровые (очень низкие частоты)	3 – 30 кГц
10 – 1 км	километровые (низкие частоты)	30 – 300 кГц
1 км – 100 м	гектометровые (средние частоты)	300 кГц – 3МГц
100 – 10 м	декаметровые (высокие частоты)	3 – 30 МГц
10 – 1 м	метровые (очень высокие частоты)	30 – 300 МГц
1 м – 10 см	дециметровые (ультравысокие частоты)	300 – 3ГГц
10 – 1 см	сантиметровые (сверхвысокие частоты)	3 – 30 ГГц
1 – 1 мм	миллиметровые	30 – 300ГГц
1 – 0,1 мм	децимиллиметровые (гипервысокие частоты)	300 – 3ТГц
2 мм – 760 нм	Инфракрасное излучение	150 ГГц – 400ТГц
760 – 380 нм	Видимое излучение	400 ТГц – 800 ТГц
380 – 3 нм	Ультрафиолетовое излучение	800 ТГц – 100 ПГц
10 нм – 1 пм	Рентгеновское излучение	300ПГц – 300ЭГц
до 10 пм	Гамма-излучение	до 30 ЭГц

18.5. Примеры расчёта электромагнитных колебаний

Пример № 1. Найти отношения амплитудных значений сил тока I_m , напряжений U_m , электрических W_{Em} и магнитных W_{Em} мощностей, если начальный заряд q_m на конденсаторе, включенном в идеальный колебательный контур, увеличился в 10 раз.

1. Предположим, что электрический заряд в колебательном контуре изменяется по закону

$$q = q_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1)$$

в этом случае уравнение силы тока представится следующим образом

$$i = \frac{dq}{dt} = \omega_0 q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = i_m \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (2)$$

где ω_0 – циклическая частота собственных колебаний в электрическом контуре.

2. Образует систему уравнений для амплитудных значений сил токов, из которых найдём их отношение

$$\left. \begin{aligned} i_{m1} &= q_{m1} \omega_0; \\ i_{m2} &= 10 q_{m1} \omega_0; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{i_{m2}}{i_{m1}} = \frac{q_{m2}}{q_{m1}} = 10. \quad (3)$$

3. Взаимосвязь между зарядом и напряжением установим из следующих соображений

$$C = \frac{q_{m1}}{U_{m1}}; \quad C = \frac{q_{m2}}{U_{m2}}; \Rightarrow \frac{U_{m2}}{U_{m1}} = \frac{q_{m2}}{q_{m1}} = 10. \quad (4)$$

4. Ввиду идеальности колебательного контура для энергии можно записать следующие соотношения

$$W_{Bm} = W_{Em} = \frac{q_m^2}{2C}; \Rightarrow \frac{W_{Bm(2)}}{W_{Bm(1)}} = \frac{W_{Em(2)}}{W_{Em(1)}} = \left(\frac{q_{m(2)}}{q_{m(1)}} \right)^2 = 100. \quad (5)$$

Пример № 2. В идеальном колебательном контуре амплитудное значение напряжения на конденсаторе увеличивается на $\Delta U_m = 10$ В, при этом максимальная сила тока через индуктивность возросла в 3 раза. Определить амплитуду напряжения до увеличения напряжения и начальное напряжение на конденсаторе.

1. Для идеального колебательного контура закон сохранения энергии можно записать следующим образом

$$\left. \begin{aligned} \frac{CU_{m(1)}^2}{2} &= \frac{LI_{m(1)}^2}{2}; \\ \frac{CU_{m(2)}^2}{2} &= \frac{LI_{m(2)}^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

2. Поделит уравнения (1) друг на друга почленно

$$\frac{CU_{m(2)}^2}{CU_{m(1)}^2} = \frac{LI_{m(2)}^2}{LI_{m(1)}^2}; \Rightarrow \left(\frac{U_{m(2)}}{U_{m(1)}} \right)^2 = \left(\frac{I_{m(2)}}{I_{m(1)}} \right)^2, \quad (2)$$

$$\frac{U_{m(2)}}{U_{m(1)}} = \frac{I_{m(2)}}{I_{m(1)}}. \quad (3)$$

3. Из уравнения (3) следует, что

$$U_{m(2)} = U_{m(1)} \frac{I_{m(2)}}{I_{m(1)}}. \quad (4)$$

4. Изменение напряжения можно записать следующим образом

$$U_{m(2)} - U_{m(1)} = \Delta U_m = U_{m(1)} \frac{I_{m(2)}}{I_{m(1)}} - U_{m(1)} = U_{m(1)} \left(\frac{I_{m(2)}}{I_{m(1)}} - 1 \right), \quad (5)$$

откуда

$$U_{m(1)} = \frac{\Delta U_m}{\frac{I_{m(2)}}{I_{m(1)}} - 1} = \frac{10}{2} = 5 \text{ В}, \quad (6)$$

$$U_{m(2)} = U_{m(1)} + \Delta U = 15 \text{ В}. \quad (7)$$

Пример № 3. В идеальном колебательном контуре амплитудное значение напряжения на конденсаторе равно $U_m = 100 \text{ В}$, а максимальная сила тока через индуктивность – $I_m = 100 \text{ мА}$. Определить силу тока через индуктивность и напряжение на конденсаторе, когда электрическая энергия, запасаемая в конденсаторе, совпадает по величине с магнитной энергией, присутствующей в индуктивности.

1. Равенство двух видов энергии, электрической и магнитной и закон сохранения энергии дают основание записать следующие соотношения

$$W_\Sigma = W_E + W_B = 2W_E, \quad (1)$$

$$W_{Em} = \frac{CU_m^2}{2}; \quad W_E = \frac{Cu^2}{2}, \quad (2)$$

$$\frac{CU_m^2}{2} = 2 \frac{Cu^2}{2}; \Rightarrow u = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 70,7 \text{ В}. \quad (3)$$

2. Аналогичные соотношения можно записать и для силы тока через индуктивность

$$W_{Bm} = \frac{LI_m^2}{2}; \quad W_B = \frac{Li^2}{2},$$

(4)

$$\frac{LI_m^2}{2} = 2 \frac{Li^2}{2}, \quad i = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 70,7 \text{ мА}. \quad (5)$$

Пример № 4. В идеальном контуре наблюдаются электромагнитные колебания с периодом $T = 100 \text{ мкс}$. Какой промежуток времени пройдет с момента возникновения колебаний до состояния равенства электрической и магнитной составляющих энергии?

1. В соответствие с уравнением (1) предыдущей задачи

$$W_{Em} = W_m + W_B = 2W_E. \quad (1)$$

2. С другой стороны

$$W_{Em} = \frac{CU_m^2}{2}; \quad W_m = \frac{Cu^2}{2}; \Rightarrow u = \frac{U_m}{\sqrt{2}}. \quad (2)$$

3. При нулевой начальной фазе $\varphi = 0$,

$$u(t) = U_m \cos \frac{2\pi}{T} t. \quad (3)$$

4. Совместим уравнения (2) и (3)

$$\frac{U_m}{\sqrt{2}} = U_m \cos \frac{2\pi}{T} t; \quad \cos \frac{2\pi}{T} t = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (4)$$

$$\frac{2\pi}{T} t = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}; \quad \frac{2t}{T} = \frac{1}{4}; \quad \Rightarrow \quad t = \frac{T}{8} = 12,5 \text{ с}. \quad (5)$$

Пример № 5. Определить, через какой промежуток времени после начала колебаний в идеальном LC – контуре заряд на конденсаторе с периодом колебаний $T = 100$ мкс достигнет впервые, величины равной половине амплитудного значения.

1. Запишем уравнение, характеризующее изменение во времени заряда конденсатора

$$q = q_m \cos \omega t = q_m \cos \frac{2\pi}{T} t. \quad (1)$$

2. Подставим в уравнение заданное условие

$$\frac{q_m}{2} = q_m \cos \frac{2\pi}{T} t; \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{T} t = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}, \quad (2)$$

$$\frac{2}{T} t = \frac{1}{3}; \quad t = \frac{T}{6} = 16,7 \text{ мкс}. \quad (3)$$

Пример № 6. В идеальном колебательном RC – контуре ёмкость конденсатора увеличилась в 100 раз, а индуктивность катушки уменьшилась в 25 раз. Как при этом поменялась частота собственных колебаний?

1. Уравнение периодов и частот собственных колебаний

$$T_1 = 2\pi\sqrt{L_1 C_1}; \quad T_2 = 2\pi\sqrt{L_2 C_2}, \quad (1)$$

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C_1}}; \quad \nu_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_2 C_2}}. \quad (2)$$

2. Отношение частот при заданном изменении ёмкости и индуктивности

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{L_1 C_1}{L_2 C_2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}. \quad (3)$$

Частота, таким образом, уменьшилась в два раза.

Пример № 7. В некоторый момент времени при возникновении колебаний в идеальном контуре энергия, накопленная в конденсаторе, становится в три раза больше энергии, запасаемой индуктивностью. В каком отношении будет находиться мгновенное значение напряжения на обкладках конденсатора с амплитудным значением. Определить в единицах периода промежуток времени от начала колебаний до наступления заданного режима.

1. По условию задачи магнитная составляющая энергии W_B в три раза меньше магнитной составляющей W_E , т.е.

$$W_B = \frac{W_E}{3} = \frac{Cu^2}{2n}, \quad (1)$$

В соответствие с законом сохранения энергии

$$W_{E(\max)} = \frac{CU_{\max}^2}{2} = \frac{Cu^2}{2} + \frac{Cu^2}{2n}, \quad (2)$$

2. Разрешим последнее уравнение относительно действующего напряжения

$$U_{\max} = u \sqrt{\frac{n}{n+1}}; \quad \frac{u}{U_{\max}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} = 0,866. \quad (3)$$

3. Уравнение колебаний напряжения на обкладках конденсатора позволяет определить искомый промежуток времени

$$u(\tau) = U_{\max} \cos\left(\frac{2\pi}{T} \tau\right); \quad \frac{2\pi}{T} \tau = \arccos 0,866 = \frac{\pi}{6}, \quad (4)$$

$$\tau = \frac{1}{12} T. \quad (5)$$

Пример № 8. В колебательном контуре без затухания при увеличении ёмкости на $\Delta C = 0,2$ мкФ, частота колебаний уменьшилась в 1,2 раза. Определить начальную и конечную ёмкость контура.

1. Частота собственных колебаний контура без затухания связана с его параметрами, следующими соотношениями

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_1}}; \quad \nu_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_2}}, \quad (1)$$

откуда

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}; \quad \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2 = \frac{C_2}{C_1}; \quad C_2 = C_1 \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2. \quad (2)$$

2. Уравнение (2) позволяет записать изменение ёмкости и найти искомые величины C_1 и C_2

$$\Delta C = C_1 \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2 - C_1; \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{\Delta C}{\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2 - 1} = \frac{2 \cdot 10^{-7}}{1,25} = 0,455 \text{ мкФ}. \quad (3)$$

$$C_2 = C_1 + \Delta C = 0,655 \text{ мкФ}. \quad (4)$$

Пример № 9. Идеальный колебательный контур, включённый в антенный блок радиоприёмника содержит конденсатор ёмкостью $C = 9$ пФ и катушку с индуктивностью $L = 1$ мГн. На какую длину волны настроен колебательный контур?

1. Используя формулу Томсона и соотношение между длиной волны и периодом электромагнитных колебаний, получим

$$T = 2\pi\sqrt{LC}; \quad \lambda = cT, \quad (1)$$

$$\lambda = 2\pi c \sqrt{LC} = 6,28 \cdot 3 \cdot 10^8 \sqrt{10^{-3} \cdot 9 \cdot 10^{-12}} \cong 180 \text{ м}. \quad (2)$$

Пример № 10. Плоский конденсатор с площадью обкладок $s = 10^{-3} \text{ м}^2$ и расстоянием между пластинами $d = 10^{-3} \text{ м}$, включён в идеальный колебательный контур радиоприёмника, содержащий катушку с индуктивностью $L = 50$ мкГн. Определить диэлектрическую проницаемость материала, помещённого между обкладками конденсатора, если радиоприёмник настроен на длину волны $\lambda = 250 \text{ м}$.

1. Запишем уравнение ёмкости плоского конденсатора с заполнением пространства между пластинами диэлектриком с проницаемостью ϵ

$$C = \frac{\epsilon \epsilon_0 s}{d}. \quad (1)$$

2. Длину волны, на которую настроен контур, определим уравнением (2) предыдущей задачи

$$\lambda = 2\pi c \sqrt{LC}. \quad (2)$$

3. Подставим в последнее уравнение значение ёмкости

$$\lambda = 2\pi c \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0 s L}{d}}; \Rightarrow \lambda^2 = \frac{4\pi^2 \epsilon \epsilon_0 s L}{d}. \quad (3)$$

4. Разрешим уравнение (3) относительно диэлектрической проницаемости

$$\epsilon = \frac{\lambda^2 d}{4\pi^2 c^2 \epsilon_0 s L} = \frac{6,25 \cdot 10^4 \cdot 10^{-3}}{39,5 \cdot 9 \cdot 10^{16} \cdot 9 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-5}} \cong 39. \quad (4)$$

Пример № 11. В некоторый момент времени сила тока в проводниках, подключенных к квадратным пластинам со стороной $a = 1$ м плоского конденсатора с диэлектрическим из титаната бария ($\epsilon = 1000$), составила $i = 10$ А. С какой скоростью изменяется напряжённость электрического поля в конденсаторе?

1. Выразим силу тока через скорость изменения заряда, а электрическую ёмкость через напряжение на обкладках

$$i = \frac{dq}{dt}; \quad C = \frac{dq}{du} = \frac{idt}{du}, \quad (2)$$

$$\frac{\epsilon \epsilon_0 s}{\delta} = \frac{idt}{du}; \quad \frac{\epsilon \epsilon_0 s du}{\delta} = idt. \quad (3)$$

2. Напряжённость электрического поля между пластинами конденсатора определится как

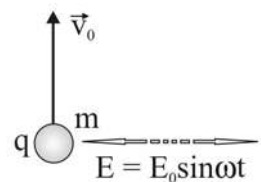
$$dE = \frac{du}{\delta}; \quad \frac{dE}{dt} = \frac{i}{\epsilon \epsilon_0 a^2} = \frac{9}{1000 \cdot 9 \cdot 10^{-12} \cdot 1} = 10^9 \frac{\text{В}}{\text{м} \cdot \text{с}}. \quad (4)$$

Пример № 12. Частица массой m и зарядом q влетает в однородное электрическое поле, напряжённость которого изменяется со временем по закону $E = E_0 \sin \omega t$. Начальная скорость частицы v_0 направлена перпендикулярно вектору напряжённости. Определите уравнение движения частицы.

1. Запишем уравнение второго закона Ньютона для заряженной частицы, на которую действует сила Кулона, изменяющаяся по закону синуса

$$m\ddot{x} = qE_0 \sin \omega t, \quad (1)$$

$$\ddot{x} = \frac{qE_0}{m} \sin \omega t. \quad (2)$$



2. Проинтегрируем уравнение (2) дважды

$$\dot{x} = \frac{qE_0}{m} \int_0^t \sin \omega t dt = -\frac{qE_0}{m} \cos \omega t + C_1, \quad (3)$$

$$x = -\frac{qE_0}{m} \int_0^t \cos \omega t dt + \int_0^t C_1 dt + C_2 = -\frac{qE_0}{m} \sin \omega t + C_1 t + C_2. \quad (4)$$

3. Постоянные интегрирования определим из начальных условий

$$v_0 + \frac{qE_0}{m} = C_1; \quad C_2 = 0; \Rightarrow x(t) = \left[v_0 + \frac{qE_0}{m} (1 - \sin \omega t) \right] t. \quad (5)$$

Пример № 13. Напряжение на обкладках конденсатора ёмкостью $C = 10$ мкФ, включенного в идеальный колебательный контур изменяется в соответствии с законом $u(t) =$

$100 \cos 10^3 \pi t$. Определить индуктивность катушки, период колебаний и закон изменения силы тока через индуктивность.

1. В данном случае циклическая частота собственных колебаний контура – $\omega_0 = 10^3 \pi$ рад/с, поэтому период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{6,28}{10^3 \cdot 3,14} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ с.} \quad (1)$$

2. Индуктивность катушки определим, воспользовавшись уравнением Томсона

$$T = 2\pi\sqrt{LC}; \quad L = \frac{T^2}{4\pi^2 C} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 9,87 \cdot 10^{-5}} \cong 5 \text{ мГн.} \quad (2)$$

3. Закон изменения силы тока определится уравнением

$$i(t) = C \frac{du}{dt} = -CU_0 \omega \sin \omega t = 10^{-5} \cdot 100 \sin 10^3 \pi t, \quad (3)$$

$$i(t) = -10^{-3} \sin 10^3 \pi t. \quad (4)$$

Пример № 14. Сила тока через индуктивность изменяется в соответствие с законом $i(t) = -10^{-2} \sin 62,8 \pi t$. Определить амплитудные значения электрической и магнитной составляющих энергии, запасаемой в идеальном контуре, обладающем индуктивностью $L = 1$ Гн.

1. Заданное уравнение силы тока позволяет определить период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{6,28}{62,8} = 0,1 \text{ с.} \quad (1)$$

2. Ёмкость конденсатора определим из формулы Томсона

$$T = 2\pi\sqrt{LC}; \quad C = \frac{T^2}{4\pi^2 L} \cong \frac{0,01}{40} \cong 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ Ф} = 250 \text{ мкФ.} \quad (2)$$

3. Амплитудное значение магнитной составляющей энергии

$$W_{B(\max)} = \frac{Li_{\max}^2}{2} = W_{E(\max)} = \frac{1 \cdot 10^{-4}}{2} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Дж} = 50 \text{ мкДж.} \quad (3)$$

Пример № 15. После того, как конденсатору, входящему в состав колебательного контура, сообщили заряд $q_{\max} = 1$ мКл, возникли электромагнитные колебания, которые через некоторое время исчезли. Определить количество выделившегося при этом тепла, если цилиндрический конденсатор длиной $l = 5$ см с внешним радиусом $r_1 = 1$ см и внутренним – $r_2 = 0,5$ см снабжён фторопластовым диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon = 150$.

1. Найдём ёмкость цилиндрического конденсатора с заданными параметрами

$$C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{\ln(r_1/r_2)} = \frac{6,28 \cdot 150 \cdot 9 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2}}{\ln 2} \cong 121 \text{ пФ.} \quad (1)$$

2. Согласно закону сохранения, вся первоначальная энергия, сообщённая колебательной системе, в конечном счете, перейдёт в тепло

$$W_{E(\max)} \cong Q; \quad W_{E(\max)} = \frac{q_{\max}^2}{2C} = \frac{10^{-12}}{2 \cdot 121 \cdot 10^{-12}} \cong 4 \text{ мДж.} \quad (2)$$

Пример № 16. Колебательный контур состоит из катушки индуктивности длиной $l = 0,2$ м и диаметром $D = 0,01$ м с числом витков на единицу длины $z = 1000 \text{ м}^{-1}$. Внутрь цилиндрического каркаса помещён стальной сердечник с магнитной проницаемостью $\mu = 200$.

Плоский конденсатор, состоящий из $n = 10$ параллельно включенных квадратных металлических пластин со стороной $a = 1$ см, между которыми помещена слюда, толщиной 100 мкм. Определить число полных колебаний N в контуре за время $\tau = 1,2$ с.

1. Определим ёмкость конденсатора

$$C = n \frac{\varepsilon \varepsilon_0 a^2}{\delta} = 10 \frac{100 \cdot 9 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-4}}{10^{-4}} \cong 9 \text{ нФ}, \quad (1)$$

2. Найдём индукцию катушки

$$L = \mu \mu_0 z^2 \ell \pi \frac{D^2}{4}, \quad (2)$$

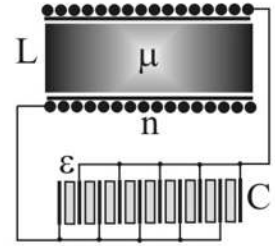
$$L = \frac{200 \cdot 1,26 \cdot 10^{-6} \cdot 10^6 \cdot 0,2 \cdot 3,14 \cdot 10^{-4}}{4} \cong 4 \text{ мГн}.$$

3. Период колебаний контура

$$T = 2\pi\sqrt{LC} = 6,28\sqrt{9 \cdot 10^{-9} \cdot 4 \cdot 10^{-3}} \cong 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ с}. \quad (3)$$

4. Количество колебаний за время τ

$$N = \frac{\tau}{T} = 1 \cdot 10^4. \quad (4)$$



Пример № 17. В идеальном колебательном контуре с ёмкостью $C_1 = 2$ мкФ резонансные колебания устанавливаются на частоте $\nu_1 = 500$ Гц. При подключении параллельно первому конденсатору ёмкости C_2 , резонансная частота понизилась до $\nu_2 = 250$ Гц. Определить ёмкость конденсатора C_2 .

1. Запишем условия резонанса

$$\left. \begin{aligned} \nu_1 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_1}}; \\ \nu_2 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C_1 + C_2)}} \end{aligned} \right\}. \quad (1)$$

2. Поделим уравнения (1) почленно

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\sqrt{L(C_1 + C_2)}}{\sqrt{LC_1}}; \quad \left(\frac{\nu_1}{\nu_2} \right)^2 = 1 + \frac{C_2}{C_1}, \quad (2)$$

откуда

$$C_2 = C_1 \left[\left(\frac{\nu_1}{\nu_2} \right)^2 - 1 \right] = 2 \cdot 10^{-6} (4 - 1) = 6 \text{ мкФ}. \quad (3)$$

Пример 18. Конденсатор ёмкостью $C = 1$ мкФ включен в идеальный контур с двумя параллельными катушками $L_1 = 0,1$ Гн, $L_2 = 0,2$ Гн. Найти амплитудное значение силы тока в контуре, если максимальное напряжение на обкладках конденсатора составляет $u_m = 10$ В.

1. Запишем закон сохранения энергии применительно к контуру

$$Cu_m^2 = L_1 i_{m1}^2 + L_2 i_{m2}^2. \quad (1)$$

2. При возникновении электромагнитных колебаний обе катушки пересекаются один и тем же магнитным потоком, т.е.

$$\Phi_{B1} = \Phi_{B2}; \quad L_1 i_{m1} = L_2 i_{m2}; \Rightarrow i_{m2} = i_{m1} \frac{L_1}{L_2}. \quad (2)$$

3. Суммарный ток в этом случае можно представить следующим образом

$$i_m = i_{m1} + i_{m2} = i_{m1} + i_{m1} \frac{L_1}{L_2}. \quad (3)$$

4. Выразим из уравнения (4) значения токов через катушки

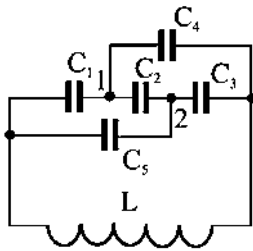
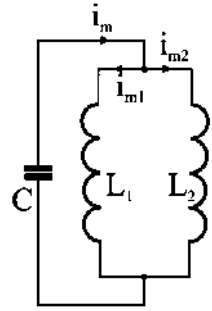
$$i_{m1} = \frac{i_m}{1 + \frac{L_1}{L_2}} = \frac{i_m L_2}{L_1 + L_2}, \quad i_{m2} = \frac{i_m L_1}{L_1 + L_2} \quad (4)$$

5. Подставим значения токов i_{m1} и i_{m2} в исходное уравнение (1)

$$Cu_m^2 = L_1 \frac{i_m^2 L_2^2}{(L_1 + L_2)^2} + L_2 \frac{i_m^2 L_1^2}{(L_1 + L_2)^2}, \quad (5)$$

откуда

$$i_m = u_m \sqrt{\frac{C(L_1 + L_2)}{L_1 L_2}} = 10 \sqrt{\frac{10^{-6} \cdot 0,3}{0,1 \cdot 0,2}} \cong 38,7 \text{ мА}. \quad (6)$$



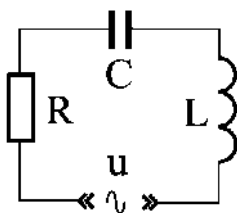
Пример № 19. Идеальный колебательный контур состоит из пяти конденсаторов одинаковой ёмкости $C_1 = \dots = C_5 = 1 \text{ мкФ}$ и катушки индуктивности $L = 1 \text{ мГн}$. определить частоту собственных колебаний контура.

1. Так как ёмкости всех конденсаторов одинаковы, то будут одинаковыми и потенциалы точек 1 и 2, т.е. $\phi_1 = \phi_2$, четыре конденсатора соединены параллельно, что даёт возможность частоту контура записать так

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{4CL}} = \frac{1}{6,28\sqrt{4 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-3}}} = 2,52 \text{ кГц}. \quad (1)$$

Пример 20. RLC – контур, использующийся в качестве сетевого фильтра, имеет следующие параметры: $R = 100 \text{ Ом}$, $L = 1 \text{ Гн}$, $C = 100 \text{ мкФ}$. Контур включен в стандартную сеть с эффективным значением напряжения $u_* = 220 \text{ В}$ и частотой $\nu = 50 \text{ Гц}$. Записать уравнения изменения силы тока и напряжения в контуре и определить падение напряжения на отдельных элементах контура.

1. Найдём ёмкостное и индуктивное сопротивление контура



$$R_L = 2\pi\nu L; \quad R_C = \frac{1}{2\pi\nu C}. \quad (1)$$

2. Определим амплитудное значение силы тока, протекающего через катушку и активное сопротивление

$$i_m = \frac{u_m}{Z} = \frac{\sqrt{2}u_*}{\sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2}} = \frac{\sqrt{2}u_*}{\sqrt{R^2 + \left(2\pi\nu L - \frac{1}{2\pi\nu C}\right)^2}}, \quad (2)$$

$$i_m = \frac{1,41 \cdot 220}{\sqrt{10^4 + \left(6,28 \cdot 50 - \frac{1}{6,28 \cdot 50 \cdot 10^{-4}}\right)^2}} \cong 1 \text{ A}. \quad (3)$$

где u^* – эффективное значение напряжения, Z – импеданс (суммарное сопротивление), R_L – индуктивное сопротивление, R_C – ёмкостное сопротивление.

3. Амплитудное падение напряжения на элементах схемы

$$u_C = i_m R_C = \frac{i_m}{2\pi\nu C} = \frac{1}{6,28 \cdot 50 \cdot 10^{-4}} = 32 \text{ В}, \quad (4)$$

$$u_R = i_m R = 100 \text{ В}; \quad u_L = 2\pi\nu L i_m = 314 \text{ В}. \quad (5)$$

4. Сдвиг фаз между колебаниями силы тока в цепи и колебания сетевого напряжения

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(2\pi\nu L - \frac{1}{2\pi\nu C}\right)^2}}, \quad (6)$$

$$\cos \varphi = \frac{100}{\sqrt{10^4 + (314 - 31,8)^2}} = \frac{1}{3}; \Rightarrow \varphi \cong 0,4\pi. \quad (7)$$

5. Уравнения колебаний силы тока и напряжения

$$u(t) = u_m \sin \omega t = 310 \sin 100t. \quad (8)$$

$$i(t) = i_m \sin(\omega t + \varphi) = 1 \sin(100\pi t + 0,4\pi). \quad (9)$$

Пример № 21. В RLC – контуре в течение $N = 10$ полных колебаний амплитуда напряжения на конденсаторе уменьшилась в 1,5 раза. Определить добротность контура.

1. Запишем уравнения для добротности Q и логарифмического декремента θ контура

$$Q = \frac{\pi}{\theta}; \quad \theta = \delta T. \quad (1)$$

2. Выразим амплитуду напряжения через указанный в условии задачи промежуток времени

$$u_N = u_0 \exp(-\delta t) = u_0 \exp(-\delta NT) = u_0 \exp(-\theta N). \quad (2)$$

3. Преобразуем уравнение (2) к виду

$$\frac{u_0}{u_N} = \exp(-\theta N); \quad \theta N = \ln \frac{u_0}{u_N} = \ln 1,5; \quad \theta = \frac{\ln 1,5}{N}. \quad (3)$$

4. Сопоставляя уравнения (1) и (3), получим

$$Q = \frac{\pi N}{\ln 1,5} = 774. \quad (4)$$

Пример № 22. Колебательный RLC – контур имеет следующие параметры: $R = 100 \text{ Ом}$, $C = 1 \text{ мкФ}$, $L = 1 \text{ Гн}$. Определить число полных колебаний N в течение которых амплитуда уменьшится в e раз.

1. Запишем соотношение амплитудных значений силы тока для колебательной системы с затуханием

$$\exp(-\delta t) = \frac{i_0}{i_N} = e; \Rightarrow \delta t = 1. \quad (1)$$

2. Выразим коэффициент затухания δ через параметры контура и подставим его значение в уравнение (1)

$$\delta = \frac{R}{2L}; \quad t = \frac{2L}{R}. \quad (2)$$

3. Найдём период затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}. \quad (3)$$

4. Циклическая частота собственных незатухающих колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{1/LC}. \quad (4)$$

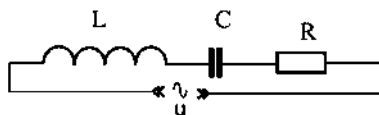
5. Подставим в уравнение (3) значения ω_0 и δ

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}. \quad (5)$$

6. Определим искомое число колебаний

$$N = \frac{t}{T} = \frac{L}{\pi R} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \frac{1}{314} \sqrt{\frac{1}{1 \cdot 10^{-6}} - \frac{10^4}{4}} \approx 3. \quad (6)$$

Пример № 23. Имеется последовательное соединение активного сопротивления $R = 1$ кОм, индуктивности $L = 10^{-2}$ Гн и ёмкости $C = 0,2$ нФ. Определите сопротивление цепи при подаче на неё напряжения с частотой 1 МГц и падение напряжения на каждом элементе, если амплитуда внешнего напряжения составляет $u_m = 100$ В.



1. Определим полное сопротивление заданной цепи, с учётом того, что

$$\omega = 2\pi\nu = 6,28 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}, \quad (1)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{10^9 + \left(10^4 - \frac{1}{10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-10}}\right)^2} \approx 32 \text{ кОм}. \quad (2)$$

2. Определим амплитудное i_m и эффективное i_* значение силы тока

$$i_m = \frac{u_m}{Z} \approx 3 \text{ мА}; \quad i_* = \frac{i_m}{\sqrt{2}} \approx 2 \text{ мА}. \quad (3)$$

3. Определим падение напряжения на активном сопротивлении R , конденсаторе C и индуктивности L

$$u_R = i_* R = 2 \text{ В}; \quad u_C = \frac{i_*}{\omega C} = 1,6 \text{ В}; \quad u_L = i_* \omega L = 126 \text{ В}. \quad (4)$$

Пример № 24. Внешняя цепь переменного тока с частотой $\nu = 1000$ Гц состоит из активного сопротивления $R = 10$ Ом и катушки индуктивностью $L = 10^{-2}$ Гн. Определите падение напряжения на индуктивности, когда максимальное напряжение на активном сопротивлении составляет $u_{R(m)} = 8,82$ В?

1. Определим циклическую частоту колебаний

$$\omega = 2\pi\nu = 6,28 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}. \quad (1)$$

2. Найдём полное сопротивление заданной цепи

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{100 + (6,28 \cdot 10^3 \cdot 10^{-2})^2} \approx 63 \text{ Ом}. \quad (2)$$

3. Амплитудное и эффективное значение силы тока в цепи

$$i_m = \frac{u_m}{Z} = 0,141 \text{ А}; \quad i_* = \frac{i_m}{\sqrt{2}} \approx 0,1 \text{ А}. \quad (3)$$

4. Падение напряжения на активном сопротивлении u_R и индуктивности u_L

$$u_R = i_* R = 1 \text{ В}; \quad u_L = i_* \omega L = 62,8 \text{ В}. \quad (4)$$

Пример № 25. Катушка индуктивностью $L = 1 \text{ Гн}$, конденсатор ёмкостью $C = 1 \text{ мкФ}$ и активное сопротивление $R = 10 \text{ Ом}$ образуют колебательный контур. Конденсатору первоначально сообщают заряд $q_m = 1 \text{ нКл}$. Найти логарифмический декремент затухания колебаний, период колебаний и записать уравнение изменения напряжения на обкладках конденсатора.

1. Определим циклическую частоту собственных незатухающих колебаний в контуре

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}. \quad (1)$$

2. Коэффициент затухания δ прямо пропорционален величине активного сопротивления и обратно пропорционален удвоенной индуктивности контура

$$\delta = R/2L = 5 \text{ с}^{-1}. \quad (2)$$

3. Определим циклическую частоту затухающих колебаний через параметры контура

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

(3)

4. Найдём период затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6,28}{\sqrt{\frac{1}{10^{-6}} - \frac{100}{4}}} \cong 6,28 \text{ мс}. \quad (4)$$

5. Логарифмический декремент колебаний

$$\theta = \delta T = 3,14 \cdot 10^{-2}. \quad (5)$$

6. Амплитудное значение напряжения на обкладках конденсатора определим, воспользовавшись зависимостью заряда, ёмкости и разности потенциалов

$$u_m = \frac{q_m}{C}. \quad (6)$$

7. Если предположить, что напряжение изменяется по закону косинуса без начальной фазы, то уравнение можно записать следующим образом

$$u(t) = \frac{q_m}{C} \exp(-\delta t) \cos \omega t, \quad 10^{-3} \exp(-5t) \cos 318\pi t. \quad (7)$$

Пример № 26. Энергия колебательного контура в течение $N = 100$ полных колебаний уменьшилась в $z = 225$ раз. Найти величину логарифмического декремента.

1. В соответствие с законом сохранения энергии, амплитудное значение электрической составляющей энергии должно быть равным магнитной составляющей, запасённой в индуктивности

$$W_B = \frac{Li_m^2}{2}. \quad (1)$$

2. Отношение энергий z можно представить через величины соответствующих сил токов

$$i_m = \sqrt{\frac{2W_B}{L}}; \quad \frac{i_{m(0)}}{i_{m(N)}} = \sqrt{\frac{W_{B(0)}}{W_{B(N)}}} = \sqrt{z}, \quad (2)$$

с другой стороны, декремент затухания определяется через период T и коэффициент затухания δ $\theta = \delta T$, откуда следует, что

$$\delta NT = \ln \frac{i_{m(0)}}{i_{m(N)}} = \ln \sqrt{z}; \quad N\theta = \ln \sqrt{z}. \quad (3)$$

3. Уравнение (3) позволяет найти величину логарифмического декремента

$$\theta = \frac{\ln \sqrt{z}}{N} = 5,42 \cdot 10^{-2}. \quad (4)$$

Пример № 27. В колебательном контуре с добротностью $Q = 10^3$ происходят колебания с циклической частотой $\nu = 10^3 \text{ с}^{-1}$. За какой промежуток времени амплитудное значение силы тока через индуктивность уменьшится в 23 раза?

1. Запишем уравнение изменение силы тока в контуре с затуханием

$$i(t) = i_m \exp(-\delta t) \cos \omega t, \quad (1)$$

откуда

$$\frac{i_{m(0)}}{i_{m(N)}} = \exp(\delta \tau); \quad \ln \frac{i_{m(0)}}{i_{m(N)}} = \delta \tau = \ln 16. \quad (2)$$

2. Выразим из уравнения (2) время τ , в течение которого происходит заданное затухание

$$\tau = \frac{\ln 16}{\delta}. \quad (3)$$

3. Коэффициент затухания связан с добротностью контура следующими соотношениями

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \frac{\pi}{\delta T} = \frac{\pi \nu}{\delta}; \quad \delta = \frac{\pi \nu}{Q}. \quad (4)$$

4. Подставим значение коэффициента затухания из уравнения (4) в уравнение (3)

$$\tau = \frac{Q \ln 16}{\pi \nu} = \frac{10^3 \cdot 3,14}{3,14 \cdot 10^3} = 1 \text{ с}. \quad (5)$$

Пример № 28. На последовательно соединённые: активное сопротивление $R = 800 \text{ Ом}$, катушку с индуктивностью $L = 1,27 \text{ Гн}$ и конденсатор ёмкостью $C = 1,59 \text{ мкФ}$ подаётся действующее напряжение $u_* = 127 \text{ В}$ промышленной частоты $\nu = 50 \text{ Гц}$. Определить действующее значение силы тока в цепи, сдвиг фаз между током и напряжением, а так же действующие значения падения напряжения на элементах схемы, мощность выделяемую в цепи.

1. Найдём величину циклической частоты колебаний и амплитудное значение напряжения

$$\omega = 2\pi \nu; \quad u_m = u_* \sqrt{2}. \quad (1)$$

2. Определим далее импеданс цепи

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(2\pi \nu L - \frac{1}{2\pi \nu C} \right)^2}. \quad (2)$$

3. Амплитудное значение силы тока в цепи

$$i_m = \frac{u_m}{Z} = \frac{u_* \sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + \left(2\pi \nu L - \frac{1}{2\pi \nu C} \right)^2}}. \quad (3)$$

4. Действующее значение силы тока

$$i_* = \frac{u_*}{\sqrt{R^2 + \left(2\pi\nu L - \frac{1}{2\pi\nu C}\right)^2}}, \quad (4)$$

$$i_* = \frac{127}{\sqrt{6,4 \cdot 10^5 + (399 - 2000)^2}} \cong 71 \text{ мА}. \quad (5)$$

4. Разность фаз между током и напряжением определяется отношением активной составляющей сопротивления к реактивной составляющей

$$\varphi = \arctg \left(\frac{2\pi\nu L - \frac{1}{2\pi\nu C}}{R} \right) = \arctg 2; \quad \varphi = 63,4^\circ. \quad (6)$$

5. Падение напряжения на элементах схемы

$$u_R = i_* R = 56,8 \text{ В}; \quad u_L = i_* 2\pi\nu L = 28,3 \text{ В}; \quad u_C = \frac{i_*}{2\pi\nu C} = 142 \text{ В}. \quad (7)$$

6. Мощность, выделяемая в цепи

$$p = i_*^2 R = 4 \text{ Вт}. \quad (8)$$

Пример № 29. К бытовой сети с действующим напряжением $u_* = 220 \text{ В}$ и частотой $\nu = 50 \text{ Гц}$ подключена схема, состоящая из последовательно включенного активного сопротивления $R = 10 \text{ Ом}$ и катушки индуктивностью 30 мГн . Какое количество тепла выделится в активном сопротивлении за время $\tau = 1 \text{ с}$?

1. Запишем уравнение полного сопротивления цепи

$$Z_{R,L} = \sqrt{R^2 + (2\pi\nu L)^2} = 55,7 \text{ Ом}. \quad (1)$$

2. Действующая сила тока, потребляемая цепью

$$i_{(1)*} = u_* / Z_{R,L} = 3,95 \text{ А}. \quad (2)$$

3. Количество тепла, выделяющееся на активном сопротивлении

$$Q_1 = i_{(1)*}^2 R \tau = \frac{u_*^2 R \tau}{R^2 + 4\pi^2 \nu^2 L^2} = \frac{4,84 \cdot 10^4 \cdot 10 \cdot 1}{100 + 2960} \cong 156 \text{ Дж}. \quad (3)$$

Пример № 30. Колебательный R, L, C – контур обладает собственной частотой колебаний $\nu_0 = 1 \text{ кГц}$, резонанс контура проявляется на частоте $\nu_r = 800 \text{ Гц}$. Найти частоту затухающих колебаний контура.

1. Циклическая частота затухающих колебаний контура

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}; \Rightarrow \omega_0^2 = \omega^2 + \delta^2. \quad (1)$$

2. Циклическая частота резонансных колебаний

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}; \Rightarrow \omega_0^2 = \omega_r^2 + 2\delta^2. \quad (2)$$

3. Объединим уравнения (2) и (1)

$$\omega^2 + \delta^2 = \omega_r^2 + 2\delta^2; \Rightarrow \delta^2 = \omega^2 - \omega_r^2. \quad (3)$$

4. Подставим значение коэффициента затухания δ из уравнения (3) в уравнение (1)

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \omega^2 - \omega_r^2 = 2\omega^2 - \omega_r^2; \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\omega_0^2 + \omega_r^2}{2}}, \quad (4)$$

$$\nu = \sqrt{\frac{\nu_0^2 + \nu_r^2}{2}} = 906 \text{ Гц}. \quad (5)$$

Пример № 31. В RLC – контуре наблюдаются затухающие колебания с периодом $T = 100$ мс. В течение 10 периодов колебаний амплитудное значение силы тока в цепи уменьшилось в 20 раз. Найти величину резонансной частоты колебательного контура.

1. Амплитудное значение силы тока при затухающих колебаниях можно представить следующим образом

$$i_{m(1)} = i_{m(0)} \exp(-\delta T); \quad i_{m(10)} = i_{m(0)} \exp(-10\delta T), \quad (1)$$

2. Определим отношение амплитудных значений силы тока при первом и десятом колебании

$$\frac{i_{m(1)}}{i_{m(10)}} = \exp(9\delta T) = 20; \quad 9\delta T = \ln 20. \quad (2)$$

3. Выразим из последнего уравнения величину коэффициента затухания

$$\delta = \frac{\ln 20}{9T}. \quad (3)$$

4. Запишем уравнение для циклической частоты затухающих колебаний в контуре

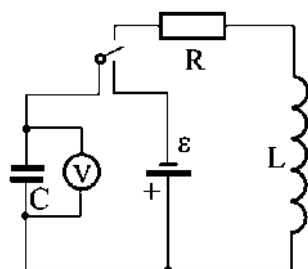
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}; \quad \omega = \frac{2\pi}{T}; \quad \omega_0^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 + \delta^2. \quad (4)$$

5. Определим далее циклическую резонансную частоту

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 + \delta^2 - 2\delta^2} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - \left(\frac{\ln 20}{9T}\right)^2}, \quad (5)$$

$$\nu_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - \left(\frac{\ln 20}{9T}\right)^2} = \frac{1}{6,28} \sqrt{\left(\frac{6,28}{0,1}\right)^2 - \left(\frac{3}{0,9}\right)^2} \cong 9,98 \text{ Гц}. \quad (6)$$

Пример № 32. Конденсатор ёмкостью $C = 10$ мкФ, после сообщения ему электрического заряда $q = 1$ мКл, подключают к цепи, состоящей из катушки с индуктивностью $L = 1$ Гн с активным сопротивлением $R = 100$ Ом. Определить период колебаний контура и логарифмический декремент θ . Как во времени будет изменяться напряжение на обкладках конденсатора? Получить аналитическую и графическую зависимость $u_C = f(t)$.



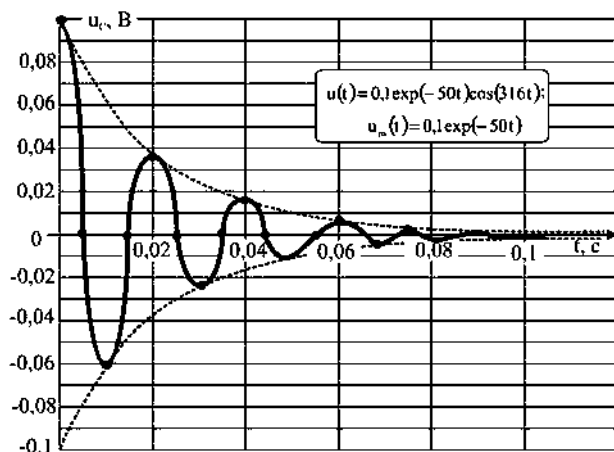
1. Определим амплитудное значение напряжения на обкладках конденсатора в момент времени $t = 0$

$$u_m = \frac{q}{C} = \frac{10^{-6}}{10^{-5}} = 0,1 \text{ В}. \quad (1)$$

2. Найдём величину коэффициента затухания цепи

$$\delta = \frac{R}{2L} = 50. \quad (2)$$

3. Период затухающих колебаний



по экспоненциальному закону

$$u_m(t) = 0,1 \exp(-50t). \quad (6)$$

t, с	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1
u _m , В	0,1	0,0368	0,0135	$5 \cdot 10^{-3}$	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$6,7 \cdot 10^{-4}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} = \frac{6,28}{\sqrt{\frac{1}{10^{-5}} - \frac{10^4}{4}}} \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ с} \quad (3)$$

4. Запишем уравнение изменения напряжения на обкладках конденсатора

$$u(t) = u_m \exp(-\delta t) \cos \omega t, \quad (4)$$

$$u(t) = 0,1 \exp(-50t) \cos(316t). \quad (5)$$

5. Как видно из уравнения (5), амплитудное значение напряжения на обкладках конденсатора будет изменяться

Пример № 33. Цепь состоит из конденсатора ёмкостью $C = 1 \text{ мкФ}$ и катушки индуктивностью $L = 1 \text{ Гн}$ и активного сопротивления R . За время $\tau = 1 \text{ с}$ напряжение на обкладках конденсатора уменьшилось в $n = 10$ раз. Определить логарифмический декремент колебаний θ и величину сопротивления R .

1. Определим период колебаний, воспользовавшись формулой Томсона

$$T = 2\pi\sqrt{LC} = 6,28 \cdot 10^{-3} \text{ с}. \quad (1)$$

которая справедлива при

$$\frac{1}{LC} \gg \left(\frac{R}{2L}\right)^2, \quad (2)$$

в рассматриваемом случае $(1/LC) = 10^6$.

2. Запишем закон изменения напряжения на обкладках конденсатора и определим логарифмический декремент

$$u = u_m \exp\left(-\frac{\theta t}{T}\right); \Rightarrow \theta = \frac{T \ln\left(\frac{u_m}{u}\right)}{\tau} = \frac{6,28 \cdot 10^{-3} \ln 10}{1} \approx 1,45 \cdot 10^{-2}. \quad (3)$$

3. Величину сопротивления определим из уравнения взаимосвязи логарифмического декремента θ и коэффициента затухания δ

$$\theta = \delta T = \frac{RT}{2L}; \Rightarrow R = \frac{2\theta L}{T} = \frac{2 \cdot 1,45 \cdot 10^{-2} \cdot 1}{6,28 \cdot 10^{-3}} = 4,62 \text{ Ом}. \quad (4)$$

Пример № 34. Цилиндрическая катушка индуктивности длиной $l = 1 \text{ м}$ и площадью поперечного сечения $s = 1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ включена в бортовую сеть судна с частотой изменения силы тока $\nu = 400 \text{ Гц}$. Найти активное сопротивление катушки, если она содержит $N = 6000$ витков при разности фаз между током и напряжением $\varphi = 60^\circ$.

1. Определим циклическую частоту колебаний

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (1)$$

2. Заданные по условию задачи данные позволяют определить индуктивность катушки

$$L = \frac{\mu\mu_0 N^2 s}{\ell} . \quad (2)$$

3. Разность фаз между силой тока и напряжением в общем случае R,LC – цепи определяется уравнением

$$\varphi = \arctg \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right) , \quad (3)$$

отсутствие в цепи конденсатора, позволяет формулу упростить

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\pi\nu L}{R} . \quad (4)$$

4. Подставим уравнение индуктивности (2) в уравнение сдвига фаз

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\pi\nu\mu\mu_0 N^2 s}{R\ell} . \quad (5)$$

5. Разрешим уравнение (5) относительно активного сопротивления катушки R

$$R = \frac{2\pi\nu\mu\mu_0 N^2 s}{\ell \operatorname{tg} \varphi} = \frac{6,28 \cdot 400 \cdot 3,6 \cdot 10^6 \cdot 10^{-4} \cdot 1,26 \cdot 10^{-6}}{1 \cdot 1,73} \cong 0,66 \text{ Ом} . \quad (6)$$

Пример № 35. RLC – контур включён в сеть переменного тока. Максимальная разность потенциалов на обкладках конденсатора равна $u_m = 10 \text{ В}$. Найти среднюю величину мощности, потребляемой контуром при незатухающих колебаниях, если $L = 1 \text{ Гн}$, $C = 1 \text{ мкФ}$, $R = 100 \text{ Ом}$.

1. Определим амплитудное значение заряда на конденсаторе

$$q_m = Cu_m . \quad (1)$$

2. Найдём амплитудное значение силы тока в цепи из следующих соображений

$$q(t) = q_m \cos \omega t; \quad i(t) = \frac{dq}{dt} = -\omega q_m \sin \omega t ; \quad (2)$$

$$I_m = \frac{dq_m}{dt} = -\omega q_m = -\frac{q_m}{\sqrt{LC}} .$$

(3)

3. Средняя мощность, потребляемая цепью

$$\langle P \rangle = \frac{1}{t} \int_0^t i_m^2 R dt = \frac{\omega^2 q_m^2 R}{t} \int_0^t \sin^2 \omega t dt = \frac{\omega^2 q_m^2 R}{2} = \frac{C^2 u_m^2 R}{2LC} , \quad (4)$$

$$\langle p \rangle = \frac{Cu_m^2 R}{2L} = \frac{10^{-6} \cdot 100 \cdot 100}{2} = 5 \text{ мВт} . \quad (5)$$

Литература

1. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. – М.: Наука, 1972. – 470 с.
2. Иориш Ю.И. Измерение вибраций. Общая теория, методы и приборы. – М.: Машгиз, 1956. – 403 с.
3. Мангус К. Колебания. Введение в исследование колебательных систем. – М.: Мир, 1982. – 303 с.
4. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. Учебное пособие. – М.: Наука, 1980. – 272 с.
5. Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н. Основы теории колебаний. – М.: Наука, 1978. – 391 с.
6. Лорд Рэлей. Теория звука. – М.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1940. – 499 с.
7. Харкевич А.А. Линейные и нелинейные системы. – М.: Наука, 1973. – 566 с.
8. Марио Льюцци. История физики. Пер. с итальянского. – М.: Мир, 1970. – 464 с.
9. П. Чжен. Отрывные течения. Т. 1. Пер. с англ. – М.: Мир, 1972. – 299 с.
10. Кузо Кузов. Мир без форм. Пер. с болгарского. – М.: Мир, 1976. – 243 с.
11. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, ошибки и парадоксы. – 3-е изд., перераб. – М.: Наука, 1979. – 384 с.
12. Р. Бишоп. Колебания. Пер. с англ. / Под ред. Я.Г. Пановко – 2-е изд., перераб. – М.: Наука, 1979. – 160 с.
13. Исакович М.А. Общая акустика. – М.: Наука, 1973. – 495 с.
14. Крауфорд Ф. Волны. Пер. с англ. – М.: Наука, 1974. – 519 с.
15. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т-4. Кинетика. Теплота. Звук. Пер. с англ. – М.: Мир, 1967. – 260 с.
16. Пейн Г. Физика колебаний и волн. Пер. с англ. – М.: Мир, 1979. – 390 с.
17. Савельев И.В. Курс общей физики: Учеб. пособие: Для втузов. В 5 кн. Кн. 4. Волны. Оптика. – 4-е изд., перераб. – М.: Наука Физматлит, 1988. – 256 с.
18. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Курс физики. Т. III. Изд. 2-е. – М.: Высш. школа, 1972. – 536 с.
19. Дж. Пирс. Почти всё о волнах. Пер. с англ. – М.: Мир, 1976. – 176 с.
20. Линдер Г. Картины современной физики. Пер. с нем. – М.: Мир, 1977. – 272 с.
21. Джанколи Д. Физика: В 2 т. Т. 1: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 656 с.
22. Морз Ф. Колебания и звук: Пер. с англ. под ред. С.Н. Ржевкина. – М.: Госиздат технико-теоретической литературы, 1949. – 494 с.
23. Чедд Г. Звук. Пер. с англ. Г.И. Кузнецова. – М.: Мир, 1975. – 206 с.
24. Бергман Л. Ультразвук и его применение в науке и технике. Пер. с немецкого С.С. Григорьева и Л.Д. Розенберга. – М.: Иностранная литература, 1956. – 726 с.
25. Дж. В. Стрэтт (Лорд Рэлей). Теория звука. Пер. с англ. С.М. Рытова и К.Ф. Теодорчика. – М.: Госиздат технико-теоретической литературы, 1940. – 499 с.
26. Агранат Б.А. Ультразвуковая технология. – М.: Металлургия, 1974. – 503 с.
27. Большая энциклопедия. Под ред. С.Н. Южакова. В 25 т., Т. 20. – С.-Петербург: 1896, – 795 с.
28. Цвиклер Э., Фельдкеллер Ф. Ухо как приёмник информации. Пер. с нем. – М.: Связь, 1971. – 255 с.
29. Справочник по технической акустике: Пер. с нем./Под ред. М. Хекла и Х.А. Мюллера. – Л.: судостроение, 1980. – 440 с.

30. Исаков А.А. Исследование техногенного влияния судов на экологию биопродуктивных зон камчатского шельфа. Автореферат канд. дис. – Владивосток: 2005 г. – 57 с.
31. Тарасов Л.В. Физика в природе. – М.: Просвещение. 1988. – 351 с.
32. Шулейкин В.В. Физика моря. – М.: Наука. 1968. – 1032 с.
33. <http://www.videodive.ru/scl/ocean/ocnbc.shtml>
34. Голямина И.П. Ультразвук. Маленькая энциклопедия. – М.: Советская энциклопедия, 1979. – 400 с.
35. Техническая энциклопедия в 35 т. Т. 6. Под ред. академика Л.К. Мартенса. – М.: Советская энциклопедия. 1929 г. – 929 с.
36. Лепендин Л.Ф. Акустика: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. школа, 1978. – 448 с.
37. Мэрион Дж. Физика и физический мир. Пер. с англ. Е.М. Лейкина и С.Ю. Лукьянова. – М.: Мир, 1975. – 623 с.
38. Айрапетянц Э.Ш., Константинов А.И. Эхолокация в природе. – М.: Наука, 1970. – 379 с.
39. Жизнь животных. В 7 т. Редкол. В.Е. Соколов (гл. ред.) и др. Т. 7. Млекопитающие. – М.: Просвещение, 1989. – 558 с.
40. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике: Учеб. пособие для студентов вузов. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1988. – 527 с. ил.
41. Иродов И.Е. задачи по общей физике: Учеб. пособие. – 2-е изд. перераб. – М.: Наука. Гл. ред. физ. – мат. лит. 1988. – 416 с., ил.
42. Трофимова Т.И., Павлова З.Г. Сборник задач по курсу физики с решениями: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1999. – 591 с.
43. Стрелков С.П., Сивухин Д.В., Угаров В.А., Яковлев И.А. Сборник задач по общему курсу физики. Учебн. пособие для студентов физических специальностей высших учебных заведений.
44. Все решения к «Сборнику задач по общему курсу физики» В.С. Волькенштейн. В 2 кн. Кн. 2. – М.: Олимп ООО Фирма «Издательство АСТ», 1999. – 592 с., ил.
45. Савельев И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике: Учеб. пособие для студентов высш. техн. учеб. заведений. – М.: ООО «Издательство Астрель», ООО «Издательство АСТ», 2001. – 320 с., ил.
46. Гусев И.Е. Физика. Решение задач. – Мн.: Литература, 1997. – 592 с. Ил.
47. Сахаров Д.И. Сборник задач по физике для вузов. – 13 изд., испр. и доп. – М.: ООО «Мир и Образование», 2003. – 400 с.
48. Гладской В.М., Самойленко П.И. Физика. Сборник задач: Пособие для вузов. – М.: Дрофа, 2002. – 288 с.
49. <http://www.college.ru/physics/courses/op25part2/content/chapter6/section/paragraph9/theory>
50. Энциклопедия для детей. Том 16. Физика. Ч. 2., Электричество и магнетизм. Термодинамика и квантовая механика. Физика ядра и элементарных частиц/ Глав. ред. В.А. Володин. – М.: Аванта + ,2001. – 439 с.: илл.
51. Карцев Вл. Приключение великих уравнений. – М.: Знание, 1978, – 224 с.